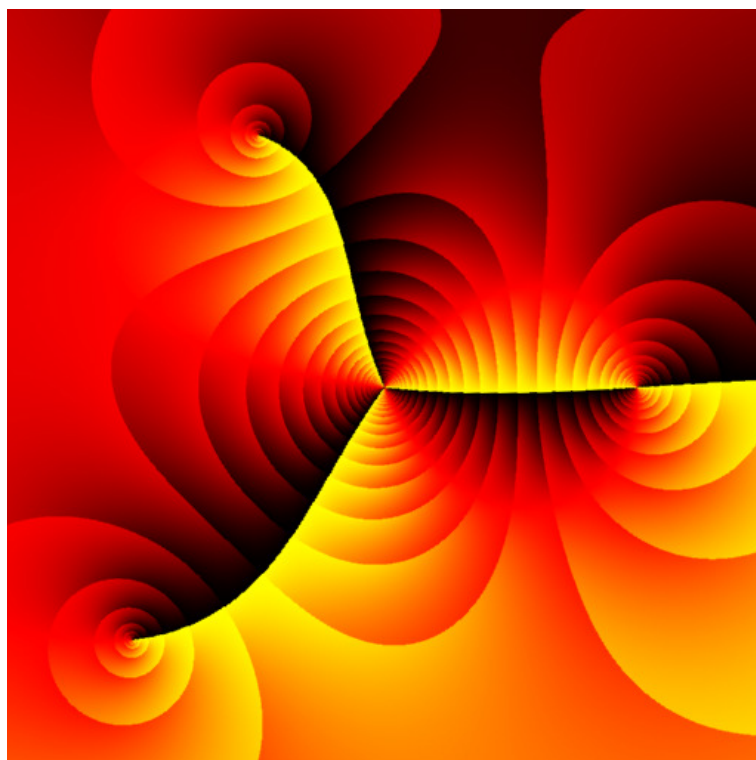


TATA45 Komplex analys



Lars Alexandersson

2021

Förord till upplagan 2021

Denna text behandlar grunderna i komplex analys i en variabel. Nödvändiga **förkunskaper** är kurser i (reell) en- och flervariabelanalys samt linjär algebra; att dessutom ha läst vektoranalys underlättar, men är inget krav. I synnerhet förväntas man vara förtrogen med komplexa tal och den komplexa exponentialfunktionen (från Matematisk grundkurs eller motsvarande) samt reella numeriska serier och potensserier (från Envariabelanalys 2).

Texten är, precis som titeln säger, avsedd för kursen **TATA45 Komplex analys**, som ges vid Linköpings universitet. De kapitel, avsnitt, satser, (delar av) bevis m.m. som är märkta med en asterisk (*) ingår dock inte i denna kurs. Ofta ingår de i stället i fortsättnings- och fördjupningskursen TATA78 Komplex analys fk, men ibland är de korta utblickar mot mera avancerad komplex analys.

För att i någon mån förtydliga vilka resultat som är centrala har jag valt att – vid sidan av de vanliga begreppen definition, sats, följsats och hjälpsats – utnyttja även begreppet proposition. En **definition** är en avgränsning och bestämning av betydelse hos ord, begrepp eller symboler; en **sats** (*teorem*) är ett av teorins huvudresultat; en **proposition** är ett resultat som är mindre viktigt än en sats men viktigare än en hjälpsats; en **följsats** (*korollarium*) är ett resultat som omedelbart följer logiskt ur ett annat resultat; och en **hjälpssats** (*lemma*) är ett delresultat som bevisas som en etapp på väg mot större resultat och är ofta inte så intressant i sig själv, åtminstone inte i det aktuella sammanhanget. Definitioner, satser, propositioner, följsatser, hjälpsatser, exempel och anmärkningar har en **gemensam löpande numrering** i varje kapitel, så att t.ex. Sats 4.5 kan följas av Exempel 4.6 och Följsats 4.7.

I slutet av många avsnitt finns **övningsuppgifter**. De har en egen löpande numrering i varje kapitel, och med start på s. 193 finns svar till dessa uppgifter.

Ett kortfattat **sakregister** finns med start på s. 202. Ett sökord följs där av ett eller flera sidnummer som kan vara skrivna på tre olika sätt: fet stil (t.ex. **46**) står för huvudhänvisningen, typiskt till en definition eller en formulering av en sats eller liknande; vanlig stil (46) betyder en annan hänvisning; och lutande stil (46) refererar till en övningsuppgift.

Förändringarna från 2019 till 2021 är små: Avsnitt 5.7 om Γ - och ζ -funktionerna har utökats, men i övrigt har endast små redaktionella ändringar gjorts och ett par uppgifter har tillkommit.

Eventuella **rättelser** till denna upplaga (den femte; tidigare upplagor är 2014, 2015, 2017 och 2019) publiceras på kursens hemsida, som i skrivande stund har adressen

<https://courses.mai.liu.se/GU/TATA45/>

Till sist vill jag tacka mina kolleger Fredrik Andersson och Mats Aigner för flera värdefulla synpunkter på manuskriptet.

Linköping, 23 augusti 2021

Lars Alexandersson

Omslagsbilden har producerats av Hans Lundmark och visar en sorts graf till

$$w = \frac{(z-2)^2(z+1-2i)(z+2+2i)}{z^3}$$

i kvadraten med hörn $z = \pm 3 \pm 3i$. Bilden är en överlagring av färger och skuggor. Färgerna representerar olika värden på $\arg w$, och $\arg w$ ökar med 2π när man går från svart via rött till gult. Skuggningen representerar nivåer för $\ln|w|$, och den syns bäst i de slutna kurvorna i figuren. Dessa kurvor tättnar nära nollställena och polen och blir där alltmer cirkellika.

När man går runt ett av de enkla nollställena, $z = -1 + 2i$ eller $z = -2 - 2i$, ett varv moturs övergår svart färg via röd färg till gul färg, så argumenttillskottet för w är 2π . När man går runt det dubbla nollstället $z = 2$ händer samma sak två gånger på ett varv, så argumenttillskottet är 4π . När man går runt trippelpolen 0, slutligen, händer samma sak tre gånger på ett varv, men i *omvänd* ordning, så argumenttillskottet är -6π .

En enkel sluten kurva med moturs orientering som omsluter både det enkla nollstället $z = -2 - 2i$ och trippelpolen $z = 0$ kommer att passera abrupta övergångar från svart till gult två gånger, och argumenttillskottet för w längs denna kurva är därför $-4\pi = 2\pi(1-3)$, helt i enlighet med argumentprincipen (Sats 6.2 på s. 137). På samma sätt kommer en enkel sluten kurva med moturs orientering som omsluter det enkla nollstället $z = -1 + 2i$ och det dubbla nollstället $z = 2$ att passera abrupta övergångar från gult till svart tre gånger, och argumenttillskottet för w längs denna kurva är därför $6\pi = 2\pi(1+2)$.

Hans Lundmarks webbsida, som i skrivande stund har adressen

<https://users.mai.liu.se/hanlu09/complex/>

rekommenderas för den som vill sätta sig in i hur liknande bilder konstrueras och tolkas.

Innehåll

Förord	i
1 Tal, mängder och funktioner	1
1.1 Komplexa tal	1
1.2 Mängder och kurvor i det komplexa talplanet	6
1.3 Komplexvärda funktioner av en komplex variabel	8
1.4 Analytiska och harmoniska funktioner	13
2 Elementära funktioner	19
2.1 Exponentialfunktionen	19
2.2 Logaritmfunktionen. Grenar	20
2.3 Potensfunktioner	25
2.4 Trigonometriska och hyperboliska funktioner	33
3 Integraler	39
3.1 Integraler på intervall i $\mathbb{R}$	39
3.2 Integraler längs kurvor i $\mathbb{C}$	40
3.3 Primitiva funktioner	42
3.4 Integralformler för analytiska funktioner	46
3.5 *Regularitet. Lokala och globala primitiver m.m.	51
3.6 Medelvärdesegenskapen. Maximumprincipen	55
4 Serier	59
4.1 Komplexa numeriska serier	59
4.2 Komplexa potensserier	62
4.3 Serieutvecklingar för analytiska funktioner	70
4.4 Serieutvecklingar med $\mathcal{O}(z^n)$	79
4.5 Cauchys olikheter med följder	82
4.6 Nollställena och singulariteter	84
4.7 *Multipelpunkter. Öppna avbildningssatsen	91
4.8 *Likformig konvergens av potensserier	93
5 Residykalkyl	99
5.1 Residyer	99
5.2 Trigonometriska integraler över hel period	104
5.3 Integration av rationella funktioner	106
5.4 Fourierintegraler	109
5.5 Indragna konturer och nyckelhålskonturer	114
5.6 *Beräkning av vissa summor	119
5.7 *Något om Γ - och ζ -funktionerna	125

6	Argumentprincipen	135
6.1	Argumenttillskott längs kurvor	135
6.2	Argumentprincipen och Rouchés sats	137
6.3	*Routh-Hurwitz metod	144
6.4	*Schur-Cohns metod	150
7	Möbiusavbildningar m.m.	153
7.1	Allmänt om konforma avbildningar	154
7.2	Något om Riemannsfären	155
7.3	Möbiusavbildningar – inledning	156
7.4	Möbiusavbildningar och $\hat{\mathbb{C}}$ -cirklar	158
7.5	Möbiusavbildningar, $\hat{\mathbb{C}}$ -cirklar och spegelpunkter	160
8	*Arcusfunktioner m.m.	169
8.1	Grenar till sammansatta funktioner	169
8.2	Några grenar till $(1 - z^2)^{1/2}$	171
8.3	arcsin och Arcsin, samt arsinh och Arsinh	173
8.4	arccos och Arccos, samt arcosh och Arcosh	175
8.5	arctan och Arctan, samt artanh och Artanh	176
8.6	Principalvärden i Maple	178
9	*Schwarz-Christoffels metod	179
9.1	Avbildningar på polygoner i $\mathbb{C}$	179
9.2	Avbildningar på polygoner i $\hat{\mathbb{C}}$	184
9.3	Avbildningar på generaliserade polygoner i $\hat{\mathbb{C}}$	187
9.4	Diverse konforma avbildningar	190
	Svar till övningar	193
	Sakregister	202

1 Tal, mängder och funktioner

1.1 Komplexa tal

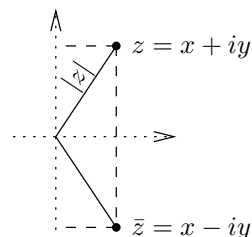
Här ska vi snabbt repetera de grundläggande egenskaperna hos komplexa tal. För en mera utförlig framställning hänvisar vi till litteraturen i Matematisk grundkurs, närmare bestämt Forsling-Neymark, *Matematisk analys en variabel*, avsnitt 1.7 (Komplexa tal) och 2.6 (Den komplexa exponentialfunktionen).

Komplexa tal $z \in \mathbb{C}$ kan skrivas i **rektangulär form**:

$$z = x + iy,$$

där $x, y \in \mathbb{R}$. $x = \operatorname{Re} z$ kallas realdelen och $y = \operatorname{Im} z$ imaginärdelen av z , och med (absolut)beloppet eller längden av z menas

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Vidare definieras (komplex)konjugatet av z som $\bar{z} = x - iy$. Att

$$\overline{(\bar{z})} = z, \quad \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad |\bar{z}| = |z| \quad \text{och} \quad z\bar{z} = |z|^2$$

får man genast. Dessutom är följande sant, med uppenbara beteckningar:

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \quad \text{och} \quad y_1 = y_2,$$

d.v.s. att en komplex ekvation är ekvivalent med två reella ekvationer.

1.1. Exempel (Andragradsekvation). Alla andragradsekvationer $z^2 + az + b = 0$, där $a, b \in \mathbb{C}$, kan lösas i rektangulär form, och som ett exempel tar vi ekvationen

$$(*) \quad z^2 + (1 - i)z + (6 + 2i) = 0.$$

Precis som i det reella fallet börjar vi med en kvadratkomplettering:

$$z^2 + (1 - i)z + (6 + 2i) = \left(z + \frac{1 - i}{2}\right)^2 - \left(\frac{1 - i}{2}\right)^2 + (6 + 2i) = \left(z + \frac{1 - i}{2}\right)^2 + 6 + \frac{5i}{2}.$$

Om vi sätter $w = u + iv = z + (1 - i)/2$, med $u, v \in \mathbb{R}$, får vi därför att

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad w^2 = -6 - \frac{5i}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -6 & (\operatorname{Re}), \text{ realdelar,} \\ 2uv = -5/2 & (\operatorname{Im}), \text{ imaginärdelar.} \end{cases}$$

Ekvation (Im) kan skrivas $v = -5/(4u)$, och detta insatt i (Re) ger att $u^4 + 6u^2 - 25/16 = 0$, som är en reell andragradsekvation i variabeln $t = u^2$. Eftersom $u \in \mathbb{R} \Rightarrow t \geq 0$ får vi den enda roten $t = 1/4$ (roten $t = -25/4$ förkastas), och därmed att $u^2 = 1/4$, d.v.s. att $u = \pm 1/2$. Detta insatt i (Im) ger nu att $v = \mp 5/2$ och de två lösningarna $w = \pm(1/2 - 5i/2)$. Att $z = w - (1 - i)/2$ ger oss slutligen rötterna

$$z_1 = -2i \quad \text{och} \quad z_2 = -1 + 3i$$

till vår ursprungliga ekvation.

Genom att, vid sidan av ekvationerna (Re) och (Im) ovan, också använda oss av ekvationen för absolutbeloppet, $|w|^2 = |w^2| = |-6 - 5i/2|$, d.v.s. $u^2 + v^2 = 13/2$ (Abs), kan vi förkorta räkningarna något: (Abs) kombinerad med (Re) ger genast att $u^2 = 1/4$ och $v^2 = 25/4$, och (Im) ger sedan att u och v har olika tecken, varför $u = \pm 1/2$ och $v = \mp 5/2$. $\blacktriangle$

För konjugering gäller också räknereglererna

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad \text{och} \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,$$

och för belopp

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad \text{och} \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

och även $|z^n| = |z|^n$ när $n \in \mathbb{Z}$ (som vi använde redan i Exempel 1.1, med $n = 2$). För $|z_1 + z_2|$ finns det inget motsvarande enkelt samband, utan i stället måste man nöja sig med triangelolikheterna:

1.2. Proposition (Triangelolikheterna). För komplexa tal z_1 och z_2 gäller

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (\text{triangelolikheten}),$$

med likhet om och endast om z_1 och z_2 , som vektorer, är parallella och *lika* riktade, samt

$$|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2|| \quad (\text{omvända triangelolikheten}),$$

med likhet om och endast om z_1 och z_2 , som vektorer, är parallella och *motsatt* riktade.

Bevis. Vi ser först att båda olikheterna trivialt gäller med likhet om $z_1 = 0$ eller $z_2 = 0$, och vi kan därför anta att $z_1 \neq 0$ och $z_2 \neq 0$.

Vi skriver om $|z_1 + z_2|^2$, steg för steg, med hjälp av samband för konjugat och belopp:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2} + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1 \bar{z}_2| + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2|z_1| |z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2, \end{aligned}$$

där den enda olikheten ovan beror på att $\operatorname{Re} w = u \leq \sqrt{u^2 + v^2} = |w|$ om $w = u + iv$, där $u, v \in \mathbb{R}$, och likhet råder precis då $v = 0$ och $u \geq 0$. Eftersom $|z_1 + z_2| \geq 0$ och $|z_1| + |z_2| \geq 0$ är triangelolikheten $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ därmed bevisad.

I själva verket är $w = z_1 \bar{z}_2 \neq 0$ i föregående stycke, så likhet i triangelolikheten råder därför precis då $w = u > 0$, d.v.s. precis då $z_1 = u/\bar{z}_2 = u z_2 / |z_2|^2 = t z_2$ där $t = u/|z_2|^2 > 0$, d.v.s. precis då z_1 och z_2 , som vektorer, är parallella och lika riktade.

För att bevisa den omvända triangelolikheten antar vi dessutom att $|z_1| \geq |z_2|$; i annat fall kan vi byta roller på z_1 och z_2 eftersom inget led i omvända triangelolikheten påverkas av det. Triangelolikheten som vi just bevisat medför att

$$|z_1| = |(z_1 + z_2) + (-z_2)| \leq |(z_1 + z_2)| + |(-z_2)| = |z_1 + z_2| + |z_2|,$$

d.v.s., eftersom $|z_1| \geq |z_2|$, att

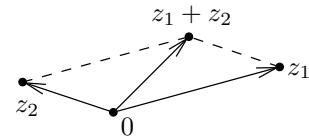
$$|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2| = ||z_1| - |z_2||,$$

med likhet precis då $z_1 + z_2 = t(-z_2)$ för något $t \geq 0$, d.v.s. precis då $z_1 = -(1+t)z_2$, d.v.s. precis då z_1 och z_2 , som vektorer, är parallella och motsatt riktade. ■

Följande generalisering av triangelolikheten följer genast (t.ex. med s.k. induktion över n):

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|,$$

och likhet råder om och endast om $z_1, z_2, \dots, z_n$, som vektorer, är parallella och lika riktade.



För den omvända triangelolikheten finns det däremot ingen generalisering till fler än två termer eftersom redan olikheten $|z_1 + z_2 + z_3| \geq ||z_1| - |z_2| - |z_3||$ *inte* behöver vara sann (tag t.ex. $z_1 = 2$ och $z_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}$; då blir vänsterledet 0 medan högerledet blir 2). Vad som däremot *är* sant, och som följer av den vanliga triangelolikheten, är olikheten

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \geq |z_1| - |z_2| - \dots - |z_n|,$$

men här kan högerledet vara negativt och i så fall är naturligtvis olikheten trivial; denna senare olikhet är dock användbar när en term (här: z_1) dominerar över övriga termer.

1.3. Exempel. Om $|z| = 3$ ger triangelolikheten att

$$|z + 2i| \leq |z| + |2i| = 3 + 2 = 5,$$

med likhet $\Leftrightarrow z$ och $2i$ är parallella och lika riktade (och $|z| = 3$, förstås) $\Leftrightarrow z = 3i$.

Om $|z| = 3$ ger omvända triangelolikheten att

$$|2z - 2| \geq ||2z| - |-2|| = |2|z| - 2| = |6 - 2| = 4,$$

med likhet $\Leftrightarrow 2z$ och -2 är parallella och motsatt riktade (och $|z| = 3$) $\Leftrightarrow z = 3$.

Av ovanstående får vi också olikheten

$$\left| \frac{z + 2i}{2z - 2} \right| = \frac{|z + 2i|}{|2z - 2|} \leq \frac{5}{4}, \quad |z| = 3,$$

eftersom beloppet av täljaren är högst 5 och beloppet av nämnaren är minst 4. Vi kan dock *inte* få likhet i denna olikhet för något z eftersom det skulle kräva att $z = 3i$ och $z = 3$ samtidigt. $\blacktriangle$

1.4. Exempel. Vi ska beskriva mängden av alla $z \in \mathbb{C}$ sådana att $|z - 2i| \leq 2|z + 1|$. Eftersom belopp är ≥ 0 får vi, med $z = x + iy$ och kvadratkomplettering,

$$\begin{aligned} |z - 2i| \leq 2|z + 1| &\Leftrightarrow |z - 2i|^2 \leq (2|z + 1|)^2 \Leftrightarrow |x + i(y - 2)|^2 \leq 4|(x + 1) + iy|^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 \leq 4(x + 1)^2 + 4y^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 8x + 3y^2 + 4y \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 \geq \frac{20}{9} \Leftrightarrow \left|z + \frac{4 + 2i}{3}\right| \geq \frac{2\sqrt{5}}{3}, \end{aligned}$$

som beskriver alla punkter på eller utanför cirkeln med centrum $(-4 - 2i)/3$ och radie $2\sqrt{5}/3$. $\blacktriangle$

Komplexa tal kan också skrivas i **polär form**:

$$z = r \cos \theta + i r \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta},$$

där $r = |z| \geq 0$ och $\theta \in \mathbb{R}$, och där man definierar

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

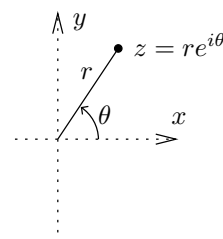
ett samband som kallas Eulers identitet. Ur den får man genast att

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}, \quad |e^{i\theta}| = 1, \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{och} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i},$$

där de två sista sambanden kallas Eulers formler. Räknereglerna

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1 - \theta_2)}, \quad \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \quad \text{och} \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

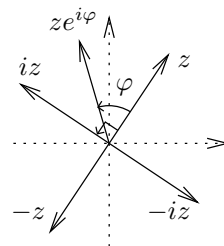
visas från definitionen av $e^{i\theta}$ och additionsformlerna för cosinus och sinus. Det sista sambandet, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, kallas de Moivres formel, och det är här viktigt att n är ett heltal, se Avsnitt 2.3.



Multiplikation av två komplexa tal kan enkelt beskrivas i polär form: Om $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ och $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ blir

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2) e^{i(\theta_1 + \theta_2)},$$

så talens belopp multipliceras medan deras vinklar adderas. Talet $ze^{i\varphi}$ kan alltså fås genom att vrida z vinkeln φ i positiv led, och eftersom $i = e^{i\pi/2}$ fås speciellt iz genom att vrida z vinkeln $\pi/2$ moturs, se figuren intill.



Om $z \neq 0$ definierar vi **argumenten** för z , $\arg z$, som alla de vinklar θ som duger i den polära framställningen $z = re^{i\theta}$. Om θ_0 är en sådan vinkel är alltså

$$\arg z = \theta_0 + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z},$$

och varje sådant värde kallas för ett argument för z ; notera att vi inte definierar $\arg 0$. Med **principalargumentet** $\text{Arg } z$ menas det argument θ för z som är sådant att

$$-\pi < \text{Arg } z \leq \pi.$$

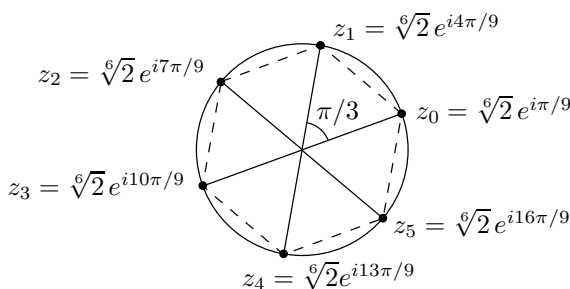
1.5. Exempel (Binomisk ekvation). Ekvationer av typen $z^n = c$, där n är ett positivt heltal och $c \in \mathbb{C}$, kan alltid lösas i polär form. Som ett exempel tar vi ekvationen $z^6 = -1 + i\sqrt{3}$. Vi skriver både z och högerledet i polär form, $z = re^{i\theta}$ respektive $-1 + i\sqrt{3} = 2e^{i2\pi/3}$, och får då, med de Moivres formel, att

$$\begin{aligned} z^6 = -1 + i\sqrt{3} &\Leftrightarrow r^6 e^{i6\theta} = 2e^{i2\pi/3} \Leftrightarrow \begin{cases} r^6 = 2 & (\text{belopp}), \\ 6\theta = 2\pi/3 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} & (\text{argument}), \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[6]{2}, \\ \theta = \pi/9 + k\pi/3, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vi får således sex olika rötter,

$$z_k = \sqrt[6]{2} \exp(i\pi/9 + ik\pi/3),$$

där $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ (eller sex andra heltal i följd), och rötterna bildar hörn i en regelbunden sexhörning; nästa rot fås genom att vrida föregående rot vinkeln $\pi/3$ i positiv led.



(Att ekvationen $z^n = c$ kallas *binomisk* beror för övrigt på att den kan skrivas $z^n - c = 0$, där vänsterledet som synes är ett polynom med två termer, ett s.k. binom.) ▲

1.6. Anmärkning (*Tredje- och fjärdegradsekvationer). (Vi påminner om att avsnitt markerade med asterisk (*) inte ingår i TATA45, se förordet.) Det finns lösningsmetoder även för ekvationer av grad tre och fyra, och vi ska här kortfattat beskriva dem.

Tredjegradekvationen $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ kan med bytet $s = z + a/3$ skrivas i formen $s^3 = \alpha s + \beta$, där $\alpha = a^2/3 - b$ och $\beta = ab/3 - 2a^3/27 - c$. Om $\alpha = 0$ har vi således en binomisk ekvation i s , och den kan vi lösa. Om $\alpha \neq 0$ låter vi γ vara ett tal sådant att $\gamma^2 = \alpha/3$ och gör bytet $\zeta = s/\gamma$; då är vår ekvation ekvivalent med ekvationen $\zeta^3 = 3\zeta + \delta$, där $\delta = \beta/\gamma^3$. Det implicita bytet till w via $\zeta = w + 1/w$ ger sedan ekvationen $w^6 - \delta w^3 + 1 = 0$, som är en andragradsekvation i w^3 och som vi därmed kan lösa. Sedan får vi w ur en binomisk ekvation, och därefter ζ , s och slutligen z .

Fjärdegradsekvationen $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ kan för varje komplext tal w skrivas i formen $(z^2 + az/2 + w)^2 = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$, där $\alpha = 2w + a^2/4 - b$, $\beta = aw - c$ och $\gamma = w^2 - d$. Högerledet är en jämn kvadrat, $(Az + B)^2$, precis då $4\alpha\gamma - \beta^2 = 0$, och eftersom denna ekvation är av grad tre i w kan vi med metoderna i föregående stycke hitta en rot w till den. Sedan återstår det bara att lösa de två andragradsekvationerna $z^2 + az/2 + w = \pm(Az + B)$.

Några liknande metoder för allmänna ekvationer av grad fem och högre finns inte, vilket bevisas i den s.k. Galoisteorin. ▲

★ ÖVNINGAR – repetition Matematisk grundkurs

★ 1.1 Skriv i formen $a + ib$: (a) $(1+i)(2+i)(3+i)$ (b) $(1-2i)^4$ (c) $\frac{1+2i^5}{3-4i} + \frac{2+i^{19}}{5i}$

★ 1.2 Lös ekvationerna (a) $z + 3\bar{z} = 4 - 4i$ (b) $z - \bar{z} = 2i$ (c) $z - i\bar{z} = i$

★ 1.3 Finn rötterna till andragradsekvationen $w^2 = 3 - 4i$ genom att ansätta $w = u + iv$ och identifiera real- och imaginärdelar i ekvationen. Svara i rektangulär form.

★ 1.4 Bestäm belopp och alla argument till följande komplexa tal:

(a) $1 - i\sqrt{3}$ (b) $-1 + 2i$ (c) $\frac{1}{(1-i)^9}$ (d) $\left(\frac{i - \sqrt{3}}{2}\right)^{23}$

★ 1.5 Använd Eulers formler för att visa att $\cos \theta \sin^2 2\theta = \frac{2 \cos \theta - \cos 3\theta - \cos 5\theta}{4}$.

★ 1.6 Visa m.h.a. de Moivres formel att $\begin{cases} \cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta, \\ \sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta. \end{cases}$

★ 1.7 Bestäm rötterna till den binomiska ekvationen $z^5 = 32i$. Rita rötterna i en figur.

★ 1.8 Faktorisera $p(z) = z^4 + 4$, dels fullständigt i förstgradsfaktorer, dels i andragradsfaktorer med reella koefficienter.

★ 1.9 Bestäm rötterna till följande algebraiska ekvationer: (a) $z^2 - (1 + 2i)z + (1 - 5i) = 0$
(b) $z^6 - 16z^3 + 64 = 0$ (c) $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ (d) $z^4 + iz^3 + 2z^2 + iz + 1 = 0$

★ 1.10 Beskriv och rita följande punktmängder i det komplexa talplanet:

(a) $1 < |z - 1 + i| \leq 4$ (b) $\text{Im}(\bar{z} - i) = 2$ (c) $|z - 1| = |z + i|$
(d) $|z - i| \leq 2|z + 1|$ (e) $\text{Re}(1/z) = 2$ (f) $|z - 4i| + |z + 4i| = 10$

★ ÖVNINGAR – övriga uppgifter

★ 1.11 (a) Visa att $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 6$ och $z_3 = 4 + 4i$ utgör hörn i en halv kvadrat.
(b) Hur ser man m.h.a. Övning 1.1a att $\arctan 1 + \arctan(1/2) + \arctan(1/3) = \pi/2$?
(c) Vilken arctan-identitet kan härledas från Övning 1.1b?

★ 1.12 Visa följande likheter: (a) $z\bar{z} = |z|^2$ (b) $z + \bar{z} = 2 \text{Re } z$ (c) $z - \bar{z} = 2i \text{Im } z$
(d) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$, den s.k. *parallelogramlagen*

★ 1.13 Visa följande olikheter, och utred när likhet råder:

(a) $|\text{Re } z| \leq |z|$ (b) $|\text{Im } z| \leq |z|$ (c) $|z| \leq |\text{Re } z| + |\text{Im } z| \leq 2|z|$

★ 1.14 Visa följande olikheter för alla komplexa tal z med längd 1:

(a) $|2z^2 + 3iz + 1| \leq 6$ (b) $|z^3 + 4| \geq 3$ (c) $\left|\frac{z + 2i}{3iz - 1}\right| \leq \frac{3}{2}$ (d) $|2z^2 + 3iz + 1| < 6$

★ 1.15 Bestäm den minsta konstanten C för vilken $|\text{Re } z| + |\text{Im } z| \leq C|z|$ för alla $z \in \mathbb{C}$.

★ 1.16 Beräkna $\text{Arg} \frac{z-1}{z+1}$ för alla ickekorella z som ligger på enhetscirkeln $|z| = 1$.

★ 1.17 Beräkna absolutbelopp och principalargument för $1 + e^{i\theta}$, där $-\pi < \theta < \pi$. Rita figur!

★ 1.18 Visa att $\sum_{n=-N}^N e^{int} = \frac{\sin \frac{(2N+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}$ då $N \in \mathbb{N}$ och $e^{it} \neq 1$. (Vad blir summan om $e^{it} = 1$?)

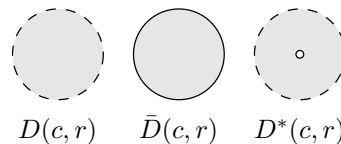
★ 1.19 Visa att $\text{Re}(\bar{z}_1 z_2) = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)$, om vi identifierar talet $z = x + iy \in \mathbb{C}$ med vektorn $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ge därefter en tolkning av $\text{Im}(\bar{z}_1 z_2)$.

1.2 Mängder och kurvor i det komplexa talplanet

Det komplexa talplanet $\mathbb{C}$ kan identifieras med $\mathbb{R}^2$ eftersom talet $z = x + iy \in \mathbb{C}$ omvärtbart entydigt svarar mot punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. De flesta av nedanstående (topologiska) begrepp bör därför vara kända sedan tidigare, se t.ex. Persson-Böiers, *Analys i flera variabler*, kapitel 1.3 (Mängder i $\mathbb{R}^n$).

Med en öppen cirkelskiva (eller helt enkelt cirkelskiva eller skiva) menas en mängd av typen

$$D(c, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - c| < r\}, \quad c \in \mathbb{C}, r > 0,$$



där c är skivans centrum och r dess radie. Ibland behöver vi också motsvarande *slutna* cirkelskiva och *punkterade* cirkelskiva:

$$\bar{D}(c, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - c| \leq r\} \quad \text{respektive} \quad D^*(c, r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - c| < r\}.$$

Låt M vara en mängd i $\mathbb{C}$. Precis som för mängder i $\mathbb{R}^2$ säger vi att en punkt $c \in \mathbb{C}$ är en **inre punkt** i M om någon skiva $D(c, r)$ ligger helt i M , medan c är en **randpunkt** till M om varje skiva $D(c, r)$ innehåller någon punkt i M och någon punkt utanför M . Speciellt måste alltså en inre punkt i M tillhöra M , medan däremot en randpunkt till M kan tillhöra M men *inte behöver* göra det. Vi betecknar mängden av randpunkter till M med ∂M , och säger att M är **öppen** om ingen enda av dess randpunkter tillhör M (d.v.s. om $\partial M \cap M = \emptyset$) och att M är **sluten** om alla dess randpunkter tillhör M (d.v.s. om $\partial M \subseteq M$); dessutom definierar vi **slutna höljet** av M , betecknat $\bar{M}$, enligt $\bar{M} = M \cup \partial M$. Vidare säger vi att M är **begränsad** om det finns något $R > 0$ sådant att $|z| \leq R$ för alla $z \in M$, och att M är **kompakt** om den både är sluten och begränsad. Följande båda begrepp kan dock vara nya för läsaren:

1.7. Definition. Låt M vara en mängd i $\mathbb{C}$. En punkt $c \in \mathbb{C}$ sägs vara

- en **hopningspunkt** till M om varje punkterad cirkelskiva $D^*(c, r)$ innehåller någon punkt i M , d.v.s. om $M \cap D^*(c, r) \neq \emptyset$ för alla $r > 0$; respektive
- en **isolerad punkt** i M om det finns någon cirkelskiva $D(c, r)$ i vilken c är den enda punkten som tillhör M , d.v.s. om $M \cap D(c, r) = \{c\}$ för något $r > 0$.

Notera att en hopningspunkt till M kan tillhöra M men *inte behöver* göra det, medan en isolerad punkt i M alltid tillhör M . Vidare följer det från definitionerna ovan att slutna höljet $\bar{M}$ består av alla hopningspunkter till M tillsammans med alla isolerade punkter i M .

1.8. Exempel (Hopningspunkt och isolerad punkt). Låt

$$M = \left\{ \frac{1}{n} : n \text{ heltal} \geq 1 \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}.$$

Då är punkten $z = 0$ hopningspunkt till M , ty till varje radie $r > 0$ finns ett heltal $n \geq 1$ sådant att $1/n < r$, och punkten $z = 1/n$ tillhör därmed både M och den punkterade skivan $D^*(0, r)$.

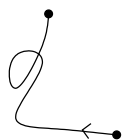
Vidare är punkten $z = 1/2$ en isolerad punkt i M , ty t.ex. cirkelskivan $D(1/2, 1/10)$ innehåller $z = 1/2$ men ingen annan punkt i M . (I själva verket är *alla* punkter i M isolerade.) ▲

En mängd $V \subseteq \mathbb{C}$ sägs vara en **omgivning** till en punkt $c \in \mathbb{C}$ om V är öppen och $c \in V$; t.ex. är $D(c, r)$ en omgivning till c . Vi talar ibland också om omgivningar till mängder M , och menar då öppna mängder V sådana att $M \subseteq V$.

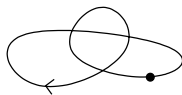
Med en (parametriserad) **kurva** i $\mathbb{C}$ menar vi en avbildning

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad t : \alpha \rightarrow \beta,$$

där $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ och där de reella funktionerna $x(t)$ och $y(t)$ är kontinuerliga på intervallet $[\alpha, \beta]$ om $\alpha \leq \beta$ och på $[\beta, \alpha]$ om $\alpha \geq \beta$; den reella variabeln t kallas parameter. Kurvan är orienterad, och börjar i $a = z(\alpha)$ och slutar i $b = z(\beta)$. Vi säger att kurvan är **sluten** om $a = b$, och att den är **enkel** om den inte nuddar sig själv förutom att start- och slutpunkterna får vara desamma.



Ej enkel; ej sluten



Ej enkel; sluten



Enkel; ej sluten



Enkel; sluten

Vi säger att kurvan är $\mathcal{C}^1$ om funktionerna $x(t)$ och $y(t)$ är $\mathcal{C}^1$, d.v.s. kontinuerligt deriverbara, och att den är **styckvis $\mathcal{C}^1$** om $x(t)$ och $y(t)$ är $\mathcal{C}^1$ utom för ändligt många värden på t . Dessutom säger vi att en enkel sluten styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva är en **kontur**. Vi ska i denna text uteslutande betrakta kurvor som är $\mathcal{C}^1$ eller styckvis $\mathcal{C}^1$.



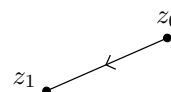
Kurvans tangent ges av $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ där denna derivata existerar och är nollskild, och dess bågelement ges av $|dz| = |dx + i dy| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \stackrel{*}{=} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = |z'(t)| dt$, där likheten $\stackrel{*}{=}$ gäller om parametern t växer, d.v.s. om $\alpha \leq \beta$. Längden av kurvan är

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} |dz| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} |z'(t)| dt \quad \text{om } \alpha \leq \beta;$$

här är $\int_{\gamma} |dz|$ ett specialfall av en s.k. båglängdsintegral (mer om detta i Avsnitt 3.2).

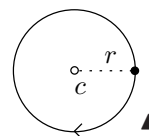
1.9. Exempel. Sträckan från z_0 till z_1 , d.v.s. linjestycket från z_0 till z_1 , betecknar vi med $[z_0, z_1]$, och den kan parametriseras med

$$z(t) = (1-t)z_0 + tz_1, \quad t: 0 \rightarrow 1.$$



Cirkeln med centrum $c \in \mathbb{C}$ och radie $r > 0$ orienterad *medurs* kan parametriseras med

$$z(t) = c + re^{it}, \quad t: 2\pi \rightarrow 0,$$



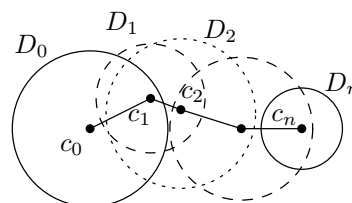
om vi låter start- och slutpunkten vara $c + r$.

1.10. Anmärkning. Precis som i reell analys betraktar vi olika (parametriserade) kurvor som samma kurva – men givna med olika parametriseringar – om de genomlöper samma punkter med samma orientering (och samma antal gånger). ▲

En mängd M sägs vara **bågvis sammanhängande** om varje par av punkter $a, b \in M$ kan förbindas med en kurva från a till b som ligger helt i M . Följande begrepp är praktiskt:

1.11. Definition (Område). Med ett område Ω menar vi en öppen och bågvis sammanhängande icke-tom mängd. (Ω kommer i fortsättningen alltid att stå för ett område.)

Vi säger att två punkter $a, b \in M$ kan förbindas med en **kedja av cirkelskivor** i M (ibland kallat cirkeltåg) om det finns ändligt många cirkelskivor $D_0, \dots, D_n$, där $D_k = D(c_k, r_k) \subseteq M$, $k = 0, \dots, n$, sådana att $c_0 = a$, $c_n = b$ och $c_k \in D_{k-1}$ för $k = 1, \dots, n$. Eftersom sträckan från c_{k-1} till c_k är helt innehållen i D_{k-1} för $k = 1, \dots, n$ ser vi att de båda punkterna a och b också kan förbindas med ett **polygontåg** i M , nämligen kurvan som består av dessa sträckor hela vägen från $c_0 = a$ till $c_n = b$.



Omvänt, om två punkter $a, b \in M$ kan förbindas med någon kurva i M är det inte säkert att de också kan förbindas med en kedja av cirkelskivor i M ; som exempel kan vi ta $M = \bar{D}(-1, 1) \cup \bar{D}(1, 1)$ och $a = -1$, $b = 1$. Om däremot M dessutom är öppen går det bra:

1.12. Hjälpsats. Låt Ω , som alltid, vara ett område. Om $a, b \in \Omega$, så kan a och b förbindas med en kedja av cirkelskivor i Ω , och därmed också med ett polygontåg i Ω .

***Bevis.** Om $\Omega = \mathbb{C}$ så är påståendet trivialt. Om $\Omega \neq \mathbb{C}$, låt $d(z) = \inf_{w \notin \Omega} |z - w|$ för $z \in \Omega$, avståndet från z till komplementet $\Omega^c = \mathbb{C} \setminus \Omega$; här står $\inf$ för infimum, se Forsling-Neymark avsnitt A.1. Eftersom Ω är öppen är $d > 0$, och man kan visa att d är kontinuerlig i Ω , se Övning 1.27. När $a, b \in \Omega$ förbinds med en kurva $z = z(t)$, $t : 0 \rightarrow 1$, i Ω , så är funktionen $t \mapsto d(z(t))$ därför kontinuerlig på $[0, 1]$, och antar därför ett minsta värde $m > 0$. Vidare är funktionen *likformigt* kontinuerlig på $[0, 1]$ (se Forsling-Neymark sats A.3), så till m finns ett tal $\delta > 0$ sådant att $|d(z(\alpha)) - d(z(\beta))| < m$ närhelst $|\alpha - \beta| < \delta$. Låt nu $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ vara en indelning av $[0, 1]$ sådan att $|t_{k-1} - t_k| < \delta$ för $k = 1, \dots, n$, och sätt $c_k = z(t_k)$ samt $D_k = D(c_k, m)$ för $k = 0, \dots, n$. Eftersom $d(c_k) \geq m$ ser vi att $D_k \subseteq \Omega$, och eftersom $|c_{k-1} - c_k| < m$ ser vi också att $c_k \in D_{k-1}$, och beviset är klart. ■

1.3 Komplexvärda funktioner av en komplex variabel

En komplexvärd funktion f av en komplex variabel är en avbildning från en delmängd D_f av $\mathbb{C}$, kallad definitionsmängd, sådan att $f(z) \in \mathbb{C}$ för varje $z \in D_f$. Värdeområdet V_f för f är alla $w \in \mathbb{C}$ sådana att $w = f(z)$ för något $z \in D_f$.

Eftersom tal $z \in \mathbb{C}$ omvärtbart entydigt svarar mot punkter $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ via real- och imaginärdelar kan vi också se en komplexvärd funktion f som en avbildning från (en delmängd av) $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ via

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$$

där $u = \operatorname{Re} f$ och $v = \operatorname{Im} f$; u och v är alltså funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$.

1.13. Exempel. Funktionen f från $\mathbb{C}$ till $\mathbb{C}$ som ges av $f(z) = iz + \bar{z}^2$ kan skrivas

$$\begin{aligned} f(z) &= iz + \bar{z}^2 = i(x + iy) + (x - iy)^2 \\ &= (x^2 - y^2 - y) + i(x - 2xy), \end{aligned}$$

och beskrivs alltså fullständigt av funktionerna $u(x, y) = x^2 - y^2 - y$ och $v(x, y) = x - 2xy$. ▲

Vi definierar gränsvärde och kontinuitet på samma sätt som i reell en- och flervariabelanalys:

1.14. Definition (Gränsvärde och kontinuitet). Om c är en hopningspunkt till D_f säger vi att f har **gränsvärde** $C \in \mathbb{C}$ då z går mot c , skrivet $\lim_{z \rightarrow c} f(z) = C$ eller $f(z) \rightarrow C$ **då** $z \rightarrow c$, om det till varje $\epsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att

$$|f(z) - C| < \epsilon \quad \text{för alla } z \in D_f \text{ sådana att } 0 < |z - c| < \delta.$$

Om $c \in D_f$ säger vi att f är **kontinuerlig** i c om det till varje $\epsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att

$$|f(z) - f(c)| < \epsilon \quad \text{för alla } z \in D_f \text{ sådana att } |z - c| < \delta.$$

Notera att $z \neq c$ i definitionen av gränsvärde medan $z = c$ ingår i definitionen av kontinuitet. Om c är en hopningspunkt till D_f och dessutom $c \in D_f$, så är f kontinuerlig i c om och endast om $\lim_{z \rightarrow c} f(z) = f(c)$. Om c är en isolerad punkt i D_f , så är f trivialt kontinuerlig i c .

Uppdelning i real- och imaginärdelar ger omedelbart följande karakteriseringar:

1.15. Proposition (Karakterisering av gränsvärde och kontinuitet). Låt $f = u + iv$, $C = A + iB$ och $c = a + ib$. Då gäller:

$$\begin{aligned} f(z) \rightarrow C \text{ då } z \rightarrow c &\iff u(x, y) \rightarrow A \text{ och } v(x, y) \rightarrow B \text{ då } (x, y) \rightarrow (a, b), \\ \text{och} & \\ f \text{ är kontinuerlig i } c &\iff u \text{ och } v \text{ är kontinuerliga i } (a, b). \end{aligned}$$

Bevis. Beviset bygger på olikheterna i Övning 1.13 på s. 5 tillämpade på uppdelningen

$$f - C = (u - A) + i(v - B).$$

Om $f \rightarrow C$ ger olikheterna $|u - A| \leq |f - C|$ och $|v - B| \leq |f - C|$ att $u \rightarrow A$ och $v \rightarrow B$. Omvänt, om $u \rightarrow A$ och $v \rightarrow B$ ger olikheten $|f - C| \leq |u - A| + |v - B|$ att $f \rightarrow C$. Resultatet om kontinuitet följer sedan direkt med $C = f(c) = u(a, b) + i v(a, b) = A + iB$. ■

En funktion φ sägs som bekant vara av **klass $\mathcal{C}^k$** , där $k \in \mathbb{N}$, om alla partiella derivator av ordning högst k är kontinuerliga, och av **klass $\mathcal{C}^\infty$** om den är av klass $\mathcal{C}^k$ för alla $k \in \mathbb{N}$.

Derivata m.a.p. z definierar vi på samma sätt som derivata m.a.p. x i reell envariabelanalys, nämligen som gränsvärdet för en differenskvot:

1.16. Definition (Derivata). Låt c vara en inre punkt i D_f . Funktionen f sägs vara (komplext) deriverbar i c om gränsvärdet

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta z) - f(c)}{\Delta z}$$

existerar som ett komplext tal. Gränsvärdet kallas då derivatan av f i c och betecknas $f'(c)$. Vid sidan av beteckningen f' finns också beteckningarna df/dz och Df .

Ovanstående definition ser oskyldig ut, men den ställer i själva verket höga krav på funktionen f . Det räcker t.ex. inte att real- och imaginärdelarna är $\mathcal{C}^1$ -funktioner:

1.17. Exempel (En snäll funktion som inte är deriverbar någonstans). Låt

$$f(z) = \bar{z} = x - iy.$$

Om vi skriver $\Delta z = re^{i\theta}$ får vi att

$$\frac{f(c + \Delta z) - f(c)}{\Delta z} = \frac{\overline{c + \Delta z} - \bar{c}}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}} = e^{-2i\theta},$$

som saknar gränsvärde då $\Delta z \rightarrow 0$, d.v.s. då $r \rightarrow 0$ och θ varierar fritt. ▲

Med tanke på hur definitionen av derivata ser ut bör följande resultat inte vara överraskande:

1.18. Proposition (Deriverbarhet medför kontinuitet). Om f är deriverbar i c , så är f kontinuerlig i c .

Bevis. c är en inre punkt i D_f och därmed också en hopningspunkt till D_f . Eftersom

$$f(c + \Delta z) - f(c) = \Delta z \cdot \frac{f(c + \Delta z) - f(c)}{\Delta z} \rightarrow 0 \cdot f'(c) = 0 \quad \text{då } \Delta z \rightarrow 0$$

är f kontinuerlig i c . (Samma bevis som i envariabelanalysen, således.) ■

Eftersom definitionen av derivata ser likadan ut som definitionen av vanlig reell derivata, och deriverbara funktioner alltså är kontinuerliga, kan vi kopiera bevisen för nedanstående räkneregler för derivata från reell envariabelanalys, se Forsling-Neymark avsnitt 4.3 (Beräkning av derivator):

1.19. Proposition (Räkneregler för derivata). Om f och g är deriverbara, så är

$$(f + g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad \text{och} \quad (f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g',$$

vilket alltså betyder att summa-, produkt-, kvot- och kedjereglererna gäller.

Från ovanstående regler, och det faktum att derivatan av z är 1, får vi att

$$\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (\text{om } n < 0 \text{ måste } z \neq 0).$$

Vi ska nu karakterisera att en funktion $f = u + iv$ är (komplext) deriverbar i en punkt $c = a + ib$ med hjälp av egenskaper hos de reella funktionerna u och v ; dessa funktioner kan vara partiellt deriverbara i (a, b) , och de kan vara differentierbara i (a, b) . Vi påminner om att en reellvärd funktion $\varphi(x, y)$ sägs vara **differentierbar** i en inre punkt (a, b) i D_φ om det finns tal $A, B \in \mathbb{R}$ sådana att

$$\frac{\varphi(a + h, b + k) - \varphi(a, b) - Ah - Bk}{\sqrt{h^2 + k^2}} \rightarrow 0 \quad \text{då } (h, k) \rightarrow (0, 0),$$

se t.ex. Persson-Böiers kapitel 2.2 (Differentierbarhet). I så fall är φ också kontinuerlig och partiellt deriverbar i (a, b) , och $\varphi'_x(a, b) = A$ och $\varphi'_y(a, b) = B$. Den geometriska tolkningen är som bekant att det finns ett väldefinierat tangentplan till funktionsytan $z = \varphi(x, y)$ i punkten $(a, b, \varphi(a, b))$; observera att z är en reell variabel just här!

1.20. Sats (Karakterisering av deriverbarhet). Låt $f = u + iv$, och låt $c = a + ib$ vara en inre punkt i D_f . Då gäller:

$$f'(c) \text{ existerar} \iff \begin{cases} u \text{ och } v \text{ är differentierbara i } (a, b) \text{ och} \\ u'_x = v'_y \text{ och } u'_y = -v'_x \text{ i denna punkt.} \end{cases}$$

Dessutom är $f' = u'_x + iv'_x = v'_y - iu'_y$ när f' existerar.

Ekvationerna

$$\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases} \quad \text{kallas } \mathbf{Cauchy-Riemanns ekvationer}$$

och är centrala i komplex analys. De säger att funktionalmatrisen för avbildningen $(x, y) \mapsto (u, v)$ har utseendet

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

och när f' existerar är, med ovanstående beteckningar, $f' = \alpha + i\beta$; jfr också Övning 1.37 och Övning 1.38.

Bevis av Sats 1.20. Att $f'(c)$ existerar är ekvivalent med att det finns ett tal $\gamma \in \mathbb{C}$ sådant att

$$\frac{f(c + \Delta z) - f(c) - \gamma \Delta z}{|\Delta z|} = \frac{\Delta z}{|\Delta z|} \cdot \left(\frac{f(c + \Delta z) - f(c)}{\Delta z} - \gamma \right) \rightarrow 0 \quad \text{då } \Delta z \rightarrow 0,$$

eftersom $\Delta z/|\Delta z|$ har belopp 1; talet γ är i så fall $f'(c)$.

Sätt $\gamma = \alpha + i\beta$ och $\Delta z = h + ik$; notera att $|\Delta z| = \sqrt{h^2 + k^2}$ och att $\gamma \Delta z = (\alpha h - \beta k) + i(\beta h + \alpha k)$. Uppdelning i real- och imaginärdelar ger att

$$\begin{aligned} \frac{f(c + \Delta z) - f(c) - \gamma \Delta z}{|\Delta z|} &= \frac{u(a + h, b + k) - u(a, b) - \alpha h - (-\beta)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &\quad + i \frac{v(a + h, b + k) - v(a, b) - \beta h - \alpha k}{\sqrt{h^2 + k^2}}. \end{aligned}$$

Antag först att $f'(c)$ existerar, och sätt $\gamma = f'(c)$. Uttrycket i vänsterledet ovan går då mot 0 då $\Delta z \rightarrow 0$, så real- och imaginärdelarna av högerledet går mot 0 då $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. Men detta betyder att u och v är differentierbara i (a, b) och att $u'_x(a, b) = \alpha$, $u'_y(a, b) = -\beta$, $v'_x(a, b) = \beta$ och $v'_y(a, b) = \alpha$, varför Cauchy-Riemanns ekvationer $u'_x = v'_y$ och $u'_y = -v'_x$ är uppfyllda i (a, b) .

Omvänt, om u och v är differentierbara i (a, b) och Cauchy-Riemanns ekvationer är uppfyllda där, sätter vi $\alpha = u'_x(a, b) = v'_y(a, b)$ och $\beta = v'_x(a, b) = -u'_y(a, b)$, och ser att real- och imaginärdelarna av högerledet ovan går mot 0 då $(h, k) \rightarrow (0, 0)$, varför vänsterledet går mot 0 då $\Delta z \rightarrow 0$. Men då existerar $f'(c)$, och $f'(c) = \gamma$.

I båda fallen är $f' = \gamma = \alpha + i\beta = u'_x + iv'_x = v'_y - iu'_y$ i punkten $c = a + ib$. ■

I praktiken är det ofta svårt att avgöra om en funktion är differentierbar, medan det däremot ofta är lätt att se att den är $\mathcal{C}^1$. Eftersom man i reell flervariabelanalys visar att

$$\varphi \in \mathcal{C}^1 \implies \varphi \text{ är differentierbar} \implies \varphi \text{ är partiellt deriverbar}$$

får vi genast följande villkor, som är lättare att använda:

1.21. Följsats (Villkor för deriverbarhet).

- **(Tillräckligt)** Om u och v är $\mathcal{C}^1$ i en omgivning till (a, b) och Cauchy-Riemanns ekvationer $u'_x = v'_y$ och $u'_y = -v'_x$ är uppfyllda i (a, b) , så existerar $f'(c)$.
- **(Nödvändigt)** Om $f'(c)$ existerar, så existerar u'_x , u'_y , v'_x och v'_y i (a, b) , och de uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer $u'_x = v'_y$ och $u'_y = -v'_x$ där.

1.22. Exempel (En funktion som är deriverbar överallt). Betrakta exponentialfunktionen

$$f(z) = e^z = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y = u + iv, \quad \text{där } u = e^x \cos y \text{ och } v = e^x \sin y.$$

Här är u och v $\mathcal{C}^1$ -funktioner, och eftersom $u'_x = e^x \cos y = v'_y$ och $u'_y = -e^x \sin y = -v'_x$ är Cauchy-Riemanns ekvationer uppfyllda överallt, så $f'(z)$ existerar för alla z . Uttrycket för derivatan får vi nu via

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z, \quad \text{så } \frac{d}{dz}(e^z) = e^z. \quad \blacktriangle$$

1.23. Exempel (En funktion som är deriverbar i en enda punkt). Låt

$$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 = u + iv, \quad \text{där } u = x^2 + y^2 \text{ och } v = 0.$$

Även här är u och v $\mathcal{C}^1$ -funktioner och därmed också differentierbara, så deriverbarhet är ekvivalent med att Cauchy-Riemanns ekvationer är uppfyllda. Eftersom $u'_x = 2x$, $u'_y = 2y$, $v'_x = 0$ och $v'_y = 0$ får vi ekvationssystemet $2x = 0$ och $2y = 0$, med enda lösningen $x = 0 = y$. Alltså existerar $f'(0) = u'_x(0, 0) + iv'_x(0, 0) = 0$, men $f'(z)$ existerar inte om $z \neq 0$. ■

1.24. Exempel (Derivata m.h.a. deriveringsregler). Deriveringsreglerna i Proposition 1.19, tillsammans med derivatorna $(z^n)' = nz^{n-1}$ och $(e^z)' = e^z$, medför nu att

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{e^{2z} + 1}{z^4 - 1} \right)^2 = 2 \cdot \frac{e^{2z} + 1}{z^4 - 1} \cdot \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{2z} + 1}{z^4 - 1} \right) = 2 \cdot \frac{e^{2z} + 1}{z^4 - 1} \cdot \frac{2e^{2z}(z^4 - 1) - (e^{2z} + 1) \cdot 4z^3}{(z^4 - 1)^2},$$

förutsatt att $z^4 - 1 \neq 0$, d.v.s. att $z \in \mathbb{C} \setminus \{1, i, -1, -i\}$. ▲

★ ÖVNINGAR

★ **1.20** Undersök gränsvärdena (a) $\lim_{z \rightarrow \pi i} (e^z + e^{-z})$ (b) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{|z|}$ (c) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{|z|^2}$

★ **1.21** Ange definitionsmängden för

$$f(z) = \frac{z^3 + i}{z^2 + 1},$$

och definiera om möjligt f i undantagspunkterna så att f blir kontinuerlig även där.

★ **1.22** Låt

$$f(z) = \begin{cases} \bar{z}^2/z, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Visa att $u'_x(0,0) = 1$, $u'_y(0,0) = 0$, $v'_x(0,0) = 0$ och $v'_y(0,0) = 1$, att Cauchy-Riemanns ekvationer därmed är uppfyllda i origo, men att $f'(0)$ ändå inte existerar.

★ **1.23** Låt $f(z) = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = u(x, y) + i v(x, y)$ i högra halvplanet $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$.

(a) Bestäm $u(x, y)$ och $v(x, y)$, samt beräkna u'_x , u'_y , v'_x och v'_y . Notera att $u, v \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ och att Cauchy-Riemanns ekvationer är uppfyllda i Ω .

(b) Visa att $f'(z) = 1/z$ för alla $z \in \Omega$.

★ **1.24** Visa att den komplexa derivatan $f'(z)$ inte existerar någonstans om $f(z)$ är

(a) $z - \bar{z}$ (b) $2x + ixy^2$ (c) $e^x e^{-iy}$

★ **1.25** Visa att Cauchy-Riemanns ekvationer är ekvivalenta med den enda ekvationen $f'_y = i f'_x$ och att denna i sin tur är ekvivalent med den enda ekvationen $v'_x + i v'_y = i(u'_x + i u'_y)$.

★ **1.26** Att en funktion $f(z)$ är deriverbar i komplex mening i Ω , där $0 \notin \Omega$, kan också uttryckas i polära koordinater $z = re^{i\theta}$. Vi betraktar alltså variabelbytet $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, på samma sätt som i flervariabelanalysen. Visa följande:

$$(a) \begin{cases} u'_r = u'_x \cos \theta + u'_y \sin \theta, \\ u'_\theta = -u'_x r \sin \theta + u'_y r \cos \theta, \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} u'_x = u'_r \cos \theta - u'_\theta \frac{\sin \theta}{r}, \\ u'_y = u'_r \sin \theta + u'_\theta \frac{\cos \theta}{r}, \end{cases} \quad \text{om } u \in \mathcal{C}^1(\Omega).$$

(b) Cauchy-Riemanns ekvationer för $f = u + iv$, alltså $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$, motsvaras i polära koordinater av

$$u'_r = \frac{v'_\theta}{r}, \quad v'_r = -\frac{u'_\theta}{r}.$$

(c) Om $f = u + iv$ är deriverbar i $z \in \Omega$, så är

$$f'(z) = u'_x + i v'_x = v'_y - i u'_y = (u'_r + i v'_r) e^{-i\theta} = (v'_\theta - i u'_\theta) \frac{e^{-i\theta}}{r}.$$

(d) Använd ovanstående på $f = u + iv = \ln r + i\theta$. Slutsats? (Jfr Övning 1.23.)

★ **1.27** Låt d vara funktionen som definierades i beviset av Hjälpssats 1.12. Visa att d är (likformigt) kontinuerlig i Ω genom att bevisa olikheten

$$|d(z_1) - d(z_2)| \leq |z_1 - z_2|, \quad z_1, z_2 \in \Omega.$$

Ledning: Fixera $z_1, z_2 \in \Omega$. Visa att $d(z_1) \leq |z_1 - z_2| + |z_2 - w|$ för varje $w \notin \Omega$, och sedan m.h.a. detta att $d(z_2) \geq d(z_1) - |z_1 - z_2|$. Knyt därefter ihop säcken.

1.4 Analytiska och harmoniska funktioner

Vi påminner om att Ω står för ett område, alltså en öppen och bågvis sammanhängande mängd.

1.25. Definition (Analytisk funktion). En funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sägs vara **analytisk i Ω** , skrivet $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, om $f'(z)$ existerar för alla $z \in \Omega$. Om speciellt $\Omega = \mathbb{C}$ säger vi att f är **hel** eller **hel analytisk**.

Vidare säger vi att **f är analytisk i z_0** om f är analytisk i någon omgivning till z_0 .

1.26. Exempel. Vi återvänder till Exempel 1.17, 1.22 och 1.23 i föregående avsnitt.

I Exempel 1.17, där $f(z) = \bar{z}$, såg vi att f inte är deriverbar någonstans, och därför är f inte heller analytisk någonstans.

I Exempel 1.22 däremot, där $f(z) = e^z$, såg vi att $f'(z) = e^z$ för alla $z \in \mathbb{C}$, så $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$; f är alltså en hel funktion.

I Exempel 1.23, slutligen, där $f(z) = |z|^2$, såg vi att f är deriverbar i en enda punkt, nämligen i 0, men eftersom den inte är deriverbar i någon omgivning till 0 är den inte analytisk ens i 0; f är alltså inte analytisk någonstans. Jfr Övning 1.28. ▲

1.27. Proposition. Om $f'(z) = 0$ för alla $z \in \Omega$, så är f konstant i Ω .

Bevis. Eftersom $0 = f'(z) = u'_x + iv'_x = v'_y - iu'_y$ får vi genast att $\nabla u = \mathbf{0} = \nabla v$ i hela Ω . Speciellt är u och v $\mathcal{C}^1$ -funktioner, och riktningsderivatorna av u och v i varje punkt och i varje riktning är noll, så u och v , och därmed även f , är konstanta längs varje sträcka i Ω .

Tag en punkt $a \in \Omega$, och sätt $C = f(a)$. Om b är en annan punkt i Ω kan vi, enligt Hjälpssats 1.12, förbinda a och b med ett polygontåg, och eftersom f enligt ovan är konstant längs varje delsträcka i polygontåget är också $f(b) = C$; f är alltså konstant i Ω . ■

1.28. Följsats. Om $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ och $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ eller $|f|$ är konstant, så är f konstant.

Bevis. Vi visar att $f' = 0$ i de två första fallen; påståendena där följer sedan av Proposition 1.27.

1. Om $u = \operatorname{Re} f = A$, konstant, så är $f' = u'_x + iv'_x = u'_x - iu'_y = 0$ i Ω .
2. Om $v = \operatorname{Im} f = B$, konstant, får vi analogt att $f' = u'_x + iv'_x = v'_y + iv'_x = 0$.
3. Om $|f| = 0$, konstant, så är trivialt $f = 0$, konstant, och om $|f| = A > 0$, konstant, ger identiteten $|f|^2 = f\bar{f}$ att även $\bar{f} = A^2/f \in \mathcal{A}(\Omega)$. Men eftersom $u = (f + \bar{f})/2$ är u i så fall analytisk och reellvärd, och har speciellt konstant imaginärdel (0), så u är konstant enligt fall 2, varför även f är konstant enligt fall 1. ■

Vi ska redan i detta avsnitt utnyttja följande två resultat, som bevisas senare i denna text:

- **(Regularitet)** $f \in \mathcal{A}(\Omega) \Rightarrow f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ (d.v.s. $u, v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$), se Avsnitt 3.5.
- **(Entydighet)** $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ och $f = g$ på realaxeln $\Rightarrow f = g$ i hela planet, se Sats 4.44.

1.29. Anmärkning. Ovanstående båda resultat är häpnadsväckande starka. Resultatet om regularitet säger att om bara förstaderivatan $f'(z)$ existerar för alla z i ett område Ω , så har f kontinuerliga (partiella) derivator av *alla* ordningar i Ω . I reell analys behöver som bekant det faktum att $f'(x)$ existerar för alla x i ett intervall inte ens betyda att f' är en kontinuerlig funktion där. Som ett enkelt exempel kan vi ta

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \implies f'(x) = \begin{cases} 1 + 2x \sin(1/x) - \cos(1/x), & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$$

här är f' definierad i hela $\mathbb{R}$ men inte kontinuerlig i 0. Resultatet om entydighet är inte mindre märkligt: En hel funktion bestäms fullständigt, i hela planet, av hur den ser ut på realaxeln!

Att analytiska funktioner kan vara så mycket snällare och samtidigt rigidare än vanliga deriverbara funktioner av en reell variabel kommer sig av att det krävs betydligt mer för att $\lim_{z \rightarrow c}$ ska existera än att $\lim_{x \rightarrow a}$ ska göra det; jämför gränsvärden i två reella variabler med gränsvärden i en reell variabel. ▲

1.30. Proposition (Geometrisk tolkning av Cauchy-Riemanns ekvationer). Om $f = u + iv$ är analytisk i $c = a + ib$, så är

$$\nabla u \cdot \nabla v = 0$$

i denna punkt. Om dessutom $f'(c) \neq 0$, så skär nivåkurvorna till u och v varandra vinkelrätt i punkten (a, b) .

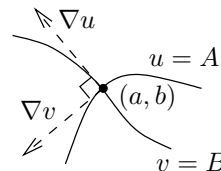
Bevis. Cauchy-Riemanns ekvationer medför direkt att

$$\nabla u \cdot \nabla v = u'_x v'_x + u'_y v'_y = u'_x (-u'_y) + u'_y u'_x = 0.$$

Antag nu att $f'(c) \neq 0$. Sätt $A = u(a, b)$ och $B = v(a, b)$. Eftersom, som i beviset av Följdsats 1.28,

$$f'(c) = u'_x(a, b) - i u'_y(a, b) = v'_y(a, b) + i v'_x(a, b)$$

får vi genast att $\nabla u(a, b) \neq \mathbf{0}$ och $\nabla v(a, b) \neq \mathbf{0}$, så ∇u och ∇v är normalvektorer till nivåkurvorna $u(x, y) = A$ respektive $v(x, y) = B$ i (a, b) . Eftersom $\nabla u \cdot \nabla v = 0$ är därför normalvektorerna, och därmed nivåkurvorna, vinkelräta i (a, b) .

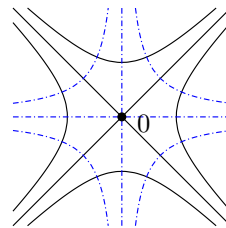


(I själva verket är följande starkare påstående sant: ∇u övergår i ∇v vid vridning vinkeln $\pi/2$ i positiv led, och speciellt är $|\nabla u| = |\nabla v|$; detta illustreras i figuren ovan. Jfr Övning 1.25.) ■

1.31. Exempel (Nivåkurvor till $w = z^2$). I figuren till höger visas nivåkurvorna $u = -1, 0, 1$ (heldragna) och $v = -1, 0, 1$ (med streck och prickar) när

$$w = f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i2xy = u + iv,$$

och vi ser att nivåkurvorna till u och v skär varandra vinkelrätt utom i origo; notera att $f'(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$. ▲



En klass av funktioner som är av stort intresse både i matematik och i tillämpningar är de s.k. harmoniska funktionerna, som vi nu definierar:

1.32. Definition (Harmonisk funktion). En funktion $h \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, reell- eller komplexvärd, sägs vara harmonisk i Ω om

$$\Delta h := h''_{xx} + h''_{yy} = 0.$$

Många fysikaliska storheter är harmoniska, t.ex. temperaturen T vid stationär temperaturfördelning, den elektrostatiske potentialen V och strömningspotentialen ψ vid en viss sorts strömning vars nivåkurvor beskriver strömlinerna. Kopplingen till analytiska funktioner är följande:

1.33. Sats. Om f är analytisk i Ω , så är $\operatorname{Re} f$ och $\operatorname{Im} f$ harmoniska i Ω .

Bevis. Eftersom $u \in \mathcal{C}^2$ ger Cauchy-Riemanns ekvationer (* nedan) och satsen om blandade derivator i reell flervariabelanalys (**) att

$$u''_{xx} = (u'_x)'_x \stackrel{*}{=} (v'_y)'_x \stackrel{**}{=} (v'_x)'_y \stackrel{*}{=} (-u'_y)'_y = -u''_{yy},$$

så $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = 0$; helt analogt visas att också $\Delta v = 0$. ■

1.34. Anmärkning. Att en reell funktion u (eller v) är harmonisk i Ω behöver däremot inte nödvändigtvis medföra att det finns någon funktion $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ som har den som realdel (respektive imaginärdel). Ett exempel på detta är

$$u = \ln(x^2 + y^2)$$

i det punkterade planet $\Omega = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Om $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ har u som realdel, så är nämligen

$$f' = u'_x - iu'_y = \frac{2x}{x^2 + y^2} - i \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{2\bar{z}}{|z|^2} = \frac{2}{z},$$

och att detta inte går i $\mathbb{C}^*$ visas kanske enklast med resonemanget i Anmärkning 3.11 på s. 43.

Om däremot Ω är ett *enkelt sammanhängande* område (begreppet definieras i Anmärkning 3.31 på s. 54) kan man visa att varje harmonisk u i Ω är realdel av en analytisk funktion f . Om $\Omega = \mathbb{C}$ kan man t.o.m. konstruera f från u m.h.a. en enkel integralformel, se Övning 1.39. ▲

I Avsnitt 7.1 ska vi studera harmoniska funktioner i samband med s.k. konforma avbildningar. I detta avsnitt nöjer vi oss i princip med att konstruera hela analytiska funktioner med givna real- eller imaginärdelar.

1.35. Exempel. Vi ska bestämma alla hela funktioner f med imaginärdel

$$v = \operatorname{Im} f = 2 + x - x^2 + y^2 + e^{-x} \sin y.$$

Eftersom $\Delta v = v''_{xx} + v''_{yy} = (-2 + e^{-x} \sin y) + (2 - e^{-x} \sin y) = 0$ överallt är det *nödvändiga* villkoret för existens av f uppfyllt.

Vi söker realdelen u av f . Om den finns så uppfyller den Cauchy-Riemanns ekvationer:

$$\begin{cases} u'_x = v'_y = 2y + e^{-x} \cos y & (1) \\ u'_y = -v'_x = -1 + 2x + e^{-x} \sin y & (2) \end{cases}$$

Vi integrerar nu *en* av dessa ekvationer, t.ex. ekvation (1), och då m.a.p. x . Vi får att

$$u = 2xy - e^{-x} \cos y + \varphi(y),$$

där φ är en reellvärd funktion av en reell variabel. Derivering m.a.p. y och jämförelse med ekvation (2) ger sedan att

$$u'_y = 2x + e^{-x} \sin y + \varphi'(y) = -1 + 2x + e^{-x} \sin y,$$

d.v.s. att $\varphi'(y) = -1$, så $\varphi(y) = -y + A$, där A är en reell konstant, så $u = 2xy - e^{-x} \cos y - y + A$, och

$$f = u + iv = (2xy - e^{-x} \cos y - y + A) + i(2 + x - x^2 + y^2 + e^{-x} \sin y).$$

Eftersom u och v är $\mathcal{C}^1$ och uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer i hela planet är f verkligen en hel funktion, och den har naturligtvis rätt imaginärdel. På realaxeln, där $y = 0$, får vi att

$$f(x) = (-e^{-x} + A) + i(2 + x - x^2), \quad x \in \mathbb{R},$$

och om vi sätter $g(z) = (-e^{-z} + A) + i(2 + z - z^2)$ för $z \in \mathbb{C}$ ser vi att även g är hel, och eftersom $f(x) = g(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$ ger resultatet om entydighet ovan att $f(z) = g(z)$ för alla $z \in \mathbb{C}$, så

$$f(z) = 2i + iz - iz^2 - e^{-z} + A, \quad z \in \mathbb{C},$$

där A är en reell konstant. ▲

1.36. Exempel. Det finns ingen analytisk funktion f , i något enda område Ω , med realdel

$$u = \operatorname{Re} f = x^3 + y$$

eftersom $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = 6x$, och ekvationen $\Delta u = 0$ är uppfylld endast då $x = 0$, alltså endast på imaginäraxeln, och därmed inte i någon enda öppen (icketom) mängd. ▲

1.37. Exempel. Vi undersöker vilka hela funktioner $f = u + iv$ som har realdel u som uppfyller ekvationen

$$u'_x = 2xy.$$

Integration av denna ekvation ger att $u = x^2y + \varphi(y)$, och Cauchy-Riemanns ekvationer säger nu att

$$\begin{cases} u'_x = 2xy = v'_y & (1) \\ u'_y = x^2 + \varphi'(y) = -v'_x & (2) \end{cases}$$

Integration av (1) ger att $v = xy^2 + \psi(x)$, och derivering m.a.p. x och insättning i (2) ger sedan att

$$x^2 + \varphi'(y) = -y^2 - \psi'(x) \quad \Leftrightarrow \quad \psi'(x) + x^2 = -\varphi'(y) - y^2.$$

I den högra ekvationen beror vänsterledet endast på x och högerledet endast på y , och därför är båda led en och samma konstant $A \in \mathbb{R}$. Integration av $\psi'(x) + x^2 = A$ och $-\varphi'(y) - y^2 = A$ ger att $\psi(x) = -x^3/3 + Ax + B_1$ respektive $\varphi(y) = -y^3/3 - Ay + B_2$, där $B_1, B_2 \in \mathbb{R}$, varför

$$f = u + iv = \left(x^2y - \frac{y^3}{3} - Ay + B_2\right) + i\left(xy^2 - \frac{x^3}{3} + Ax + B_1\right),$$

som alltså är analytisk. På realaxeln är $f(x) = B_2 + i(-x^3/3 + Ax + B_1)$, som är värdena på realaxeln av den hela funktionen $g(z) = B_2 + i(-z^3/3 + Az + B_1)$, så med $C = B_2 + iB_1$ blir

$$f(z) = iAz - \frac{iz^3}{3} + C, \quad A \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{C},$$

p.g.a. entydighetsresultatet, och vi är klara. ▲

1.38. Anmärkning. I Exempel 1.37 kan man i stället i ett tidigt skede utnyttja att u måste vara harmonisk. Att $u = x^2y + \varphi(y)$ medför därför att $0 = \Delta u = 2y + \varphi''(y)$, så $\varphi''(y) = -2y$, som integrerad två gånger ger att $\varphi(y) = -y^3/3 - Ay + B_2$ (med samma bokstäver som i exemplet). Cauchy-Riemanns ekvationer (1) och (2) säger att $v = xy^2 + \psi(x)$ och $\psi'(x) = -x^2 + A$, så $\psi(x) = -x^3/3 + Ax + B_1$, och när nu $\varphi(y)$ och $\psi(x)$ är bestämda avslutar man resonemanget som i exemplet. ▲

★ ÖVNINGAR

- ★ 1.28 Låt $f(x + iy) = x^2 + iy^2$. Var är f (a) deriverbar? (b) analytisk?
- ★ 1.29 Kontrollera att funktionen $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2xy$ är harmonisk i hela $\mathbb{R}^2$. Bestäm därefter samtliga hela analytiska funktioner $f(z)$ för vilka $\operatorname{Re} f = u$.
- ★ 1.30 Bestäm alla hela funktioner $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, där u endast beror på x .
- ★ 1.31 Bestäm alla funktioner $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ som är analytiska i hela $\mathbb{C}$ och för vilka
(a) $v = 1 - x - 2xy$ (b) $u = x + y^2$ (c) $u'_y = 3x^2 - 3y^2$ (d) $u = e^x(x \cos y - y \sin y)$
- ★ 1.32 Bestäm konstanten a så att $v(x, y) = y^2 + a(x - 1)^2$ är imaginärdel av en hel analytisk funktion f med $\operatorname{Re} f(0) = -1$. Bestäm också $f(z)$.
- ★ 1.33 Funktionen $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ är analytisk för alla $z = x + iy$, och dessutom gäller identiteten $u(x, y) - 2v(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 6xy$ och $f(0) = 0$. Bestäm $f(z)$.
- ★ 1.34 (a) Visa att $\Delta(uv) = u\Delta v + v\Delta u + 2\nabla u \cdot \nabla v$ för alla $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega)$.
(b) Låt $f = u + iv \in \mathcal{A}(\Omega)$. Visa att uv är harmonisk i Ω m.h.a. (a) och Proposition 1.30.
(c) Lös (b) på ett helt annat sätt!
- ★ 1.35 Antag att f är analytisk i Ω och att $f(z) \neq 0$ då $z \in \Omega$. Visa att $\ln |f|$ är harmonisk i Ω .
- ★ 1.36 För vilka reella funktioner u och v är både $f = u + iv$ och $\bar{f} = u - iv$ hela?
- ★ 1.37 (Inversa funktionssatsen för analytiska funktioner) Antag att $f = u + iv$ är analytisk (och därmed också $\mathcal{C}^1$) i en omgivning till $c = a + ib$. Vi kan betrakta f som en avbildning $(x, y) \mapsto (u, v)$ från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$. Visa följande:

- (a) Funktionaldeterminanten för avbildningen $f : (x, y) \mapsto (u, v)$ ges av

$$\frac{d(u, v)}{d(x, y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = |f'|^2.$$

- (b) Om $f'(c) \neq 0$, så existerar en lokal $\mathcal{C}^1$ -invers $g : (u, v) \mapsto (x, y)$ till f mellan omgivningar till $f(c)$ och c . Ledning: Inversa funktionssatsen från flervariabelanalysen.
- (c) g betraktad som komplex funktion är analytisk, och $g'(f(z)) = 1/f'(z)$ i en omgivning till c . Ledning: Cauchy-Riemanns ekvationer för g ; kedjeregeln.
- ★ 1.38 Om $f'(z_0) \neq 0$, visa att funktionalmatrisen för avbildningen $(x, y) \mapsto (u, v)$ i punkten (x_0, y_0) kan skrivas

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = |f'(z_0)| \begin{pmatrix} \cos \psi_0 & -\sin \psi_0 \\ \sin \psi_0 & \cos \psi_0 \end{pmatrix},$$

där ψ_0 är ett argument för $f'(z_0)$, och därmed att den, som (matris för en) linjär avbildning från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$, är en vridning med vinkeln ψ_0 moturs följt av en skalning med faktorn $|f'(z_0)|$. (Detta utgör ett alternativt bevis för att f är *konform* i z_0 , jfr Avsnitt 7.1.)

- ★ 1.39 Låt u vara harmonisk i hela $\mathbb{R}^2$, och sätt

$$v(x, y) = \int_0^y u'_x(x, t) dt - \int_0^x u'_y(t, 0) dt.$$

Visa att $f := u + iv$ är hel analytisk.

★ 1.40 Antag att u och v är differentierbara, och sätt som vanligt $f = u + iv$. Inför beteckningarna

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \text{och} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Visa följande:

- (a) f är komplext deriverbar $\Leftrightarrow \partial f / \partial \bar{z} = 0$, och i så fall är $f' = \partial f / \partial z$.
- (b) $\partial \bar{f} / \partial z = \overline{\partial f / \partial \bar{z}}$ och $\partial \bar{f} / \partial \bar{z} = \overline{\partial f / \partial z}$.
- (c) Funktionaldeterminanten för avbildningen $(x, y) \mapsto (u, v)$ kan skrivas

$$\frac{d(u, v)}{d(x, y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2.$$

- (d) Om $z(t)$ är en deriverbar kurva i z -planet, sätt $w(t) = f(z(t))$, som då blir en deriverbar kurva i w -planet. Visa att

$$w'(t) = \frac{\partial f}{\partial z}(z(t)) \cdot z'(t) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z(t)) \cdot \overline{z'(t)}.$$

★ 1.41 Låt u , v och f vara som i Övning 1.40 och antag dessutom att

$$\frac{d(u, v)}{d(x, y)} \neq 0 \quad \text{i en punkt } z_0.$$

Antag vidare att $z(t)$ är en kurva med $z(0) = z_0$ och $z'(0) = e^{i\alpha}$ (enhetstangentvektor). Sätt $w(t) = f(z(t))$, och skriv $w'(0) = s(\alpha)e^{i\beta(\alpha)}$ (polär form). Visa följande:

- (a) $(\partial f / \partial z)(z_0)$ och $(\partial f / \partial \bar{z})(z_0)$ kan inte vara noll samtidigt.
- (b) $w'(0) \neq 0$ och

$$\frac{w'(0)}{z'(0)} = s(\alpha)e^{i(\beta(\alpha)-\alpha)} = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \cdot e^{-i2\alpha}.$$

Notera att tangentvektorn i w -planet pekar i riktning $e^{i\beta(\alpha)}$ när tangentvektorn i z -planet pekar i riktning $e^{i\alpha}$.

- (c) $e^{i(\beta(\alpha)-\alpha)}$ är oberoende av $\alpha \Leftrightarrow (\partial f / \partial \bar{z})(z_0) = 0$, och då är $f'(z_0) \neq 0$.

Alltså vrids varje tangentvektor lika mycket och åt samma håll under avbildningen $w = f(z)$ i punkten z_0 precis då f är komplext deriverbar i z_0 och $f'(z_0) \neq 0$; man säger att f är *konform* i z_0 , se Avsnitt 7.1.

- (d) $s(\alpha)$ är oberoende av $\alpha \Leftrightarrow$ antingen $(\partial f / \partial \bar{z})(z_0) = 0$ eller $(\partial f / \partial z)(z_0) = 0$.

Alltså är skalfaktorn densamma i alla riktningar i z_0 precis då antingen f eller $\bar{f}$ är konform i z_0 ; skalfaktorn är då $|f'(z_0)|$ respektive $|(\bar{f})'(z_0)|$.

2 Elementära funktioner

I reell analys brukar man kalla funktionerna

$$e^x, \ln x, x^\alpha \text{ där } \alpha \in \mathbb{R}, \sin x, \cos x, \tan x, \arcsin x, \arccos x, \arctan x$$

för **elementära funktioner**. Vi ska i detta kapitel se att e^x , $\sin x$, $\cos x$ och $\tan x$ lätt kan utvidgas till analytiska funktioner som är definierade i hela $\mathbb{C}$ (förutom i punkterna $\pi/2 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, för tangens) och att det även finns analytiska utvidgningar av $\ln x$ och x^α , men att man då måste vara försiktig och undanta hela kurvor i $\mathbb{C}$ från definitionsmängden om exponenten $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Analytiska utvidgningar av arcusfunktionerna finns också (se Kapitel 8), och de behandlas i detalj i fortsättnings- och fördjupningskursen TATA78 Komplex analys fk.

2.1 Exponentialfunktionen

Den komplexa exponentialfunktionen definieras av att

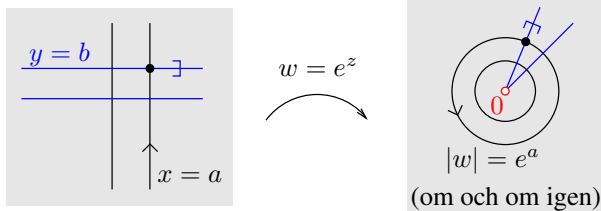
$$\exp z = e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x e^{iy}.$$

Eftersom $e^x > 0$ och $|e^{iy}| = 1$ för alla reella x och y ser vi att sambandet $e^z = e^x e^{iy}$ helt enkelt är talet e^z skrivet i polär form, varför

$$|e^z| = e^x > 0 \quad \text{och} \quad \arg e^z = y + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z};$$

speciellt ser vi att exponentialfunktionen har definitionsmängd $\mathbb{C}$ och värdemängd $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

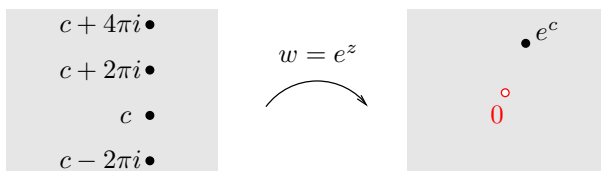
Som avbildning från z -planet till w -planet betraktad tar $w = e^z$ linjen $x = a$ på cirkeln $|w| = e^a$, oändligt många varv, och linjen $y = b$ på strålen $w = \rho e^{ib}$, $\rho > 0$. Notera speciellt att den komplexa exponentialfunktionen inte är injektiv; i själva verket är den periodisk med perioden $2\pi i$:



$$e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_1 = z_2 + 2n\pi i, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Detta följer direkt av att två komplexa tal skrivna i polär form är lika precis då beloppen är lika ($e^{x_1} = e^{x_2}$, vilket är ekvivalent med att $x_1 = x_2$ eftersom den *reella* exponentialfunktionen är injektiv) och vinklarna får skilja sig åt med hela varv ($y_1 = y_2 + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$).

Talet c är således inte det enda tal som avbildas på e^c , utan alla tal som avbildas på e^c är $c + 2n\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$, alltså talen $\dots, c - 4\pi i, c - 2\pi i, c, c + 2\pi i, c + 4\pi i, \dots$



Från definitionen av e^z och egenskaper hos den reella exponentialfunktionen e^x , $x \in \mathbb{R}$, och hos $e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$ (se s. 3), härleder man räknereglerna

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \quad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}, \quad \frac{1}{e^z} = e^{-z} \quad \text{och} \quad (e^z)^n = e^{nz}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Observera speciellt att det sista sambandet, som är en följd av de Moivres formel, gäller om n är ett heltal; i annat fall får man vara försiktig, som vi ska se i Avsnitt 2.3.

I Exempel 1.22 på s. 11 såg vi att exponentialfunktionen är deriverbar i hela $\mathbb{C}$, med derivata

$$\frac{d}{dz}(e^z) = e^z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

2.2 Logaritmfunktionen. Grenar

I reell analys är exponentialfunktionen injektiv och har därmed en invers, logaritmfunktionen $\ln$:

$$e^y = x \quad \Longleftrightarrow \quad y = \ln x,$$

och $\ln$ har definitionsmängd $]0, +\infty[$ och värdemängd $\mathbb{R}$.

I det komplexa fallet är, som vi just har sett, exponentialfunktionen *inte* injektiv, och vi kan därför inte definiera en invers till den i vanlig mening. Det bästa vi kan göra är att lösa ekvationen $e^w = z$ då $z \in \mathbb{C}^*$, t.ex. genom att skriva de båda sidorna i polär form, precis som när vi löste den binomiska ekvationen i Exempel 1.5 på s. 4:

$$\begin{aligned} e^w = z &\Leftrightarrow e^u e^{iv} = r e^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} e^u = r & (\text{belopp}) \\ v = \theta + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} & (\text{argument}) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u = \ln r \\ v = \theta + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow w = \ln r + i(\theta + 2n\pi), n \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow w = \ln |z| + i \arg z. \end{aligned}$$

Vi gör därför följande definition:

2.1. Definition (Logaritm). $\log z = \ln |z| + i \arg z$, $z \in \mathbb{C}^*$.

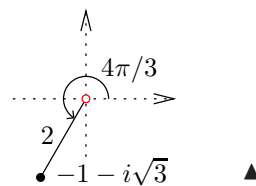
Den komplexa logaritmen $\log$ är alltså inte en funktion i vanlig (envärd) mening, utan en s.k. **flervärd funktion**: $\log z$ är en *mängd* av tal för varje $z \neq 0$, precis som $\arg z$. Observera också att med vår definition av $\log$ är det sant att

$$w = \log z \quad \Longleftrightarrow \quad e^w = z,$$

vilket alltså ska utläsas så att om w är något värde på $\log z$ så är $e^w = z$ och, omvänt, om $w \in \mathbb{C}$ är ett tal sådant att $e^w = z$ så är w ett av värdena på $\log z$.

2.2. Exempel. Eftersom $-1 - i\sqrt{3} = 2 e^{i4\pi/3}$ blir

$$\log(-1 - i\sqrt{3}) = \ln 2 + i \left(\frac{4\pi}{3} + 2n\pi \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$



Om vi för varje $z \neq 0$ väljer ett enda värde $\theta(z)$ på $\arg z$ så blir $\ln |z| + i \theta(z)$ en vanlig (envärd) funktion av z utanför origo. Ett vanligt sådant val är $\theta(z) = \text{Arg } z$, principalargumentet, och den så uppkomna funktionen har fått ett eget namn:

2.3. Definition (Principallogaritm). $\text{Log } z = \ln |z| + i \text{Arg } z$, $z \in \mathbb{C}^*$.

En karakterisering av principallogaritmen $\text{Log } z$, som också kallas **principalvärdet** på $\log z$, är således att

$$w = \text{Log } z \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} e^w = z, \\ -\pi < \text{Im } w \leq \pi, \end{cases}$$

så Log är inversen till restriktionen av exponentialfunktionen till remsan $-\pi < v \leq \pi$, och den är därmed automatiskt injektiv: $\text{Log } z_1 = \text{Log } z_2 \Rightarrow z_1 = \exp(\text{Log } z_1) = \exp(\text{Log } z_2) = z_2$. Vi ser också att

$$\text{Log } x = \ln x, \quad x > 0,$$

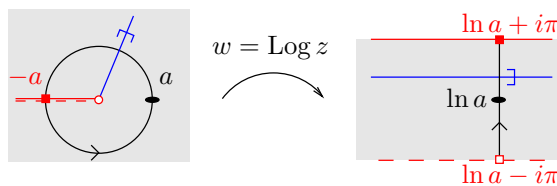
eftersom $\text{Arg } x = 0$ då $x > 0$, så Log är en utvidgning av $\ln$ från $]0, +\infty[$ till $\mathbb{C}^*$.

2.4. Exempel. Eftersom $-1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i2\pi/3}$ och $-\pi < -2\pi/3 \leq \pi$ får vi genast att

$$\text{Log}(-1 - i\sqrt{3}) = \ln 2 - \frac{2\pi i}{3}.$$

Vi kan också se det från Exempel 2.2 eftersom den av alla vinklar $4\pi/3 + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, som ligger i intervallet $]-\pi, \pi]$ är just $-2\pi/3$ (svarande mot $n = -1$). ▲

Som avbildning från z -planet till w -planet betraktar vi $w = \text{Log } z$ cirklar $|z| = a$ på lodräta sträckor $u = \ln a$, $-\pi < v \leq \pi$, och strålar $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, för fixt $\theta \in]-\pi, \pi]$, på vågräta linjer $v = \theta$. Notera speciellt att Log inte är kontinuerlig längs negativa realaxeln: Om $a > 0$ får vi nämligen att



$$\text{Log } z \rightarrow \begin{cases} \ln a + i\pi = \text{Log}(-a) & \text{då } z \rightarrow -a \text{ från ovan,} \\ \ln a - i\pi = \text{Log}(-a) - 2\pi i & \text{då } z \rightarrow -a \text{ från nedan.} \end{cases}$$

Vi har alltså kontinuitet från ovan men inte från nedan längs negativa realaxeln, vilket i figuren ovan till höger åskådliggörs med heldragna respektive streckade strålar och linjer; $\text{Log } z$ gör ett språng med $2\pi i$ när vi passerar negativa realaxeln.

Eftersom Log inte är kontinuerlig längs negativa realaxeln är den inte heller analytisk där, enligt Proposition 1.18 på s. 9. Om vi undantar den strålen blir funktionen dock analytisk i det område som blir kvar, med derivata

$$\frac{d}{dz}(\text{Log } z) = \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0];$$

här har vi använt beteckningen $]-\infty, 0] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$, som alltså står för negativa realaxeln inklusive origo. Detta påstående bevisas i en mera allmän situation i Proposition 2.8 nedan. (Redan i Övning 1.23 på s. 12 finns dock ett bevis som fungerar i halvplanet $\text{Re } z > 0$ och som bygger på Cauchy-Riemanns ekvationer.)

Följande begrepp är praktiskt när man sysslar med flervärda funktioner:

2.5. Definition (Gren till flervärd funktion). En gren till en flervärd funktion f i ett område Ω är en kontinuerlig funktion $\tilde{f}$ i Ω sådan att $\tilde{f}(z)$ är något av värdena på $f(z)$ för varje $z \in \Omega$.

Principallogaritmen $\text{Log } z$ är således en gren till den flervärda logaritmfunktionen $\log z$ i området $\Omega = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ och kallas **principalgrenen** till $\log z$.

Allmänt är

$$\widetilde{\log} z = \ln |z| + i\theta(z)$$

en gren till $\log z$ i ett område Ω om och endast om $\theta(z)$ är en kontinuerlig funktion i Ω och värdet $\theta(z)$ i varje punkt i Ω är ett argument för z ; att välja grenar till $\log z$ är således ekvivalent med att välja grenar $\theta(z)$ till $\arg z$. Området Ω får förstås inte innehålla origo ($\log 0$ är ju odefinierat) men inte heller någon enkel sluten kurva runt origo eftersom $\theta(z)$ med nödvändighet måste ändras med 2π när man går ett varv runt en sådan kurva. Om vi klipper upp planet $\mathbb{C}$ längs en obegränsad enkel kurva från origo och undantar punkterna på kurvan från definitionsområdet får vi dock ett område Ω där $\log z$ har grenar. Vi illustrerar med två exempel.

2.6. Exempel. Sätt $f(z) = \ln|z| + i\theta(z)$ i området Ω i figuren, där vinkeln $\theta(z)$ i varje punkt $z \in \Omega$ är det argument för z för vilket

$$\frac{3\pi}{4} < \theta(z) < \frac{11\pi}{4}.$$

$\theta(z)$ varierar då kontinuerligt i Ω , så $f(z)$ är en gren till $\log z$ i Ω . Vidare, med dessa gränser för $\theta(z)$ ser vi i figuren att t.ex. $\theta(1) = 2\pi$ och $\theta(-2i) = 3\pi/2$, så

$$f(1) = 2\pi i \quad \text{och} \quad f(-2i) = \ln 2 + i\frac{3\pi}{2}.$$

Notera speciellt att $f(z)$ är odefinierat längs kurvan C , som är en stråle i detta fall, men att

$$\theta(z) \rightarrow \begin{cases} 11\pi/4 & \text{då } z \text{ närmar sig } C \text{ från ovan och höger,} \\ 3\pi/4 & \text{då } z \text{ närmar sig } C \text{ från nedan och vänster.} \end{cases}$$

Med hjälp av $f(z)$ får vi också att *alla* grenar till $\log z$ i Ω ges av

$$f_n(z) = f(z) + 2n\pi i = \ln|z| + i(\theta(z) + 2n\pi), \quad n \in \mathbb{Z},$$

eftersom Ω är sammanhängande (se Anmärkning 2.25 för detaljer). Det finns alltså oändligt många olika grenar $f_n(z)$ i Ω , numrerade med heltal n ; notera att *samma* heltal n gäller för *alla* $z \in \Omega$ för en viss gren. Om vi vill ha en sådan gren $g(z)$ för vilken $g(1) = -4\pi i$, säg, som ju är ett av värdena på $\log 1$, har vi ett krav som bestämmer heltal n och därmed grenen $f_n(z)$:

$$-4\pi i = g(1) = f_n(1) = f(1) + 2n\pi i = \ln|1| + i(\theta(1) + 2n\pi) = i(2\pi + 2n\pi), \quad \text{varför } n = -3.$$

Således ges vår gren av att $g(z) = f_{-3}(z) = f(z) - 6\pi i = \ln|z| + i(\theta(z) - 6\pi)$, $z \in \Omega$. ▲

2.7. Exempel. Man måste inte klippa upp längs en stråle, som vi gjorde i föregående exempel, utan det går också bra att klippa upp längs en annan enkel kurva C från origo, som vi nu ska se.

Låt $h(z) = \ln|z| + i\theta(z)$ vara den gren till $\log z$ i området Ω till höger som uppfyller att $h(1) = 0$, vilket ju är ett av värdena på $\log 1$; det innebär alltså att vi har valt $\theta(1) = 0$, som är ett av värdena på $\arg 1$. Att $\theta(z)$ varierar kontinuerligt i Ω och hela tiden är ett av argumenten för z innebär nu, när $\theta(1)$ väl är valt, att $\theta(z)$ är entydigt bestämt i Ω :

$$\left. \begin{array}{l} \theta(1) = 0 \\ \theta(z) \text{ kontinuerlig i } \Omega \end{array} \right\} \Rightarrow \theta(-i) = \frac{3\pi}{2}, \theta(i) = \frac{\pi}{2} \quad \text{och} \quad \theta(2i) = -\frac{3\pi}{2},$$

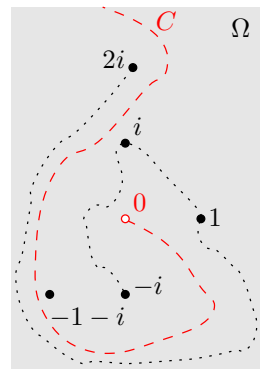
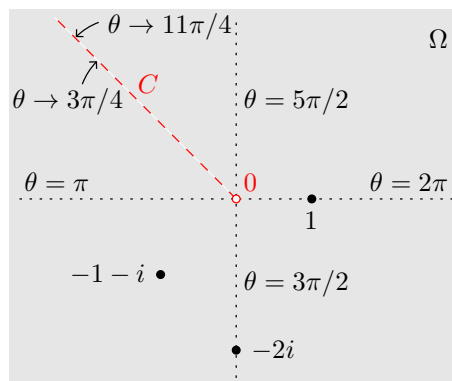
vilket vi enklast ser genom att följa kurvor i Ω från punkten 1 till punkterna $-i$, i respektive $2i$, som i figuren, där dessa kurvor är prickiga; observera att vi aldrig får nudda kurvan C under vår vandring. Således blir $h(-i) = i3\pi/2$, $h(i) = i\pi/2$ och $h(2i) = \ln 2 - i3\pi/2$.

Notera speciellt att värdena på $\theta(z)$ inte begränsas till ett intervall av längd 2π i detta fall och att $\theta(i) \neq \theta(2i)$ trots att punkterna i och $2i$ ligger på samma stråle i $\mathbb{C}$ från origo. ▲

Alla grenar till logaritmen har samma derivata:

2.8. Proposition. Varje gren $\widetilde{\log z}$ till $\log z$ är analytisk i det område där den är definierad, och

$$\frac{d}{dz}(\widetilde{\log z}) = \frac{1}{z}.$$



Bevis. Sätt $f(z) = \widetilde{\log z}$, och låt Ω vara det område där f är definierad. Fixera $z \in \Omega$ och sätt $w = f(z)$. För tillräckligt korta Δz är det sant att $z + \Delta z \in \Omega$ (eftersom Ω är en öppen mängd); för dem sätter vi $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$, och då är $\Delta z = e^{w+\Delta w} - e^w$. Vi får därför att

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\Delta w}{\Delta z} \stackrel{(1)}{=} \left(\frac{\Delta z}{\Delta w} \right)^{-1} = \left(\frac{e^{w+\Delta w} - e^w}{\Delta w} \right)^{-1} \stackrel{(2)}{\rightarrow} (e^w)^{-1} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z} \quad \text{då } \Delta z \rightarrow 0,$$

där vi i omskrivningen (1) använder att f är injektiv så att $\Delta z \neq 0 \Rightarrow \Delta w \neq 0$, och i gränsövergången (2) använder att derivatan av $\exp$ är $\exp$ själv och att f är kontinuerlig så att $\Delta z \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta w \rightarrow 0$. ■

För den reella logaritmen $\ln x$ gäller som bekant räknereglererna $\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$, $\ln(x_1/x_2) = \ln x_1 - \ln x_2$, $\ln(1/x) = -\ln x$ och $\ln x^n = n \ln x$ för positiva tal x_1, x_2 och x , och heltal n . Vad gäller räkneregler för (grenar till) den komplexa logaritmen $\log z$ måste man vara försiktig eftersom $\log z$ är flervärd och grenar är envärda. Vad man *kan* säga är att

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2, \quad \log \frac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2, \quad \log \frac{1}{z} = -\log z,$$

som likheter mellan *mängder* av tal, där högerleden $\log z_1 \pm \log z_2$ ska tolkas som de mängder av tal som uppstår när man tar varje enskilt värde på $\log z_1$ och lägger till respektive drar ifrån varje enskilt värde på $\log z_2$. Mera precist: Om M, M_1 och M_2 är mängder av tal, c är ett tal och f en funktion definierar vi

$$M_1 + M_2 = \{m_1 + m_2 : m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\}, \quad cM = \{cm : m \in M\}, \quad f(M) = \{f(m) : m \in M\},$$

och på motsvarande sätt definieras $M_1 - M_2, M_1 M_2$ och M_1/M_2 . En varning är här på sin plats: För alla $n \neq \pm 1$ är $\log z^n \neq n \log z$ som mängder, jfr Övning 2.7bc.

2.9. Exempel. Med $z_1 = i = e^{i\pi/2}$ och $z_2 = -1 + i = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}$ får vi att $z_1 z_2 = -1 - i = \sqrt{2}e^{-i3\pi/4}$ och därmed att

$$\log(z_1 z_2) = \ln \sqrt{2} - i\frac{3\pi}{4} + i2\pi n = \frac{\ln 2}{2} + i\left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z},$$

och att

$$\log z_1 + \log z_2 = \left(i\frac{\pi}{2} + i2\pi k\right) + \left(\ln \sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4} + i2\pi l\right) = \frac{\ln 2}{2} + i\left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi(k+l)\right), \quad k, l \in \mathbb{Z}.$$

Med $n = k + l + 1$ ser vi att dessa båda mängder är desamma: Givet n kan vi hitta k och l sådana att $n = k + l + 1$, och, omvänt, givet k och l sätter vi $n = k + l + 1$. ▲

Observera däremot att t.ex. likheten $f(z_1 z_2) = f(z_1) + f(z_2)$ inte behöver vara sann för en given gren $f(z)$ till $\log z$, inte ens om $z_1, z_2, z_1 z_2 \in \Omega$, utan då kan de båda sidorna skilja sig åt med en heltalsmultipel av $2\pi i$, och det kan vara olika multipler i olika punkter, jfr Övning 2.3.

2.10. Exempel. Med samma tal z_1 och z_2 som i föregående exempel är

$$\text{Log}(z_1 z_2) = \frac{\ln 2}{2} - i\frac{3\pi}{4} \quad \text{men} \quad \text{Log } z_1 + \text{Log } z_2 = \left(i\frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{\ln 2}{2} + i\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\ln 2}{2} + i\frac{5\pi}{4},$$

så $\text{Log}(z_1 z_2) \neq \text{Log } z_1 + \text{Log } z_2$ i detta fall. Däremot är t.ex.

$$\text{Log } 2i = \ln 2 + i\frac{\pi}{2} \quad \text{och} \quad \text{Log } 2 + \text{Log } i = (\ln 2) + \left(i\frac{\pi}{2}\right) = \ln 2 + i\frac{\pi}{2},$$

så här råder likhet: $\text{Log } 2i = \text{Log } 2 + \text{Log } i$. ▲

Vi avslutar med ett par svårare exempel på grenar.

2.11. Exempel. Låt Ω vara $\mathbb{C}$ med strålarna $]-\infty, -3]$ och $[0, +\infty[$ borttagna. Vi ska bestämma en gren $f(z)$ till den flervärda funktionen

$$\log(z^2 + 3z)$$

i Ω sådan att $f(-1) = \ln 2 - i\pi$, som ju är ett av värdena på $\log((-1)^2 + 3(-1)) = \log(-2)$. Eftersom

$$\log(z^2 + 3z) = \log(z + 3) + \log z$$

som mängder definierar vi till att börja med grenar $g(z)$ och $h(z)$ till $\log(z + 3)$ respektive $\log z$ i Ω , alltså

$$\begin{cases} g(z) = \ln|z + 3| + i\theta_1(z), \\ h(z) = \ln|z| + i\theta_2(z), \end{cases}$$

där $\theta_1(z)$ och $\theta_2(z)$ är argument för $z + 3$ respektive z som varierar kontinuerligt i Ω ; vi kan här välja $\theta_1(-1) = 0$ och $\theta_2(-1) = \pi$, se figur, och då blir $\theta_1(z)$ och $\theta_2(z)$ entydigt bestämda i Ω . Eftersom $g(z) + h(z)$ är en gren till $\log(z^2 + 3z)$ i Ω är

$$f_n(z) = g(z) + h(z) + i2n\pi = \ln|z^2 + 3z| + i(\theta_1(z) + \theta_2(z) + 2n\pi), \quad n \in \mathbb{Z},$$

alla grenar till $\log(z^2 + 3z)$ i Ω , numrerade med n , eftersom Ω är sammanhängande; den sökta grenen $f(z)$ är en av dessa. Kravet $f(-1) = \ln 2 - i\pi$ ger oss att

$$\ln 2 - i\pi = f_n(-1) = \ln 2 + i(0 + \pi + 2n\pi) \quad \Leftrightarrow \quad n = -1,$$

varför den sökta grenen är

$$f(z) = f_{-1}(z) = \ln|z^2 + 3z| + i(\theta_1(z) + \theta_2(z) - 2\pi).$$

Exempelvis är $f(3i) = \ln(9\sqrt{2}) - i5\pi/4$, eftersom $\theta_1(3i) = \pi/4$ och $\theta_2(3i) = \pi/2$, se figuren.

Uttrycket för $f(z)$ ovan lämpar sig inte alls för derivering m.a.p. z , men eftersom $f(z)$ är en gren till $\log(z^2 + 3z)$ ger kedjeregeln direkt att

$$f'(z) = \frac{1}{z^2 + 3z} \cdot \frac{d}{dz}(z^2 + 3z) = \frac{2z + 3}{z^2 + 3z},$$

och detta gäller för alla grenar till $\log(z^2 + 3z)$. ▲

2.12. Exempel. Här ska vi konstruera en annan gren, $\tilde{f}(z)$, till

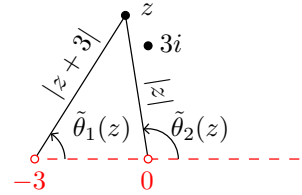
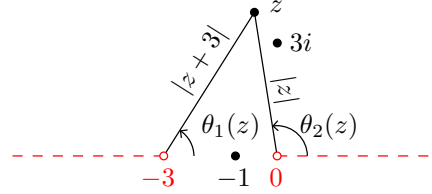
$$\log(z^2 + 3z),$$

en gren som är definierad i området $\tilde{\Omega}$ som är $\mathbb{C}$ med strålen $[-3, +\infty[$ borttagen. För att få entydighet lägger vi till ett krav, och vi väljer att kräva att $\tilde{f}(3i) = \ln(9\sqrt{2}) - i5\pi/4$, så att $\tilde{f}(3i) = f(3i)$, där f är grenen i föregående exempel.

Låt $\tilde{g}(z) = \ln|z + 3| + i\tilde{\theta}_1(z)$ och $\tilde{h}(z) = \ln|z| + i\tilde{\theta}_2(z)$ vara grenar till $\log(z + 3)$ respektive $\log z$ i $\tilde{\Omega}$, där $\tilde{\theta}_1(z)$ och $\tilde{\theta}_2(z)$ varierar kontinuerligt i $\tilde{\Omega}$. Vi kan välja $\tilde{\theta}_1(3i) = \pi/4$ och $\tilde{\theta}_2(3i) = \pi/2$, och får, med samma sorts resonemang som i föregående exempel, att

$$\tilde{f}(z) = \ln|z^2 + 3z| + i(\tilde{\theta}_1(z) + \tilde{\theta}_2(z) - 2\pi).$$

Konstruktionerna av f och $\tilde{f}$ ger att $\tilde{f}(z) = f(z)$ i övre halvplanet $\text{Im } z > 0$ (där är ju $\tilde{\theta}_1 = \theta_1$ och $\tilde{\theta}_2 = \theta_2$), medan däremot $\tilde{f}(z) = f(z) + 2\pi i$ i undre halvplanet $\text{Im } z < 0$ (där är ju $\tilde{\theta}_1 = \theta_1 + 2\pi$ och $\tilde{\theta}_2 = \theta_2$).



Avslutningsvis noterar vi att $z^2 + 3z$ antar samma värde, $-9 + 9i$, i punkterna $3i \in \tilde{\Omega}$ och $-3 - 3i \in \tilde{\Omega}$, så den flervärda funktionen $\log(z^2 + 3z)$ antar därför samma mängd av värden, $\ln(9\sqrt{2}) + i(3\pi/4 + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$, i båda. Däremot antar vår gren $\tilde{f}(z)$ till $\log(z^2 + 3z)$ *olika* värden i dessa punkter: $\tilde{f}(3i) = \ln(9\sqrt{2}) - i5\pi/4$ medan $\tilde{f}(-3 - 3i) = \ln(9\sqrt{2}) + i3\pi/4$, det senare eftersom $\tilde{\theta}_1(-3 - 3i) = 3\pi/2$ och $\tilde{\theta}_2(-3 - 3i) = 5\pi/4$. Att välja gren till $\log(z^2 + 3z)$ är alltså *inte* samma sak som att välja gren till $\log w$ i en delmängd av $\mathbb{C}$ och sätta $w = z^2 + 3z$. (Jfr Avsnitt 8.1.) ▲

★ ÖVNINGAR

- ★ **2.1** Betrakta avbildningen $w = z^2$. Bestäm bilden i w -planet av linjen $\operatorname{Im} z = b$ i z -planet, t.ex. genom att för varje fixt $b \in \mathbb{R}$ finna sambandet mellan u och v då $u + iv = (x + ib)^2$, $x \in \mathbb{R}$.
- ★ **2.2** Beräkna alla värden på $\log z$, och ange speciellt principalvärdet $\operatorname{Log} z$, då
 - (a) $z = -1$ (b) $z = 2i$ (c) $z = -1 + i$ (d) $z = -\sqrt{3} - i$
- ★ **2.3** Låt $a = i$, $b = -1 - i$ och $c = -1 + i$. Vilka av följande likheter är sanna för dessa värden på a , b och c ? I de fall de *inte* är sanna, ange högerled minus vänsterled.
 - (a) $\operatorname{Log} a + \operatorname{Log} b \stackrel{?}{=} \operatorname{Log} ab$ (b) $\operatorname{Log} a + \operatorname{Log} c \stackrel{?}{=} \operatorname{Log} ac$
 - (c) $\operatorname{Log} a - \operatorname{Log} b \stackrel{?}{=} \operatorname{Log}(a/b)$ (d) $\operatorname{Log} a^8 \stackrel{?}{=} 8 \operatorname{Log} a$
- ★ **2.4** Bestäm $f(-1 - i)$, $g(-1 - i)$ och $h(-1 - i)$ där f , g och h är de grenar till $\log z$ som beskrivs i Exempel 2.6 och Exempel 2.7.
- ★ **2.5** Låt $f(z)$ vara den gren till $\log z$ som är definierad utanför strålen $y = x$, $x \geq 0$, och för vilken $f(3i) = \ln 3 - i7\pi/2$. Beräkna $f(1)$, samt undersök gränsvärdet av $f(z)$ då z närmar sig $2 + 2i$, dels i halvplanet $y > x$, dels i halvplanet $y < x$.
- ★ **2.6** Om $w = e^z$, bestäm bilden av
 - (a) linjen $\operatorname{Re} z = a$ (b) linjen $\operatorname{Im} z = b$
 - (c) bandet $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ (d) halvbandet $\operatorname{Re} z > 0$, $0 < \operatorname{Im} z < \pi/2$
- ★ **2.7** Beräkna värdena på
 - (a) $\log i + \log i$ (b) $\log i^2$ (c) $2 \log i$
 - (d) $\exp(\log(1 + 4i))$ (e) $\log(\exp(1 + 4i))$ (f) $\exp(\operatorname{Log}(1 + 4i))$ (g) $\operatorname{Log}(\exp(1 + 4i))$
- ★ **2.8** Vi ska här studera några olika grenar till den flervärda funktionen $\log(z^2 + 1)$.
 - (a) Definiera en gren $f(z)$ till $\log(z^2 + 1)$ i området utanför strålen $x = 0$, $y \geq -1$ för vilken $f(-1) = \ln 2$. Vad är då $f(1)$?
 - (b) Definiera en gren $g(z)$ till $\log(z^2 + 1)$ i området utanför de två strålarna $x = 0$, $y \geq 1$ och $x = 0$, $y \leq -1$ för vilken $g(-1) = \ln 2$. Vad är då $g(1)$?
 - (c) Definiera en gren $h(z)$ till $\log(z^2 + 1)$ i området utanför sträckan $x = 0$, $-1 \leq y \leq 1$ och strålen $x \geq 0$, $y = 0$ för vilken $h(-1) = \ln 2$. Vad är då $\lim_{z \rightarrow 1, y > 0} h(z)$ och $\lim_{z \rightarrow 1, y < 0} h(z)$?
- ★ **2.9** Lös ekvationen $\exp z^2 = i$.
- ★ **2.10** Beskriv den mängd i komplexa talplanet som bestäms av olikheten $|\operatorname{Log} z| < \pi$.

2.3 Potensfunktioner

I reell analys definierar man som bekant

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln x), \quad x > 0, \alpha \in \mathbb{R}.$$

I komplex analys definierar man potensfunktioner på ett analogt sätt:

2.13. Definition (Potensfunktion). Vi definierar

$$z^\alpha = \exp(\alpha \log z), \quad z \in \mathbb{C}^*, \quad \alpha \in \mathbb{C},$$

och med dess principalvärde menas

$$\text{PV } z^\alpha = \exp(\alpha \text{Log } z), \quad z \in \mathbb{C}^*, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Eftersom $\log z$ är flervärd är också z^α i allmänhet flervärd. Låt oss se på ett exempel.

2.14. Exempel. Vi beräknar $(2i)^{-i}$ och $8^{1/3}$, och deras principalvärden, direkt ur definitionen. Vi får att

$$\begin{aligned} (2i)^{-i} &= \exp((-i) \log 2i) = \exp((-i)(\ln 2 + i\pi/2 + i2n\pi)) \\ &= \exp((\pi/2 + 2n\pi) - i \ln 2) = e^{\pi/2 + 2n\pi} e^{-i \ln 2}, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

som är oändligt många olika värden (alla värden har t.o.m. olika belopp), och dess principalvärde är

$$\text{PV } (2i)^{-i} = \exp((-i) \text{Log } 2i) = \exp((-i)(\ln 2 + i\pi/2)) = e^{\pi/2} e^{-i \ln 2}.$$

Vidare,

$$\begin{aligned} 8^{1/3} &= \exp((1/3) \log 8) = \exp((1/3)(\ln 8 + i2n\pi)) \\ &= \exp(\ln 2 + i2n\pi/3) = 2 e^{i2n\pi/3}, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

som är endast tre olika värden: 2 , $-1 + i\sqrt{3}$ och $-1 - i\sqrt{3}$, och dess principalvärde är

$$\text{PV } 8^{1/3} = \exp((1/3) \text{Log } 8) = \exp((1/3) \ln 8) = \exp(\ln 2) = 2. \quad \blacktriangle$$

Logaritmen $\log z$ antar för varje $z \in \mathbb{C}^*$ oändligt många olika värden, men som vi just har sett får vi inte alltid oändligt många olika värden på z^α , vilket beror på att exponentialfunktionen är periodisk:

$$\exp z_1 = \exp z_2 \iff z_1 = z_2 + 2n\pi i, \quad n \in \mathbb{Z},$$

se s. 19. Hur många värden vi får beror på exponenten α enligt följande:

2.15. Proposition (Flervärdhet hos potensfunktionen).

$$z^\alpha \text{ antar för givet } z \in \mathbb{C}^* \quad \begin{cases} \text{ett enda värde} & \Leftrightarrow & \alpha \in \mathbb{Z}, \\ \text{ändligt många olika värden} & \Leftrightarrow & \alpha \in \mathbb{Q}, \\ \text{oändligt många olika värden} & \Leftrightarrow & \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Bevis. Fixera $z \in \mathbb{C}^*$ och låt $w = \exp(\alpha \text{Log } z)$. Då är $w \neq 0$ och

$$\begin{aligned} z^\alpha &= \exp(\alpha \log z) = \exp(\alpha(\text{Log } z + i2\pi n)) = \exp(\alpha \text{Log } z) \cdot \exp(i2\pi n\alpha) \\ &= w \exp(i2\pi n\alpha), \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Vi noterar först att om $\beta \in \mathbb{C}$ så är det sant att

$$e^{i2\pi\beta} = 1 = e^0 \iff i2\pi\beta = 0 + i2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \iff \beta \in \mathbb{Z}.$$

Av detta ser vi nu följande:

1. z^α antar ett enda värde $\Leftrightarrow \exp(i2\pi n\alpha) = 1$ för alla $n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n\alpha \in \mathbb{Z}$ för alla $n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{Z}$.
2. Om z^α antar ändligt många olika värden så finns $k, l \in \mathbb{Z}$ med $k \neq l$ och $\exp(i2\pi k\alpha) = \exp(i2\pi l\alpha)$. Om $m = k - l$, som är ett heltal $\neq 0$, får vi att $1 = \exp(i2\pi k\alpha) / \exp(i2\pi l\alpha) = \exp(i2\pi m\alpha)$, varför $m\alpha \in \mathbb{Z}$, så $\alpha \in \mathbb{Q}$. Omvänt, om $\alpha \in \mathbb{Q}$, d.v.s. om $\alpha = p/q$ för några heltal p och q , så är $\exp(i2\pi q\alpha) = \exp(i2\pi p) = 1$, och vi får därför ändligt många (högst $|q|$ stycken) olika värden på z^α .

Av ovanstående följer nu direkt att z^α antar oändligt många olika värden $\Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$. ■

För heltalsexponenter $\alpha = n$ har vi nu (tillfälligt) två olika betydelser av z^n då $z \neq 0$: den gamla vanliga algebraiska (där z^n definieras som produkten av n faktorer z om $n \geq 1$ etc.) och den nya (där z^n definieras som $\exp(n \log z)$). Men som vi just har sett antar den senare ett enda värde för fixt $z \neq 0$, nämligen principalvärdet $\exp(n \operatorname{Log} z)$, och eftersom $\exp(\operatorname{Log} z) = z$ får vi att

$$\exp(n \operatorname{Log} z) = (\exp(\operatorname{Log} z))^n = z^n,$$

där steg $*$ är en användning av de Moivres formel (n är ju ett heltal) och beteckningen $(\cdot)^n$ avser den gamla algebraiska betydelsen av $(\cdot)^n$; således betyder nya z^n samma sak som gamla z^n , vilket är praktiskt. Om $n > 0$ sätter vi därför $0^n = 0$, och om $n = 0$ låter vi $z^0 = 1$ för alla $z \in \mathbb{C}$.

För bråktalsexponenter $\alpha = p/q$, där p och q är hela tal utan gemensamma faktorer och $q > 0$, ger $w = z^{p/q}$ de q olika rötterna till den binomiska ekvationen $w^q = z^p$; specialfallet $\alpha = 1/n$, där n är ett positivt heltal, ger de n olika lösningarna till den binomiska ekvationen $w^n = z$, så

$$z^{1/n} = \{w \in \mathbb{C}^* : w^n = z\}, \quad z \in \mathbb{C}^*, \quad n \in \{1, 2, 3, \dots\}.$$

För positiva heltal n definierar vi dessutom $0^{1/n} = 0$, så att t.ex. $0^{1/2} = 0$, och vi ser att

$$\operatorname{PV} x^{1/n} = \sqrt[n]{x}, \quad x \geq 0, \quad n \in \{1, 2, 3, \dots\},$$

den i reell analys införda n -roten ur x .

2.16. Exempel (Principalvärdet $\operatorname{PV} z^{1/2}$). Låt

$$f(z) = \exp\left(\frac{\operatorname{Log} z}{2}\right), \quad z \in \mathbb{C}^*, \quad \text{med tillägget att} \quad f(0) = 0,$$

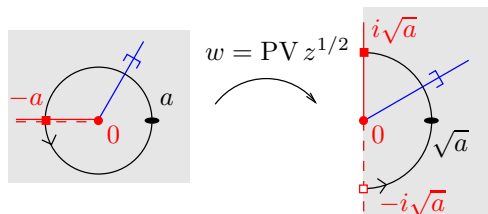
så att $f(z) = \operatorname{PV} z^{1/2}$, utvidgad kontinuerligt till origo. Om vi för $z \in \mathbb{C}^*$ skriver z i polär form $z = re^{i\theta}$ med $-\pi < \theta \leq \pi$, så är $\operatorname{Arg} z = \theta$ och $\operatorname{Log} z = \ln r + i\theta$, och därmed är

$$f(z) = f(re^{i\theta}) = \sqrt{r} e^{i\theta/2}, \quad r > 0, \quad -\pi < \theta \leq \pi.$$

Avbildningen $w = f(z)$ tar cirklar $|z| = a$ på halvcirklar $|w| = \sqrt{a}$, $-\pi/2 < \operatorname{Arg} w \leq \pi/2$, och strålar $\operatorname{Arg} z = \theta_0$ på strålar $\operatorname{Arg} w = \theta_0/2$ om $-\pi < \theta_0 \leq \pi$. Speciellt ser vi att f inte är kontinuerlig längs negativa realaxeln utan att, om $a > 0$,

$$f(z) \rightarrow \begin{cases} i\sqrt{a} = f(-a) & \text{då } z \rightarrow -a \text{ från ovan,} \\ -i\sqrt{a} = -f(-a) & \text{då } z \rightarrow -a \text{ från nedan,} \end{cases}$$

så f är, precis som Log , kontinuerlig från ovan men inte från nedan längs negativa realaxeln. ▲



Varje gren $L(z) = \ln|z| + i\theta(z)$ till $\log z$ i ett område Ω ger upphov till en gren $f(z)$ till z^α i samma område via $f(z) = \exp(\alpha L(z)) = \exp(\alpha(\ln|z| + i\theta(z)))$. Omvänt kan man visa att varje gren $f(z)$ till z^α , $\alpha \notin \mathbb{Z}$, i ett område Ω ges av $f(z) = \exp(\alpha L(z)) = \exp(\alpha(\ln|z| + i\theta(z)))$ för någon gren $L(z) = \ln|z| + i\theta(z)$ till $\log z$ i Ω , se Anmärkning 2.25. Men $L'(z) = 1/z$, så kedjeregeln medför därför att

$$f'(z) = \exp(\alpha L(z)) \cdot \alpha L'(z) = f(z) \cdot \frac{\alpha}{z}$$

för varje gren $f(z)$ till z^α , och eftersom dessutom $(z^n)' = nz^{n-1} = z^n \cdot (n/z)$ för $n \in \mathbb{Z}$ gäller följande:

2.17. Proposition. Varje gren till z^α är analytisk i det område där den är definierad, och

$$\frac{d}{dz}(\widetilde{z^\alpha}) = \frac{\alpha}{z} \cdot \widetilde{z^\alpha},$$

om vi med $\widetilde{z^\alpha}$ i vänsterledet avser någon gren – vilken som helst – till z^α , och vi har *samma* gren i högerledet.

2.18. Anmärkning. Derivatan av $\widetilde{z^\alpha}$ kan också skrivas i en form som säkerligen känns mera bekant från reell analys:

$$\frac{d}{dz}(\widetilde{z^\alpha}) = \alpha \cdot \widetilde{z^{\alpha-1}},$$

förutsatt att *samma* bakomliggande gren till $\log z$ används för både $\widetilde{z^\alpha}$ och $\widetilde{z^{\alpha-1}}$. ▲

Med **principalgrenen** till z^α menar vi $\exp(\alpha \operatorname{Log} z)$, med definitionsmängd $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$.

2.19. Exempel (En gren till $z^{1/4}$ och dess derivata). Låt Ω vara samma område som i Exempel 2.6. Vi ska bestämma en gren $\varphi(z)$ till den fyrvärdade funktionen $z^{1/4}$ i Ω som uppfyller kravet att $\varphi(81) = -3$; lägg märke till att de enda värden som $\varphi(81)$ skulle kunna anta är $3, 3i, -3, -3i$.

Vi låter, precis som i Exempel 2.6 (men med L i stället för f),

$$L(z) = \ln|z| + i\theta(z), \quad 3\pi/4 < \theta(z) < 11\pi/4,$$

vara *en* gren till $\log z$ i Ω ; då är, som förut,

$$L_n(z) = L(z) + 2n\pi i = \ln|z| + i(\theta(z) + 2n\pi), \quad n \in \mathbb{Z},$$

alla grenar till $\log z$ i Ω , numrerade med n . M.h.a. dessa får vi nu alla grenar $\varphi_n(z)$ till $z^{1/4}$ i Ω via

$$\varphi_n(z) = \exp(L_n(z)/4) = \exp(L(z)/4) \cdot \exp(in\pi/2), \quad n \in \mathbb{Z},$$

som i själva verket blir endast fyra olika grenar (numrerade med $n = 0, 1, 2, 3$, t.ex.):

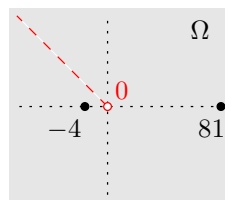
$$\varphi_0(z) = \exp(L(z)/4), \quad \varphi_1(z) = i\varphi_0(z), \quad \varphi_2(z) = -\varphi_0(z), \quad \varphi_3(z) = -i\varphi_0(z).$$

Kravet $\varphi(81) = -3$ medför, eftersom $\theta(81) = 2\pi$ och därmed $L(81) = \ln 81 + 2\pi i = 4 \ln 3 + 2\pi i$, att

$$-3 = \varphi(81) = \exp(L(81)/4) \cdot (\text{en av } 1, i, -1, -i) = 3i \cdot (\text{en av } 1, i, -1, -i).$$

Således måste i (som svarar mot $n = 1$) väljas bland $1, i, -1, -i$, och därför är den sökta grenen till $z^{1/4}$ i Ω

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) = i \exp\left(\frac{L(z)}{4}\right) = i \exp\left(\frac{\ln|z| + i\theta(z)}{4}\right), \quad \frac{3\pi}{4} < \theta(z) < \frac{11\pi}{4}.$$



Nu är grenen bestämd, och vi kan t.ex. beräkna

$$\varphi(-4) = i \exp\left((\ln|-4| + i\theta(-4))/4\right) = i \exp(\ln\sqrt{2} + i\pi/4) = i \cdot \sqrt{2} e^{i\pi/4} = -1 + i,$$

och derivatan får vi direkt med kedjeregeln: Eftersom $L'(z) = 1/z$ blir

$$\varphi'(z) = i \exp\left(\frac{L(z)}{4}\right) \cdot \frac{L'(z)}{4} = \frac{i}{4z} \exp\left(\frac{L(z)}{4}\right) = \frac{1}{4z} \varphi(z),$$

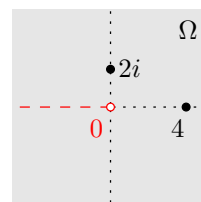
helt i enlighet med Proposition 2.17, och t.ex. är $\varphi'(-4) = \varphi(-4)/(4 \cdot (-4)) = (1 - i)/16$. ▲

2.20. Exempel (De två grenarna till $z^{1/2}$ i $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$). Låt Ω vara $\mathbb{C}$ med strålen $]-\infty, 0]$ borttagen, d.v.s. det område där $\text{Log } z$ är analytisk. Då ges alla grenar till $\log z$ i Ω av

$$\text{Log } z + 2n\pi i, \quad n \in \mathbb{Z},$$

och därmed alla grenar till den tvåvärda funktionen $z^{1/2}$ i Ω av

$$f_n(z) = \exp\left(\frac{\text{Log } z + 2n\pi i}{2}\right) = \exp\left(\frac{\text{Log } z}{2}\right) \cdot \exp(in\pi), \quad n \in \mathbb{Z},$$



d.v.s., som väntat, två olika grenar, nämligen (om vi numrerar med $n = 0$ och $n = 1$, t.ex.)

$$f_0(z) = \exp((\text{Log } z)/2) \quad \text{och} \quad f_1(z) = -f_0(z);$$

här är alltså $f_0(z)$ principalgrenen till $z^{1/2}$.

T.ex. får vi värdena $f_0(4) = 2$ och $f_0(2i) = 1 + i$ medan $f_1(4) = -2$ och $f_1(2i) = -1 - i$. ▲

2.21. Anmärkning (*Riemannytan till $z^{1/2}$). Låt f_0, f_1 och Ω vara som i föregående exempel. Funktionerna f_0 och f_1 är inte definierade längs strålen $]-\infty, 0]$, och de kan inte heller utvidgas kontinuerligt till $]-\infty, 0]$ eftersom, om $a > 0$,

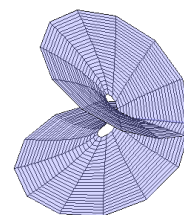
$$f_0(z) \rightarrow \begin{cases} i\sqrt{a} & \text{då } z \rightarrow -a \text{ från ovan,} \\ -i\sqrt{a} & \text{då } z \rightarrow -a \text{ från nedan,} \end{cases} \quad \text{och} \quad f_1(z) \rightarrow \begin{cases} -i\sqrt{a} & \text{då } z \rightarrow -a \text{ från ovan,} \\ i\sqrt{a} & \text{då } z \rightarrow -a \text{ från nedan,} \end{cases}$$

precis som i Exempel 2.16.

Vad vi dock *kan* göra, om vi tillåter oss att studera en yta S som inte längre är en delmängd av $\mathbb{C}$, är att ta två kopior Ω_0 och Ω_1 av Ω , som vi betraktar som olika mängder, och dessutom två kopior L_0 och L_1 av strålen $]-\infty, 0]$, som vi också betraktar som olika mängder, och definiera en funktion f på $S = \Omega_0 \cup L_0 \cup \Omega_1 \cup L_1$ (en s.k. disjunkt union) enligt

$$f(s) = \begin{cases} f_0(s) & \text{då } s \in \Omega_0, \\ i\sqrt{a} & \text{då } s = -a \in L_0, \end{cases} \quad \text{och} \quad f(s) = \begin{cases} f_1(s) & \text{då } s \in \Omega_1, \\ -i\sqrt{a} & \text{då } s = -a \in L_1. \end{cases}$$

Här ska vi tänka oss att ytan S konstrueras genom att limma ihop övre kanten av Ω_0 med L_0 och sedan L_0 med undre kanten av Ω_1 , och därefter övre kanten av Ω_1 med L_1 och sedan L_1 med undre kanten av Ω_0 . På detta vis får vi en yta som visserligen inte kan bäddas in i $\mathbb{R}^3$ – den skulle behöva skära sig själv i så fall, se figuren – men lika fullt en yta. Konstruktionen av S gör att f blir kontinuerlig på S , och med en naturlig s.k. komplex struktur på S blir f även analytisk på S , som då kallas (den oförgrenade) Riemannytan till $z^{1/2}$. (S kan däremot bäddas in i $\mathbb{R}^4$!)



Begreppet *inbäddning* definieras i differentialgeometrin; här nöjer vi oss med en intuitiv bild. Riemannytan behandlas i TATA78 Komplex analys fk. ▲

2.22. Exempel (Gren till summa av flervärda funktioner). Låt Ω vara det komplexa planet $\mathbb{C}$ med negativa imaginäraxeln borttagen. Vi ska visa att man kan definiera en gren $f(z)$ till den flervärda funktionen

$$\pi z^{1/2} + \log z$$

i området Ω sådan att $f(-1) = 0$ och $f'(-1) = -1 + i\pi/2$, samt därefter beräkna $f(4)$ och $f'(4)$ för denna f .

Vi noterar först att den flervärda funktionen $\pi z^{1/2} + \log z$ är väldefinierad i $\mathbb{C}^*$ och att, enligt definitionen av $z^{1/2}$,

$$\pi z^{1/2} + \log z = \pi \exp((\log z)/2) + \log z.$$

För varje $z \in \mathbb{C}^*$ antar $z^{1/2}$ två olika värden medan $\log z$ antar oändligt många olika värden, och när $z = 1$, t.ex., får vi värdena

$$\pi 1^{1/2} + \log 1 = \pi \exp((\log 1)/2) + \log 1 = \pi \exp((2k\pi i)/2) + 2l\pi i, \quad k, l \in \mathbb{Z},$$

vilket kan förenklas till $\pm\pi + 2l\pi i$, $l \in \mathbb{Z}$.

Låt

$$L(z) = \ln |z| + i\theta(z), \quad -\pi/2 < \theta(z) < 3\pi/2,$$

vara en gren till $\log z$ i Ω ; som vanligt blir då

$$L(z) + 2n\pi i, \quad n \in \mathbb{Z},$$

alla grenar till $\log z$ i Ω . Vidare ges alla (d.v.s. båda) grenar till $z^{1/2}$ i Ω av $\exp((L(z) + 2m\pi i)/2) = (-1)^m \exp(L(z)/2)$, $m \in \mathbb{Z}$ ($m \in \{0, 1\}$ räcker). Följande funktioner är därför grenar till $\pi z^{1/2} + \log z$ i Ω :

$$f_{m,n}(z) = (-1)^m \pi \exp(L(z)/2) + (L(z) + 2n\pi i), \quad m \in \{0, 1\}, n \in \mathbb{Z}.$$

Insättning av $z = -1$ ger, eftersom $L(-1) = \pi i$, att $f_{m,n}(-1) = (-1)^m \pi i + \pi i + 2n\pi i$, och eftersom vi vill att $f(-1) = 0$ för vår gren ser vi att antingen är $m = 0$, $n = -1$ eller $m = 1$, $n = 0$; m.a.o. har vi konstruerat *två* olika grenar i Ω med önskat värde i $z = -1$, nämligen $f_{0,-1}(z)$ och $f_{1,0}(z)$.

Vi har emellertid också ett krav på $f'(-1)$. Eftersom

$$f'_{m,n}(z) = (-1)^m \frac{\pi}{2z} \exp(L(z)/2) + \frac{1}{z}, \quad m \in \{0, 1\}, n \in \mathbb{Z},$$

är $f'_{m,n}(-1) = (-1)^m (\pi i)/(-2) - 1$, och kravet $f'(-1) = -1 + i\pi/2$ medför därför att $m = 1$ och därmed, enligt ovan, $n = 0$. Alltså är

$$f(z) = f_{1,0}(z) = -\pi \exp(L(z)/2) + L(z), \quad \text{med derivata} \quad f'(z) = -\frac{\pi}{2z} \exp(L(z)/2) + \frac{1}{z},$$

en gren i Ω med önskade egenskaper.

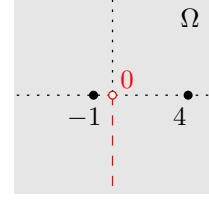
Slutligen, eftersom $L(4) = \ln 4 = 2 \ln 2$ får vi att $f(4) = -2\pi + 2 \ln 2$ och $f'(4) = (1 - \pi)/4$. $\blacktriangle$

2.23. Exempel. Låt $\tilde{\Omega}$ vara det område och $\tilde{f}(z)$ den gren till $\log(z^2 + 3z)$ i $\tilde{\Omega}$ som konstruerades i Exempel 2.12. Eftersom

$$(z^2 + 3z)^{1/2} = \exp\left(\frac{\log(z^2 + 3z)}{2}\right),$$

som flervärda funktioner, ger $\tilde{f}(z)$ upphov till en gren till $(z^2 + 3z)^{1/2}$ i $\tilde{\Omega}$, nämligen grenen

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(z) &= \exp\left(\frac{\tilde{f}(z)}{2}\right) = \exp\left(\frac{\ln|z^2 + 3z| + i(\tilde{\theta}_1(z) + \tilde{\theta}_2(z) - 2\pi)}{2}\right) \\ &= -\sqrt{|z^2 + 3z|} \exp\left(\frac{i(\tilde{\theta}_1(z) + \tilde{\theta}_2(z))}{2}\right). \end{aligned}$$



Vi ska nu se vad som händer när vi närmar oss den bortklippta strålen $[-3, +\infty[$.

Om $-3 < a < 0$ får vi att

$$\begin{cases} \tilde{\theta}_1(z) \rightarrow 0 & \text{och} & \tilde{\theta}_2(z) \rightarrow \pi, & \text{så} & \tilde{\varphi}(z) \rightarrow -i\sqrt{a^2 + 3a}, & \text{då } z \rightarrow a \text{ från ovan,} \\ \tilde{\theta}_1(z) \rightarrow 2\pi & \text{och} & \tilde{\theta}_2(z) \rightarrow \pi, & \text{så} & \tilde{\varphi}(z) \rightarrow i\sqrt{a^2 + 3a}, & \text{då } z \rightarrow a \text{ från nedan,} \end{cases}$$

så vi kan inte utvidga $\tilde{\varphi}$ kontinuerligt till $] -3, 0[$.

Om å andra sidan $a > 0$ får vi däremot att

$$\begin{cases} \tilde{\theta}_1(z) \rightarrow 0 & \text{och} & \tilde{\theta}_2(z) \rightarrow 0, & \text{så} & \tilde{\varphi}(z) \rightarrow -\sqrt{a^2 + 3a}, & \text{då } z \rightarrow a \text{ från ovan,} \\ \tilde{\theta}_1(z) \rightarrow 2\pi & \text{och} & \tilde{\theta}_2(z) \rightarrow 2\pi, & \text{så} & \tilde{\varphi}(z) \rightarrow -\sqrt{a^2 + 3a}, & \text{då } z \rightarrow a \text{ från nedan.} \end{cases}$$

Om vi definierar $\tilde{\varphi}(a) = -\sqrt{a^2 + 3a}$ för $a > 0$ blir $\tilde{\varphi}$ kontinuerlig i ett större område än $\tilde{\Omega}$, nämligen i området $\mathbb{C} \setminus [-3, 0]$. I själva verket blir $\tilde{\varphi}$ *analytisk* i detta större område, vilket kanske enklast ses med Moreras sats (Sats 3.27 på s. 52). -3 --- 0

Uttrycket ovan för $\tilde{\varphi}(z)$ lämpar sig inte för derivering. I stället använder vi kedjeregeln:

$$\tilde{f}'(z) = \frac{2z + 3}{z^2 + 3z} \implies \tilde{\varphi}'(z) = \exp\left(\frac{\tilde{f}(z)}{2}\right) \cdot \frac{\tilde{f}'(z)}{2} = \tilde{\varphi}(z) \cdot \frac{2z + 3}{2(z^2 + 3z)},$$

där $\tilde{f}'(z)$ beräknades i Exempel 2.11. ▲

I och med att vi nu har infört z^α för alla $z \in \mathbb{C}^*$ och $\alpha \in \mathbb{C}$ riskerar vi att få **beteckningsförvirring** när vi skriver gamla hederliga uttryck som e^z då $z \in \mathbb{C}$ och x^α då $x > 0$ och $\alpha \in \mathbb{R}$. Vi har ju tidigare definierat e^z som $\exp z$, entydigt, men enligt vår definition av potensfunktion får vi *flera* värden när z inte är ett heltal. Likaså är x^α entydigt bestämt i reell analys, men nu får vi *flera* värden när α inte är ett heltal, som i fallet $8^{1/3}$ i Exempel 2.14 – i reell analys är ju $8^{1/3} = 2$ och inget annat.

Detta är en knipa som inte är helt lätt att ta sig ur om man inte vill tynga ner framställningen med många nya beteckningar. Följande försöker vi hålla oss till i denna text:

2.24. Konvention (Preciseringar av flertydiga beteckningar). Om inget annat sägs gäller följande i fortsättningen av denna text:

- e^z står för $\exp z$ om $z \in \mathbb{C}$, och exempelvis är $e^{1+i\pi} = -e$.
- a^b , där $a > 0$ och $b \in \mathbb{R}$, betyder samma sak som i reell analys, alltså endast det positiva värdet, tillika principalvärdet; exempelvis är $8^{1/3} = 2$. Dessutom låter vi $0^b = 0$ för $b > 0$, samt $z^0 = 1$ även för $z = 0$ i samband med polynom.
- Symbolen $\sqrt{}$ reserverar vi (utom i Kapitel 8 och Kapitel 9) för den i reell analys införda kvadratroten ur tal ≥ 0 , så vi skriver helst $\sqrt{5}$ (entydigt bestämd) respektive $(-5)^{1/2}$ (tvåvärd, $\pm i\sqrt{5}$, om vi inte preciserar vilket av värdena vi avser).

Avslutningsvis några ord om räkneregler för (grenar till) potensfunktioner. Med tanke på hur z^α är definierat och att man får se upp med den flervärda logaritmen är det inte överraskande att man får se upp även med potensfunktionerna. För reella potensfunktioner x^α , där $x > 0$ och $\alpha \in \mathbb{R}$, gäller som bekant räknereglerna $(x_1 x_2)^\alpha = x_1^\alpha x_2^\alpha$, $(x_1/x_2)^\alpha = x_1^\alpha/x_2^\alpha$ och $(1/x)^\alpha = 1/x^\alpha$, samt $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$ och $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$. För flervärda komplexa potensfunktioner kan man visa att

$$(z_1 z_2)^\alpha = z_1^\alpha z_2^\alpha, \quad \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^\alpha = \frac{z_1^\alpha}{z_2^\alpha} \quad \text{och} \quad \left(\frac{1}{z}\right)^\alpha = \frac{1}{z^\alpha},$$

som likheter mellan mängder. Däremot är i allmänhet $(z^\alpha)^\beta \neq z^{\alpha\beta}$ och $z^\alpha z^\beta \neq z^{\alpha+\beta}$ om $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, se Övning 2.16, dock med undantagen att

$$(z^\alpha)^n = z^{\alpha n} \quad \text{och} \quad z^n z^\alpha = z^{n+\alpha}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

som likheter mellan mängder. Räknereglerna ovan behöver dock inte gälla för specifika *grenar* till potensfunktionen; jfr motsvarande diskussion för logaritmen, och i synnerhet Exempel 2.10.

2.25. Anmärkning (*Om grenar till $\log z$ och z^α i områden i $\mathbb{C}^*$). Grenar till $\log z$ finns, som vi såg i Avsnitt 2.2, i alla områden $\Omega \subseteq \mathbb{C}^*$ som uppkommer när man klipper upp planet längs en obegränsad enkel kurva från origo, se t.ex. Exempel 2.6 och Exempel 2.7.

Låt nu Ω vara ett sådant uppklippt plan, och låt $L(z)$ vara en gren till $\log z$ där. Om $n \in \mathbb{Z}$ sätter vi $L_n(z) = L(z) + 2n\pi i$; då är också $L_n(z)$ en gren till $\log z$ i Ω , ty L_n är kontinuerlig i Ω och $L_n(z)$ är ett värde på $\log z$ i varje punkt $z \in \Omega$. Omvänt, antag att $\tilde{L}(z)$ är en godtycklig gren till $\log z$ i Ω . Sätt $g = \tilde{L} - L$. Då är $\exp g(z) = \exp \tilde{L}(z) / \exp L(z) = z/z = 1$, så värdemängden $g(\Omega)$ är en delmängd av $\{0, \pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \dots\}$. Samtidigt är $g(\Omega)$ sammanhängande eftersom g är kontinuerlig och Ω är sammanhängande. Enda möjligheten är att g är en konstant funktion, d.v.s. att det finns något $n \in \mathbb{Z}$ sådant att $g(z) = 2n\pi i$ för alla $z \in \Omega$, och därmed är $\tilde{L} = L_n$. Slutsatsen är alltså att mängden av grenar till $\log z$ i Ω är $L + 2n\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$.

Vi går nu över till grenar till potensfunktionen z^α , $\alpha \in \mathbb{C}$, i områden $\Omega \subseteq \mathbb{C}^*$ i det intressanta fallet $\alpha \notin \mathbb{Z}$ (notera att z^α är envärd i $\mathbb{C}^*$ ifall $\alpha \in \mathbb{Z}$, se Proposition 2.15).

Låt Ω och L_n vara som ovan, och sätt $f_n(z) = \exp(\alpha L_n(z))$. Då är f_n , $n \in \mathbb{Z}$, grenar till z^α i Ω . Omvänt, antag att $\tilde{f}$ är en godtycklig gren till z^α i Ω . Då finns en heltalsvärd funktion $n(z)$ i Ω sådan att $\tilde{f}(z) = \exp(\alpha(L(z) + 2n(z)\pi i))$ för varje $z \in \Omega$. Sätt $h = \tilde{f}/f_0$. Då är h kontinuerlig i Ω och $h(z) = \exp(2\alpha n(z)\pi i)$, så värdemängden $h(\Omega)$ är en delmängd av den högst uppräknliga mängden $\{1, \exp(\pm 2\alpha\pi i), \exp(\pm 4\alpha\pi i), \dots\}$ samtidigt som den är sammanhängande. Enda möjligheten är att h är en konstant funktion, d.v.s. att det finns något $\tilde{n} \in \mathbb{Z}$ sådant att $h(z) = \exp(2\alpha\tilde{n}\pi i)$ för alla $z \in \Omega$ (notera att vi inte påstår att $n(z) = \tilde{n}$ för alla $z \in \Omega$, och det behöver inte heller vara sant om $\alpha \in \mathbb{Q}$). Men då är $\tilde{f} = f_{\tilde{n}}$. Slutsatsen är alltså att mängden av grenar till z^α i Ω är $\exp(\alpha L_n)$, $n \in \mathbb{Z}$, och därmed att en funktion f är en gren till z^α i Ω om och endast om det finns ett kontinuerligt varierande argument $\theta(z)$ för z sådant att $f(z) = \exp(\alpha(\ln |z| + i\theta(z)))$ i Ω .

Om $\Omega \subseteq \mathbb{C}^*$ innehåller en enkel sluten kurva runt origo finns inga grenar till $\log z$ där, och inte heller grenar till z^α i det intressanta fallet $\alpha \notin \mathbb{Z}$, eftersom θ måste ändras med 2π när man går ett varv runt en sådan kurva och $\exp(2\alpha\pi i) \neq 1$ då $\alpha \notin \mathbb{Z}$. ▲

★ ÖVNINGAR

- ★ **2.11** Bestäm alla värden, samt principalvärdet, på (a) $(-1)^{1/3}$ (b) $2^{\pi i}$ (c) i^i (d) $(1+i)^3$
- ★ **2.12** Beräkna $f'(-8i)$, då $f(z)$ är principalgrenen till $z^{2/3}$.
- ★ **2.13** (a) Beräkna alla värden på 1^z då $z = x + iy \in \mathbb{C}$, och ange speciellt principalvärdet.
(b) För vilka z har alla värden på 1^z belopp 1? För vilka z är principalvärdet enda värdet?
- ★ **2.14** (a) Bestäm i formen $a + ib$ alla värden på $1^{1/3} + 1^{1/4}$.
(b) Låt $f(z)$ vara den gren till $z^{1/3} + z^{1/4}$, definierad i hela komplexa planet utom på negativa imaginäraxeln, för vilken $f(1) = 0$. Beräkna $f(e^{i\varphi})$ för $-\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$, och ange speciellt $f(-1)$ i rektangulär form.
- ★ **2.15** Betrakta de flervärda funktionerna

$$f(z) = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{1/2}, \quad g(z) = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{1/3}, \quad h(z) = (z^2-1)^{1/2}, \quad k(z) = (z^2-1)^{1/3}.$$

- (a) Visa att man kan definiera grenar till samtliga fyra i området $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1, +\infty[$.
- (b) Visa att grenar finns för f , g och h men inte för k i det större området $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

★ **2.16** Låt $a \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $z, w \in \mathbb{C}^*$ och $n \in \mathbb{Z}$. Visa att

$$(a) |z^a| = |z|^a \quad (b) z^\alpha w^\alpha = (zw)^\alpha \quad (c) (z^\alpha)^n = z^{\alpha n} \quad (d) z^n z^\alpha = z^{n+\alpha}, \quad \text{betraktade som mängder, men finn exempel där} \quad (e) (z^n)^\alpha \neq z^{\alpha n} \quad (f) z^\alpha z^\beta \neq z^{\alpha+\beta}.$$

★ **2.17** Låt $\theta \in \mathbb{R}$. Finn (högst) fem fel i nedanstående omskrivning:

$$\cos \theta + i \sin \theta \stackrel{?}{=} e^{i\theta} \stackrel{?}{=} (e^{i\theta})^{2\pi/2\pi} \stackrel{?}{=} (e^{2\pi i})^{\theta/2\pi} \stackrel{?}{=} 1^{\theta/2\pi} \stackrel{?}{=} 1.$$

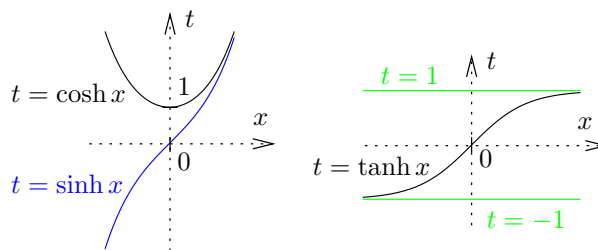
Ange var och varför det är fel!

2.4 Trigonometriska och hyperboliska funktioner

De reella trigonometriska funktionerna kan, via Eulers formler, skrivas $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ och $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$; dessutom är $\tan x = (\sin x)/(\cos x)$. Kanske inte lika kända är de reella **hyperboliska funktionerna**, som definieras av att

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

och $\tanh x = (\sinh x)/(\cosh x)$ för $x \in \mathbb{R}$; deras grafer återfinns i figuren till höger. (Kurvan $t = \cosh x$ kallas ofta kedjekurva eftersom det är en sådan form en fritt hängande kedja får av tyngdkraften.)



Uttrycken ovan lämpar sig väl för generalisering till en komplex variabel:

2.26. Definition (Trigonometriska och hyperboliska funktioner). Vi definierar

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z},$$

samt

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}.$$

De hyperboliska funktionerna fås alltså genom att ta bort alla förekomster av i i uttrycken som definierar de trigonometriska funktionerna.

Vi ser omedelbart att $\cos z$, $\sin z$, $\cosh z$ och $\sinh z$ är hela funktioner, och därmed också att $\tan z$ och $\tanh z$ är analytiska utom där $\cos z = 0$ respektive $\cosh z = 0$. Eftersom

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} = -1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2i} \log(-1) = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z},$$

ser vi att $\cos z$ har samma nollställen som sin reella motsvarighet; på samma sätt ser vi att $\cosh z$ har nollställena $z = i\pi/2 + in\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Vi noterar också att

$$\sin z = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2i} \log 1 = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z},$$

så även $\sin z$ har samma nollställen som sin reella motsvarighet; på samma sätt ser vi att $\sinh z$ har nollställena $z = in\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Vad gäller värdemängderna kan man visa att $\cos z$, $\sin z$, $\cosh z$ och $\sinh z$ antar *alla* komplexa värden, medan $\tan z$ antar alla värden utom $\pm i$ och $\tanh z$ alla värden utom ± 1 . Detta är inte självklart. Vi visar här att påståendet för $\cos z$ är sant, och lämnar resten till övningarna.

Det är praktiskt att sätta $s = e^{iz}$. Då är $s \neq 0$, så

$$\begin{aligned}\cos z = w &\Leftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 2w \Leftrightarrow s + \frac{1}{s} = 2w \\ &\Leftrightarrow s^2 - 2ws + 1 = 0 \Leftrightarrow (s - w)^2 = w^2 - 1 \\ &\Leftrightarrow s = w + (w^2 - 1)^{1/2} \quad (\text{två värden för varje } w \neq \pm 1) \\ &\Leftrightarrow z = -i \log \left(w + (w^2 - 1)^{1/2} \right) \quad (\text{oändligt många värden}),\end{aligned}$$

och här kan vilket $w \in \mathbb{C}$ som helst stå i högerledet. Exempelvis får vi, precis som ovan, att

$$\cos z = 3 \Leftrightarrow z = -i \log(3 \pm \sqrt{8}) = -i \left(\ln(3 \pm \sqrt{8}) + i2\pi n \right) = 2n\pi \mp i \ln(3 + \sqrt{8}), \quad n \in \mathbb{Z},$$

där vi i sista omskrivningen har använt att $\ln(3 - \sqrt{8}) = -\ln(3 + \sqrt{8})$ för att få ett snyggare svar.

2.27. Anmärkning (*Flervärda arccos z). Eftersom, som vi just har sett,

$$\cos w = z \Leftrightarrow w = -i \log \left(z + (z^2 - 1)^{1/2} \right)$$

kan man definiera $\arccos z = -i \log \left(z + (z^2 - 1)^{1/2} \right)$, analogt med hur $\log z$ definierades genom att lösa ekvationen $e^w = z$; exempelvis är $\arccos 3 = 2n\pi \pm i \ln(3 + \sqrt{8})$, $n \in \mathbb{Z}$. Till denna flervärda funktion kan man också definiera ett principalvärde, betecknat $\text{Arccos } z$, som överensstämmer med vanliga reella envärda $\arccos x$ om $z = x$ och $-1 \leq x \leq 1$, se Kapitel 8.

Flervärda inverser till trigonometriska och hyperboliska funktioner, deras principalvärden och olika grenar till dem – samt deras Riemannytor – tas upp i TATA78 Komplex analys fk. ▲

Det är viktigt att inse att $\cos z$ (och $\sin z$) antar värden även utanför intervallet $[-1, 1]$. I själva verket är det sant att

$$\cos z \in [-1, 1] \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

Här är riktningen $\Leftarrow$ känd från reell analys. Riktningen $\Rightarrow$ följer av att om $w = u$, där $-1 \leq u \leq 1$, så är $s = e^{iz} = w + (w^2 - 1)^{1/2} = u \pm i\sqrt{1 - u^2}$, som är en uppdelning i real- och imaginärdelar (ty $u \in \mathbb{R}$ och $\sqrt{1 - u^2} \in \mathbb{R}$), så vi får att $|s|^2 = u^2 + (1 - u^2) = 1$, d.v.s. att $|s| = 1$. Alltså ser vi att $\cos z = u \Rightarrow z = -i \log s = -i(\ln |s| + i \arg s) = \arg s \in \mathbb{R}$.

Att beräkna derivatorna är enkelt:

2.28. Proposition.

$$\frac{d}{dz}(\cos z) = -\sin z, \quad \frac{d}{dz}(\sin z) = \cos z, \quad \frac{d}{dz}(\tan z) = 1 + \tan^2 z = \frac{1}{\cos^2 z},$$

samt

$$\frac{d}{dz}(\cosh z) = \sinh z, \quad \frac{d}{dz}(\sinh z) = \cosh z, \quad \frac{d}{dz}(\tanh z) = 1 - \tanh^2 z = \frac{1}{\cosh^2 z}.$$

Trigonometriska ettan

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

gäller även för komplexa tal, liksom t.ex. sambanden

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z, \quad \sin(z + \pi) = -\sin z, \quad \cos(\pi/2 - z) = \sin z,$$

vilket man kan visa genom direkt insättning i definitionerna, eller också m.h.a. entydighet för hela funktioner: Sambanden ovan gäller nämligen på realaxeln, och eftersom båda sidor i likheterna

är hela funktioner gäller sambanden i hela planet, enligt (det ännu inte bevisade) resultatet om entydighet i Avsnitt 1.4.

Att även additionsformlerna

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \quad \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$

och därmed de vanliga formlerna för dubbla vinkeln, t.ex.

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z, \quad \cos^2 z = \frac{1 + \cos 2z}{2},$$

gäller, kan man övertyga sig om m.h.a. entydighetsresultatet, i två steg; låt oss bevisa formeln för sinus. Fixera $x_2 \in \mathbb{R}$ och sätt $f(z_1) = \sin z_1 \cos x_2 + \cos z_1 \sin x_2 - \sin(z_1 + x_2)$. Då är f hel, och eftersom $f(x_1) = 0$ för alla $x_1 \in \mathbb{R}$ måste $f(z_1) = 0$ för alla $z_1 \in \mathbb{C}$. I nästa steg fixerar vi $z_1 \in \mathbb{C}$ och sätter $g(z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 - \sin(z_1 + z_2)$. Då är g hel, och enligt vad vi just har bevisat är $g(x_2) = 0$ för alla $x_2 \in \mathbb{R}$, varför $g(z_2) = 0$ för alla $z_2 \in \mathbb{C}$, och beviset är klart; jfr också Övning 2.28.

Det är viktigt att förstå att det däremot finns $z \in \mathbb{C}$ sådana att t.ex. $|\cos z| > 1$ och $|\sin z| > |z|$, trots att olikheterna $|\cos x| \leq 1$ och $|\sin x| \leq |x|$ gäller för alla $x \in \mathbb{R}$.

Räkneregler för hyperboliska funktioner kan lätt härledas från motsvarande räkneregler för trigonometriska funktioner, se Övning 2.19; t.ex. gäller den s.k. hyperboliska ettan

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

eftersom den trigonometriska ettan, med iz i stället för z , och sambanden $\cos iz = \cosh z$ och $\sin iz = i \sinh z$ från Övning 2.18 nedan, medför att

$$1 = \cos^2 iz + \sin^2 iz = (\cosh z)^2 + (i \sinh z)^2 = \cosh^2 z - \sinh^2 z.$$

2.29. Exempel. Vi ska undersöka avbildningen $w = \sin z$. Additionsformeln för sinus ger till att börja med följande uppdelning i real- och imaginärdelar:

$$\begin{aligned} w = \sin z &= \sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy \\ &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = u + iv. \end{aligned}$$

Vi ska se efter hur några linjer avbildas.

1. Bilden i w -planet av linjen $x = a$ i z -planet, där $0 < a < \pi/2$ är givet, parametriseras av $y \in \mathbb{R}$ via $u = \sin a \cosh y$ och $v = \cos a \sinh y$. Det faktum att $\cosh y \geq 1$ och $\sin a > 0$ ger tillsammans med hyperboliska ettan, $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$, att

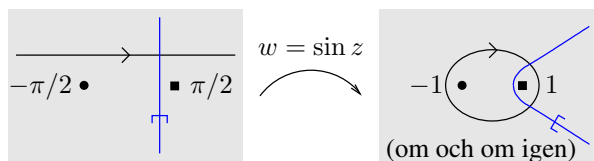
$$u \geq \sin a \quad \text{och} \quad \left(\frac{u}{\sin a}\right)^2 - \left(\frac{v}{\cos a}\right)^2 = 1,$$

som är en hyperbelgren i högra halvplanet genomlöpt (en gång) uppåt, se figur nedan.

2. Bilden i w -planet av linjen $y = b$ i z -planet, där $b > 0$ är givet, parametriseras av $x \in \mathbb{R}$ via $u = \cosh b \sin x$ och $v = \sinh b \cos x$. Trigonometriska ettan, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ger att

$$\left(\frac{u}{\cosh b}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sinh b}\right)^2 = 1,$$

som är en ellips med halvaxlar $\cosh b > 1$ och $\sinh b > 0$, genomlöpt (oändligt många gånger) medurs, se figur nedan.



2.30. Exempel. Vi ska lösa ekvationen

$$\tanh z = \frac{1+2i}{5}.$$

Eftersom

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{(e^z - e^{-z})/2}{(e^z + e^{-z})/2} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}$$

sätter vi lämpligen $s = e^{2z}$ och får att

$$\begin{aligned} \tanh z = \frac{1+2i}{5} &\Leftrightarrow \frac{s-1}{s+1} = \frac{1+2i}{5} \Leftrightarrow s = 1+i \Leftrightarrow 2z = \log(1+i) \\ &\Leftrightarrow z = \frac{1}{2} \log(1+i) = \frac{\ln 2}{4} + \frac{i\pi}{8} + i\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

▲

2.31. Exempel. Enligt ovan vet vi att $\cos z \in [-1, 1] \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$. Vi ska bestämma mängden M av alla z sådana att $|\cos z| \leq 1$; vi ser genast att M innehåller $\mathbb{R}$, d.v.s. att $M \supseteq \mathbb{R}$.

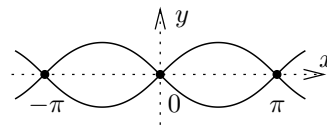
Enligt Övning 2.22 är $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y = 1 - \sin^2 x + \sinh^2 y$, så

$$\begin{aligned} |\cos z| \leq 1 &\Leftrightarrow |\cos z|^2 \leq 1 \Leftrightarrow \sinh^2 y \leq \sin^2 x \Leftrightarrow |\sinh y| \leq |\sin x| \\ &\stackrel{*}{\Leftrightarrow} \sinh |y| \leq |\sin x| \Leftrightarrow e^{|y|} - e^{-|y|} \leq 2|\sin x| \\ &\stackrel{**}{\Leftrightarrow} |y| \leq \ln(|\sin x| + \sqrt{1 + \sin^2 x}); \end{aligned}$$

att steg * är sant beror på att $|\sinh(-t)| = |\sinh t| = \sinh t$ då $t \geq 0$, och i steg ** sätter man lämpligen $t = e^{|y|}$ för att lösa olikheten.

I figuren till höger visas M 's begränsningskurvor:

$$|\cos z| = 1 \Leftrightarrow y = \pm \ln(|\sin x| + \sqrt{1 + \sin^2 x}).$$



Lägg speciellt märke till att mängden där $\cos z = \pm 1$ är mycket mindre:

$$\cos z = \pm 1 \Leftrightarrow z = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z},$$

som endast är de i figuren markerade punkterna $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$

▲

★ ÖVNINGAR

★ **2.18** Visa direkt från definitionerna av de trigonometriska och hyperboliska funktionerna att

$$\begin{cases} \cos iz = \cosh z \\ \cosh iz = \cos z \end{cases} \quad \begin{cases} \sin iz = i \sinh z \\ \sinh iz = i \sin z \end{cases} \quad \begin{cases} \tan iz = i \tanh z \\ \tanh iz = i \tan z \end{cases}$$

★ **2.19** Utgå från var och en av nedanstående trigonometriska identiteter och använd sambanden i övning 2.18 för att härleda identitetens hyperboliska motsvarighet.

- (a) $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$
- (b) $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$
- (c) $\tan(z+w) = (\tan z + \tan w)/(1 - \tan z \tan w)$
- (d) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

★ **2.20** Skriv i formen $a + ib$: (a) $\sin i + i \cos i$ (b) $\cos(\pi/4 - i)$ (c) $\tanh(\ln 2 + i\pi/4)$

★ **2.21** Lös ekvationerna (a) $\cos z = 2$ (b) $\tan z = (4 - 3i)/5$.

★ 2.22 Visa att

$$\begin{cases} \cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \\ |\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y \end{cases}$$

Härled motsvarigheter för sinus. Visa också att $|\cos z|^2 + |\sin z|^2 \geq 1$, med likhet om och endast om z är reellt.

★ 2.23 Betrakta avbildningen $w = \cos z$. Bestäm bilden av (a) linjen $\operatorname{Im} z = b$
(b) linjen $\operatorname{Re} z = a$, där $0 < a < \pi/2$ (c) bandet $0 < \operatorname{Re} z < \pi/2$.

★ 2.24 För vilka $w \in \mathbb{C}$ är följande ekvationer lösbara? Ange också lösningarna för dessa w .
(a) $e^z = w$ (b) $\cos z = w$ (c) $\sin z = w$ (d) $\tan z = w$

★ 2.25 Visa att

- (a) $e^z > 0 \Leftrightarrow z = x + i2n\pi, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$
- (b) $\cos z \in [-1, 1] \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- (c) $\sin z \in [-1, 1] \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- (d) $\tan z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\pi/2, \pm3\pi/2, \pm5\pi/2, \dots\}$.

★ 2.26 Lös ekvationen $\sin z + i \sin 2z + \sin 3z = 0$.

★ 2.27 Visa att

$$f(z) = \begin{cases} \cos(z^{1/2}), & z \neq 0, \\ 1, & z = 0, \end{cases}$$

är envärd och analytisk i hela $\mathbb{C}$. Bestäm också $f'(0)$.

★ 2.28 Antag att $f(z_1, z_2)$ är en komplexvärd funktion av två komplexa variabler som är hel i var och en av variablerna (alltså när den andra hålls konstant) och som är sådan att $f(x_1, x_2) = 0$ för alla $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Visa att $f(z_1, z_2) = 0$ för alla $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.

3 Integraler

I reell analys studerar man integraler av typen $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$ där $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ och f är reellvärd. Ett tillräckligt villkor för att integralen ska existera är som bekant att f är kontinuerlig på $[\alpha, \beta]$.

Vi ska nu utvidga integralbegreppet till att omfatta integraler av komplexvärda funktioner längs kurvor i $\mathbb{C}$. Därefter visar vi Cauchys integralsats och Cauchys integralformel, resultat som är av central betydelse i teorin för analytiska funktioner – mycket av det som sedan följer i denna text bygger på dessa resultat.

3.1 Integraler på intervall i $\mathbb{R}$

Redan i kursen i envariabelanalys integrerar man komplexvärda funktioner av en reell variabel: Om $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ och $f = u + iv$ är uppdelningen av f i real- och imaginärdelar, så definierar man

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} u(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} v(t) dt$$

närhelst de båda reella integralerna i högerledet existerar; här tillåter man att $\alpha > \beta$, och notera att $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = -\int_{\beta}^{\alpha} f(t) dt$. Om f har en primitiv funktion i intervallet, d.v.s. en funktion $F = U + iV$ sådan att $U'(t) = u(t)$ och $V'(t) = v(t)$ för alla t och därmed $F'(t) = f(t)$ för alla t , kan integralen beräknas med insättningsformeln: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = F(\beta) - F(\alpha)$.

Från definitionen kan man nu se att integration är $\mathbb{C}$ -linjär: Om vi för fixa α, β låter $I(f) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$, så att $I(f) = I(u) + iI(v)$, så gäller alltså identiteterna

$$I(f + g) = I(f) + I(g) \quad \text{och} \quad I(cf) = cI(f), \quad c \in \mathbb{C}.$$

För att bevisa dessa samband noterar vi först att vi från envariabelanalysen vet att de är sanna för *reellvärda* funktioner och *reella* konstanter; detta utnyttjas i stegen ** nedan, och stegen * är helt enkelt definitionen av $I(f)$. Om vi skriver $f = u + iv$, $g = \mu + i\nu$ och $c = a + ib$ får vi $I(f + g) = I((u + \mu) + i(v + \nu)) \stackrel{*}{=} I(u + \mu) + iI(v + \nu) \stackrel{**}{=} I(u) + I(\mu) + iI(v) + iI(\nu) \stackrel{*}{=} I(f) + I(g)$ och $I(cf) = I((au - bv) + i(bu + av)) \stackrel{*}{=} I(au - bv) + iI(bu + av) \stackrel{**}{=} (aI(u) - bI(v)) + i(bI(u) + aI(v)) = (a + ib)(I(u) + iI(v)) \stackrel{*}{=} cI(f)$, vilket skulle bevisas.

Vidare ser vi att

$$\operatorname{Re} I(f) = I(u) = I(\operatorname{Re} f) \quad \text{och} \quad \operatorname{Im} I(f) = I(v) = I(\operatorname{Im} f).$$

En variant av triangelolikheten gäller också, precis som för integraler av reella funktioner:

3.1. Proposition.

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)| dt, \quad \alpha \leq \beta.$$

Bevis. Skriv talet $I(f) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$ i polär form: $I(f) = re^{i\theta}$, där $r \geq 0$ och $\theta \in \mathbb{R}$. Vi får att

$$|I(f)| = r = e^{-i\theta} I(f) \stackrel{(1)}{=} I(e^{-i\theta} f) \stackrel{(2)}{=} \operatorname{Re} I(e^{-i\theta} f) \stackrel{(3)}{=} I(\operatorname{Re}(e^{-i\theta} f)) \stackrel{(4)}{\leq} I(|e^{-i\theta} f|) \stackrel{(5)}{=} I(|f|),$$

där (1) beror på $\mathbb{C}$ -linjaritet, (2) på att $I(e^{-i\theta} f) = r \in \mathbb{R}$, (3) på att $\operatorname{Re} I(g) = I(\operatorname{Re} g)$ enligt ovan, (4) på att $\operatorname{Re} w \leq |w|$ och $\alpha \leq \beta$, och (5), slutligen, på att $|e^{-i\theta}| = 1$. ■

3.2. Exempel. Eftersom $|e^{it^2}| = 1$ och $|t + i\pi| \geq \pi - t > 0$ då $0 \leq t \leq 2$ får vi uppskattningen

$$\left| \int_0^2 \frac{e^{it^2}}{t + i\pi} dt \right| \leq \int_0^2 \left| \frac{e^{it^2}}{t + i\pi} \right| dt = \int_0^2 \frac{|e^{it^2}|}{|t + i\pi|} dt \leq \int_0^2 \frac{1}{\pi - t} dt = \ln \frac{\pi}{\pi - 2}.$$

Om vi i stället använder att $|t + i\pi| \geq \pi - t \geq \pi - 2 > 0$ då $0 \leq t \leq 2$ får vi den något grövre, men enklare, uppskattningen

$$\left| \int_0^2 \frac{e^{it^2}}{t + i\pi} dt \right| \leq \int_0^2 \left| \frac{e^{it^2}}{t + i\pi} \right| dt = \int_0^2 \frac{|e^{it^2}|}{|t + i\pi|} dt \leq \int_0^2 \frac{1}{\pi - 2} dt = \frac{2}{\pi - 2}.$$

En bättre uppskattning kan man få om man i stället använder att $|t + i\pi| = \sqrt{t^2 + \pi^2}$. ▲

3.2 Integraler längs kurvor i $\mathbb{C}$

I Avsnitt 1.2 definierade vi vad som menas med att C är en $\mathcal{C}^1$ -kurva i $\mathbb{C}$: Kurvan C kan parametreras som $z = z(t)$ med en reell parameter t som går från α till β , och derivatan $z'(t)$ är kontinuerlig. Vi ska nu definiera integraler längs kurvor i $\mathbb{C}$:

3.3. Definition. Om C är en $\mathcal{C}^1$ -kurva i $\mathbb{C}$ och f är kontinuerlig på C , så definierar vi

$$\int_C f(z) dz = \int_\alpha^\beta f(z(t)) z'(t) dt \quad (\text{kurvintegral}),$$

och, om dessutom $\alpha \leq \beta$,

$$\int_C f(z) |dz| = \int_\alpha^\beta f(z(t)) |z'(t)| dt \quad (\text{båglängdsintegral}).$$

Från definitionen och Avsnitt 3.1 följer det omedelbart att dessa båda integraler är $\mathbb{C}$ -linjära:

$$\int_C (f(z) + g(z)) dz = \int_C f(z) dz + \int_C g(z) dz \quad \text{och} \quad \int_C c f(z) dz = c \int_C f(z) dz, \quad c \in \mathbb{C},$$

och motsvarande för båglängdsintegralen. Däremot är i regel $\operatorname{Re} \int_C f(z) dz \neq \int_C (\operatorname{Re} f(z)) dz$ och $\operatorname{Im} \int_C f(z) dz \neq \int_C (\operatorname{Im} f(z)) dz$, eftersom $z'(t)$ i regel inte är reellvärd.

3.4. Anmärkning. Precis som i vektoranalysen kan man visa att integralernas värden inte beror på vilken parametrisering av C man väljer.

Man kan också studera en mera allmän kurvintegral längs C , nämligen

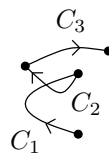
$$\int_C f(z) dz + g(z) d\bar{z} = \int_\alpha^\beta (f(z(t)) z'(t) + g(z(t)) \overline{z'(t)}) dt;$$

kurvintegralen i Definition 3.3 får man således som specialfallet $g = 0$. ▲

Vi skriver

$$C = C_1 + \dots + C_n$$

om $C_1, \dots, C_n$ är $\mathcal{C}^1$ -kurvor, och med detta menar vi helt enkelt att vi genomlöper kurvorna i tur och ordning: först C_1 , sedan C_2 o.s.v. Det man då får behöver inte vara en kurva, men om slutpunkten på föregående kurva sammanfaller med startpunkten på nästa så blir C en styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva, och omvänt kan alla styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurvor skrivas som en sådan summa av $\mathcal{C}^1$ -kurvor.



Vi definierar

$$\int_{C_1+\dots+C_n} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz,$$

och sedan generaliserar vi ovanstående definitioner till *styckvis* $\mathcal{C}^1$ -kurvor $C_1, \dots, C_n$; för båglängdsintegraler gör vi på samma sätt.

Om C är en styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva låter vi $-C$ stå för samma kurva, men genomlöst i motsatt riktning, och får därför att

$$\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz,$$



medan däremot $\int_{-C} f(z) |dz| = \int_C f(z) |dz|$.

3.5. Exempel. Låt $f(z) = z + \bar{z}$. Vi ska beräkna $\int_C f(z) dz$ längs två olika kurvor, C_1 och C_2 , från $z = 2$ till $z = -2i$, se figur nedan.

1. C_1 är sträckan från $z = 2$ till $z = -2i$, som kan parametreras med

$$z(t) = (1-t) \cdot 2 + t \cdot (-2i) = 2 - t(2 + 2i), \quad t : 0 \rightarrow 1,$$

som i Exempel 1.9 på s. 7, så $z'(t) = -2 - 2i$ och

$$\begin{aligned} \int_{C_1} f(z) dz &= \int_0^1 f(z(t)) z'(t) dt = \int_0^1 ((2 - t(2 + 2i)) + (2 - t(2 - 2i))) (-2 - 2i) dt \\ &= \int_0^1 (4 - 4t)(-2 - 2i) dt = (8 + 8i) \int_0^1 (t - 1) dt = -4 - 4i. \end{aligned}$$

2. C_2 är kvartscirkelbågen från $z = 2$ till $z = -2i$, som kan parametreras med

$$z(t) = 2e^{it}, \quad t : 0 \rightarrow -\pi/2,$$

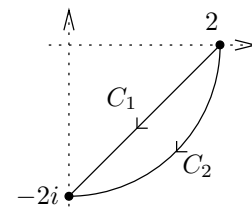
så $z'(t) = 2ie^{it}$ och

$$\begin{aligned} \int_{C_2} f(z) dz &= \int_0^{-\pi/2} f(z(t)) z'(t) dt = \int_0^{-\pi/2} (2e^{it} + 2e^{-it}) 2ie^{it} dt \\ &= 4i \int_0^{-\pi/2} (e^{2it} + 1) dt = 4i \left[\frac{e^{2it}}{2i} + t \right]_0^{-\pi/2} = -4 - 2\pi i. \end{aligned}$$

Vi ser att

$$\int_{C_1} f(z) dz \neq \int_{C_2} f(z) dz$$

trots att C_1 och C_2 är kurvor som går mellan samma par av punkter; kurvintegralen beror alltså på *vägen* mellan start- och slutpunkterna, och inte bara på själva ändpunkterna.



Om vi sätter $C = C_1 - C_2$ så att C blir den kontur (definition: se s. 7) man får om man först går längs C_1 och sedan längs $-C_2$, alltså baklänges längs C_2 , så blir

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1 - C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz - \int_{C_2} f(z) dz = (2\pi - 4)i \neq 0,$$

så kurvintegraler längs slutna kurvor behöver inte vara noll. ▲

3.6. Exempel. Om n är ett heltal och C_r är cirkeln $|z| = r$ tagen ett varv moturs, så är $z(\theta) = re^{i\theta}$, $\theta : 0 \rightarrow 2\pi$, en parametrisering av C_r , varför

$$\int_{C_r} z^n dz = \int_0^{2\pi} (re^{i\theta})^n i re^{i\theta} d\theta = r^{n+1} \int_0^{2\pi} i e^{i(n+1)\theta} d\theta = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1, \end{cases}$$

eftersom $\int_0^{2\pi} i e^{im\theta} d\theta = [e^{im\theta}/m]_0^{2\pi} = 0$ om $m \neq 0$ och $\int_0^{2\pi} i e^{im\theta} d\theta = 2\pi i$ om $m = 0$. Alltså,

$$\int_{C_r} \frac{dz}{z} = 2\pi i \quad \text{men} \quad \int_{C_r} z^n dz = 0, \quad n \text{ heltal} \neq -1.$$



Detta är ett enkelt men viktigt resultat som vi kommer att använda många gånger senare. ▲

Även kurvintegraler har en variant av triangelolikheten:

3.7. Proposition (ML-uppskattning). Om C är en styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva och f är kontinuerlig på C , så är

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz| \leq ML,$$

där

$$M = \max_{z \in C} |f(z)| \quad \text{och} \quad L = \int_C |dz| = \text{längden av } C.$$

Bevis. Vi visar påståendet i fallet att C är en $\mathcal{C}^1$ -kurva; det allmänna fallet följer sedan genom uppdelning i ändligt många $\mathcal{C}^1$ -kurvor och användning av den vanliga triangelolikheten för tal.

Låt $z = z(t)$, $t : \alpha \rightarrow \beta$, vara en $\mathcal{C}^1$ -parametrisering av C sådan att $\alpha \leq \beta$. Eftersom $[\alpha, \beta]$ är kompakt och funktionen $t \mapsto |f(z(t))|$ är kontinuerlig och reellvärd på $[\alpha, \beta]$ har funktionen ett största värde $M = \max_C |f|$ på $[\alpha, \beta]$. Vidare ges längden av kurvan C av $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_\alpha^\beta |z'(t)| dt$, så

$$\left| \int_C f(z) dz \right| = \left| \int_\alpha^\beta f(z(t)) z'(t) dt \right| \stackrel{*}{\leq} \int_\alpha^\beta |f(z(t))| |z'(t)| dt \leq M \int_\alpha^\beta |z'(t)| dt = ML,$$

där vi i steg $*$ använder Proposition 3.1; integralen efter detta steg är just $\int_C |f(z)| |dz|$. ■

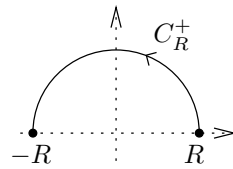
3.8. Exempel. Låt $f(z) = e^{iz}/(z^2 + 4)$, och låt C_R^+ vara halvcirkeln $z = Re^{i\theta}$, $\theta : 0 \rightarrow \pi$. Eftersom

$$|e^{iz}| = |e^{-y} e^{ix}| = e^{-y} \leq 1 \quad \text{och} \quad |z^2 + 4| \geq ||z^2| - 4| = |R^2 - 4| = R^2 - 4 > 0$$

på C_R^+ om $R > 2$ (obs. att $y \geq 0$ på C_R^+) är $|f(z)| \leq 1/(R^2 - 4)$ där, så

$$\left| \int_{C_R^+} f(z) dz \right| \leq \frac{1}{R^2 - 4} \cdot \pi R, \quad R > 2,$$

eftersom C_R^+ har längden πR . (Följd: $\int_{C_R^+} f(z) dz \rightarrow 0$ då $R \rightarrow \infty$.)



Uppskattningar av denna typ är viktiga i samband med s.k. Fourierintegraler i Avsnitt 5.4. ▲

3.3 Primitiva funktioner

Vi säger att F är en **primitiv funktion** – eller en **primitiv**, kort och gott – till f i ett område Ω om $F'(z) = f(z)$ för alla $z \in \Omega$; speciellt är alltså F analytisk i Ω . Enligt Proposition 1.27 på s. 13 ges då alla primitiva funktioner till f i Ω av $F(z) + C$, där $C \in \mathbb{C}$.

3.9. Exempel. Eftersom

$$\frac{d}{dz} (e^{z^2} + z \sin z + \cos z) = 2ze^{z^2} + z \cos z$$

för alla $z \in \mathbb{C}$ är $F(z) = e^{z^2} + z \sin z + \cos z$ en primitiv funktion till $f(z) = 2ze^{z^2} + z \cos z$ i $\mathbb{C}$, och därmed ges *alla* primitiva funktioner till f i $\mathbb{C}$ av $e^{z^2} + z \sin z + \cos z + C$, $C \in \mathbb{C}$. ▲

Man kan ibland använda sig av tekniker med motsvarigheter i reell analys för att bestämma primitiva funktioner i ett område Ω . Om vi låter $\int h(z) dz$ stå för alla primitiver till en funktion h i Ω ger produktregeln $(Fg)' = F'g + Fg' = fg + Fg'$ skriven som $fg = (Fg)' - Fg'$ att

$$\int f(z) g(z) dz = F(z) g(z) - \int F(z) g'(z) dz,$$

förutsatt att $F, g \in \mathcal{A}(\Omega)$ och $F' = f$ i Ω , vilket kan ses som **partiell integration**. Dessutom ger kedjeregeln $(F(g(z)))' = F'(g(z))g'(z) = f(g(z))g'(z)$ att

$$\int f(g(z)) g'(z) dz = F(g(z)) + C, \quad C \in \mathbb{C},$$

förutsatt att $g \in \mathcal{A}(\Omega)$ och att F är analytisk i alla punkter $w = g(z)$, $z \in \Omega$, och att $F'(w) = f(w)$ där, vilket kan ses som ett analytiskt **variabelbyte** $w = g(z)$.

När primitiva funktioner finns kan de användas för att beräkna kurvintegraler:

3.10. Sats (Beräkning av kurvintegral med primitiv funktion). Om f är en kontinuerlig funktion i ett område Ω och det finns en funktion F sådan att $F'(z) = f(z)$ för alla $z \in \Omega$, så är

$$\int_C f(z) dz = F(\text{slutpunkt på } C) - F(\text{startpunkt på } C)$$

för alla styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurvor C i Ω ; speciellt är i så fall

$$\int_C f(z) dz = 0 \quad \text{om } C \text{ är sluten.}$$

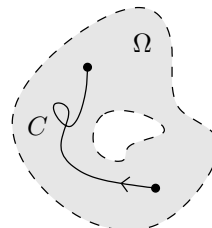
Således är kurvintegralens värde oberoende av själva vägen mellan start- och slutpunkterna när en primitiv funktion till integranden finns.

3.11. Anmärkning (Om existens av primitiv). Det är inte säkert att analytiska funktioner har primitiva funktioner. Exempelvis har $f(z) = 1/z$ ingen primitiv funktion i hela $\mathbb{C}^*$ eftersom $\int_C (1/z) dz = 2\pi i \neq 0$ om C är enhetscirkeln $|z| = 1$ tagen ett varv moturs, se Exempel 3.6. (Däremot har t.ex. $f(z) = 1/z^2$ primitiver i $\mathbb{C}^*$, och $F(z) = -1/z$ är en av dem.)

I Avsnitt 3.5 bevisas att derivatan av en analytisk funktion är analytisk, så ett nödvändigt villkor för att f ska ha en primitiv funktion F i ett område Ω är att $f \in \mathcal{A}(\Omega)$. Omvänt, om $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ och Ω dessutom är *enkelt sammanhängande* (definieras i Avsnitt 3.5; exempelvis är cirkelskivor, men inte $\mathbb{C}^*$, enkelt sammanhängande) så har f primitiva funktioner i Ω . ▲

Bevis av Sats 3.10. Om C är en $\mathcal{C}^1$ -kurva $z = z(t)$, $t : \alpha \rightarrow \beta$, blir

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} F'(z(t)) z'(t) dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{d}{dt} F(z(t)) \right) dt = [F(z(t))]_{\alpha}^{\beta} = F(z(\beta)) - F(z(\alpha)) \\ &= F(\text{slutpunkt på } C) - F(\text{startpunkt på } C). \end{aligned}$$



Det allmänna fallet när C är en styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva följer sedan genom uppdelning. ■

3.12. Anmärkning. I beviset av Sats 3.10 ovan använder vi kedjeregeln på funktionen $t \mapsto F(z(t))$, där den inre funktionen $t \mapsto z(t)$ är en $\mathcal{C}^1$ -funktion av en *reell* variabel och den yttre funktionen $z \mapsto F(z)$ är en analytisk funktion av en *komplex* variabel. Beviset för denna variant av kedjeregeln ser precis likadant ut som beviset för den vanliga kedjeregeln, jfr texten omedelbart före Proposition 1.19 på s. 10. $\blacktriangle$

3.13. Exempel. Eftersom $F(z) = e^{z^2} + z \sin z + \cos z$ är en primitiv till $f(z) = 2ze^{z^2} + z \cos z$ i hela $\mathbb{C}$ är

$$\int_C (2ze^{z^2} + z \cos z) dz = F(i\pi) - F(0) = e^{-\pi^2} - \pi \sinh \pi + \cosh \pi - 2$$

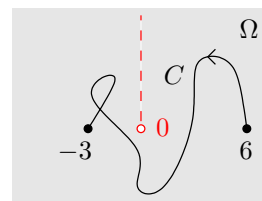
för *alla* styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurvor C i $\mathbb{C}$ med startpunkt 0 och slutpunkt $i\pi$. $\blacktriangle$

3.14. Exempel. Låt Ω vara $\mathbb{C}$ utom strålen rakt uppåt från origo, och sätt $f(z) = 1/z$. Då är

$$F(z) = \widetilde{\log z} = \ln |z| + i\theta(z), \quad \pi/2 < \theta(z) < 5\pi/2,$$

där $\theta(z)$ som vanligt är ett kontinuerligt varierande argument för z i Ω , en primitiv till $f(z)$ i Ω . Om C är en kurva från $z = 6$ till $z = -3$ i Ω blir

$$\int_C \frac{dz}{z} = F(-3) - F(6) = (\ln 3 + i\pi) - (\ln 6 + i2\pi) = -\ln 2 - i\pi.$$



Med partiell integration kan vi också beräkna $\int_C \widetilde{\log z} dz = \int_C 1 \cdot \widetilde{\log z} dz$. Eftersom

$$(z \widetilde{\log z})' = \widetilde{\log z} + 1 \quad \text{får vi att} \quad (z \widetilde{\log z} - z)' = \widetilde{\log z},$$

så $\Phi(z) = z \widetilde{\log z} - z$ är en primitiv till $\widetilde{\log z}$ i Ω . Således blir

$$\int_C \widetilde{\log z} dz = \Phi(-3) - \Phi(6) = 9 - 9\ln 3 - 6\ln 2 - 15\pi i.$$

3.15. Exempel. Vi ska beräkna kurvintegralen

$$\int_C \frac{z^3 + 3z}{z^2 + 1} dz$$

för de två kurvorna C_a och C_b i figuren; notera att båda går från 1 till $2i$ men inte genom punkterna $\pm i$, där integranden ju är odefinierad.

Vi börjar med polynomdivision och partialbråksuppdelning:

$$\frac{z^3 + 3z}{z^2 + 1} = z + \frac{2z}{z^2 + 1} = z + \frac{2z}{(z+i)(z-i)} = z + \frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i} = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z).$$

Nästa steg är att bestämma primitiver till var och en av dessa tre funktioner i områden som innehåller C_a respektive C_b .

$F_1(z) = z^2/2$ är en primitiv till $f_1(z) = z$ i området $\Omega_1 = \mathbb{C}$, så

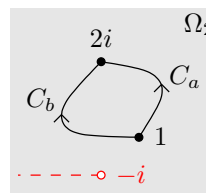
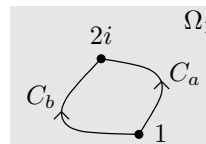
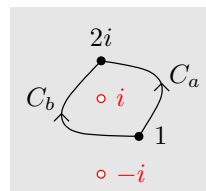
$$\int_C z dz = \left[\frac{z^2}{2} \right]_1^{2i} = \frac{(2i)^2}{2} - \frac{1^2}{2} = -\frac{5}{2}$$

för *varje* kurva C i $\mathbb{C}$ från 1 till $2i$, speciellt både då $C = C_a$ och $C = C_b$.

Vidare, $F_2(z) = \text{Log}(z+i)$ är en primitiv till $f_2(z) = 1/(z+i)$ i området Ω_2 , som är $\mathbb{C}$ med strålen från $z = -i$ rakt vänsterut borttagen, så

$$\int_C \frac{dz}{z+i} = [\text{Log}(z+i)]_1^{2i} = \text{Log } 3i - \text{Log}(1+i) = \frac{1}{2} \ln \frac{9}{2} + i\frac{\pi}{4}$$

både då $C = C_a$ och $C = C_b$, som ju båda ligger i Ω_2 .



Vi kan dock inte hitta en primitiv till $f_3(z) = 1/(z-i)$ som fungerar samtidigt för C_a och C_b . Det beror på att varje primitiv $F_3(z)$ till $f_3(z)$ är en gren till $\log(z-i)$ plus någon konstant och därmed är definierad i ett område Ω_3 som är $\mathbb{C}$ med någon obegränsad enkel kurva från $z=i$ borttagen, en kurva som med nödvändighet skär minst en av C_a och C_b . Vi hanterar därför de båda kurvorna separat.

$F_{3a}(z) = \text{Log}(z-i)$ är en primitiv till $f_3(z) = 1/(z-i)$ i området Ω_{3a} (se figuren) som innehåller kurvan C_a , så

$$\int_{C_a} \frac{dz}{z-i} = [\text{Log}(z-i)]_1^{2i} = -\frac{1}{2} \ln 2 + i \frac{3\pi}{4}.$$

$F_{3b}(z) = \ln|z-i| + i\theta(z)$, där $\theta(z)$ är ett argument för $(z-i)$ för vilket $0 < \theta(z) < 2\pi$, är en primitiv till $f_3(z) = 1/(z-i)$ i området Ω_{3b} som innehåller kurvan C_b , så eftersom $\theta(2i) = \pi/2$ och $\theta(1) = 7\pi/4$ är

$$\int_{C_b} \frac{dz}{z-i} = [\ln|z-i| + i\theta(z)]_1^{2i} = -\frac{1}{2} \ln 2 - i \frac{5\pi}{4}.$$

Sammanfattningsvis blir alltså

$$\int_{C_a} \frac{z^3 + 3z}{z^2 + 1} dz = \left(-\frac{5}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \ln \frac{9}{2} + i \frac{\pi}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2} \ln 2 + i \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{5}{2} + \ln \frac{3}{2} + i\pi$$

och

$$\int_{C_b} \frac{z^3 + 3z}{z^2 + 1} dz = \left(-\frac{5}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \ln \frac{9}{2} + i \frac{\pi}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2} \ln 2 - i \frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{5}{2} + \ln \frac{3}{2} - i\pi.$$

▲

* ÖVNINGAR

★ **3.1** Beräkna $\int_C (3\bar{z} + iz) dz$, där C är kurvan $z = t + it^2$, $t: 0 \rightarrow 1$.

★ **3.2** Beräkna

$$I = \int_C z dz \quad \text{och} \quad J = \int_C \bar{z} dz$$

genom att parametrisera C , som går från 2 till $2i$ längs (a) en rät linje
(b) cirkeln $|z| = 2$ ett kvarts varv moturs (c) cirkeln $|z| = 2$ tre kvarts varv medurs.

★ **3.3** Låt C vara sträckan från 1 till i , och låt $n \in \mathbb{Z}$. Ange en primitiv funktion $F_n(z)$ till $f_n(z) = z^n$ som är definierad i en omgivning till C , och beräkna sedan $I_n = \int_C z^n dz$.

★ **3.4** Beräkna $\int_C \frac{dz}{z}$, där C är en kurva från 1 till $-1+i$ som inte nuddar strålen $y = x$, $x \geq 0$. Beror integralens värde på vilken sådan kurva man väljer?

★ **3.5** Beräkna $\int_C \frac{\text{Log } z}{z^2} dz$, där C är halvcirkeln från i till $-i$ i högra halvplanet, dels genom parametrisering, dels med primitiv funktion (ange också en primitiv).

★ **3.6** Räkna ut $\int_C \text{Log}(z+1) dz$, där C är halvcirkeln från 0 till -2 i övre halvplanet.

★ **3.7** Beräkna $\int_C (z+2)e^{iz} dz$, där C är kurvan $y = (x/\pi)^2$, $x: \pi \rightarrow 0$.

★ **3.8** Låt $I = \int_0^\pi \frac{1 + i \sin t}{3 + 4i + 2e^{it}} dt$. Visa att (a) $|I| \leq \frac{2\pi}{3}$ (b) $|I| \leq \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

★ **3.9** Låt $I(r) = \int_{C_r} \frac{\operatorname{Log} z \, dz}{z^2 + 1}$, där C_r är cirkeln $|z| = r$ tagen ett varv moturs och $r \neq 1$.

- (a) Visa att $|I(r)| \leq 2\pi r \cdot \frac{\pi + \ln r}{r^2 - 1}$ då $r > 1$, och därmed att $I(r) \rightarrow 0$ då $r \rightarrow \infty$.
 (b) Härled en motsvarande olikhet då $0 < r < 1$.

3.4 Integralformler för analytiska funktioner

I fortsättningen låter vi ω stå för ett *begränsat* område vars rand $\partial\omega$ består av ändligt många konturer med **positiv orientering relativt ω** , vilket betyder att när man genomlöper en sådan kontur har man **området ω till vänster** om sig. Ω låter vi som tidigare stå för ett område, begränsat eller obegränsat, och både ω och Ω får innehålla hål. Som i Avsnitt 1.2 sätter vi också

$$\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega,$$

slutna höljet av ω , och vi kräver att den kompakta mängden $\bar{\omega}$ ligger i området Ω .

I denna situation kan man överföra en kurvintegral längs randen $\partial\omega$ till en dubbelintegral över området ω , förutsatt att integranden är snäll nog i Ω , tack vare följande resultat som vi hämtar från vektoranalysen:

3.16. Hjälpsats (Greens formel). Om $P, Q \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, så gäller likheten

$$\int_{\partial\omega} (P \, dx + Q \, dy) = \iint_{\omega} (Q'_x - P'_y) \, dx \, dy.$$

Bevis. Se t.ex. Persson-Böiers, kapitel 9. ■

I följande sats, och i dess båda följsatser, antar vi att f inte bara är analytisk i Ω , d.v.s. att $f'(z)$ existerar för alla $z \in \Omega$, utan också att f är av klass $\mathcal{C}^1$, vilket gör att vi kan använda oss av Greens formel. I Avsnitt 3.5 ska vi dock visa att det faktum att $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ medför att $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, ja t.o.m. att $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

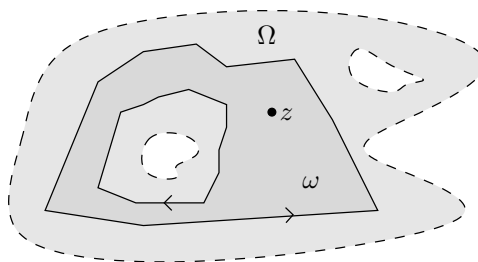
3.17. Sats (Cauchys integralsats). Om $f \in \mathcal{A}(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\Omega)$, så är

$$\int_{\partial\omega} f(z) \, dz = 0.$$

Bevis. Med $f = u + iv$ och $dz = dx + i \, dy$ får vi att $f \, dz = (u \, dx - v \, dy) + i(v \, dx + u \, dy)$, varför Greens formel och Cauchy-Riemanns ekvationer $u'_x = v'_y$ och $u'_y = -v'_x$ medför att

$$\begin{aligned} \int_{\partial\omega} f(z) \, dz &= \int_{\partial\omega} (u \, dx - v \, dy) + i \int_{\partial\omega} (v \, dx + u \, dy) \\ &= \iint_{\omega} \underbrace{(-v'_x - u'_y)}_{=0} \, dx \, dy + i \iint_{\omega} \underbrace{(u'_x - v'_y)}_{=0} \, dx \, dy = 0. \end{aligned}$$

■



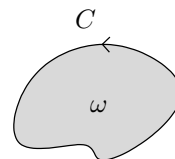
$$\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$$

Ett par specialfall av Cauchys integralsats kan vara värda att nämna separat:

1. Om $\partial\omega = C$, en enda kontur, så blir

$$\int_C f(z) dz = 0$$

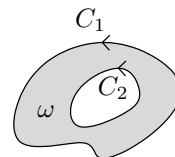
för alla funktioner f som är analytiska (och $\mathcal{C}^1$) i någon omgivning Ω till $\bar{\omega}$, vilket man kan uttrycka som att f är analytisk på och innanför C .



2. Om $\partial\omega = C_1 - C_2$, där C_1 och C_2 är konturer, så blir $\int_{C_1 - C_2} f(z) dz = 0$ och därmed är

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$$

för alla funktioner f som är analytiska (och $\mathcal{C}^1$) i någon omgivning Ω till $\bar{\omega}$, vilket man kan uttrycka som att f är analytisk på och mellan C_1 och C_2 .



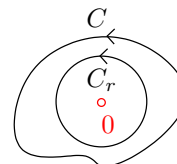
3.18. Exempel (Undvikande av singularitet). Låt C vara en kontur som omsluter origo och är orienterad moturs. Vi vill beräkna

$$\int_C \frac{dz}{z}.$$

Integranden är analytisk (och $\mathcal{C}^1$) i området $\Omega = \mathbb{C}^*$, men *inte* i origo, så specialfall 1 ovan kan inte användas.

Om vi tar $r > 0$ så litet att cirkeln $C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ finns innanför C kan vi däremot använda specialfall 2 ovan och få att

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_{C_r} \frac{dz}{z} = 2\pi i,$$

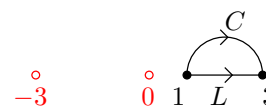


med en parametrisering $z = re^{i\theta}$ av C_r , som i Exempel 3.6. ▲

3.19. Exempel (Byte av integrationsväg). Låt C vara halvcirkeln från $z = 1$ till $z = 3$ i övre halvplanet. Vi ska beräkna

$$\int_C \frac{2z+3}{z^2+3z} dz.$$

Integranden – kalla den $f(z)$ – är analytisk (och $\mathcal{C}^1$) i $\mathbb{C}$ utom i punkterna $z = 0$ och $z = -3$, så om L är sträckan från $z = 1$ till $z = 3$ är f analytisk (och $\mathcal{C}^1$) i en omgivning till den slutna halvcirkelskiva som har C och L som rand. Cauchys integralsats ger därför att



$$0 = \int_{L-C} f(z) dz = \int_L f(z) dz - \int_C f(z) dz,$$

och med parametriseringen $z = t$, $t : 1 \rightarrow 3$, av L blir $\int_L f(z) dz$ en vanlig reell integral, så

$$\int_C f(z) dz = \int_L f(z) dz = \int_1^3 \frac{2t+3}{t^2+3t} dt = [\ln(t^2+3t)]_1^3 = \ln \frac{9}{2}.$$

Integralen kan också beräknas genom att bestämma en komplex primitiv funktion till integranden $(2z+3)/(z^2+3z)$, alltså en gren till $\log(z^2+3z)$, som är definierad i en omgivning till halvcirkeln C , jfr Exempel 2.11 på s. 24 (och Exempel 2.12), och använda Sats 3.10. ▲

3.20. Följsats (Cauchys integralformel). Om $f \in \mathcal{A}(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\Omega)$, så är

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\omega} \frac{f(s)}{s-z} ds, \quad z \in \omega.$$

Bevis. Fixera $z \in \omega$. Tag $r > 0$ så litet att den slutna skivan

$$D_r = \bar{D}(z, r) = \{s \in \mathbb{C} : |s - z| \leq r\}$$

ligger helt i ω , och sätt

$$\omega_\epsilon = \omega \setminus D_\epsilon, \quad 0 < \epsilon < r.$$

Om vi ger randen C_ϵ till D_ϵ moturs orientering, så blir

$$\partial\omega_\epsilon = \partial\omega - C_\epsilon,$$

och eftersom funktionen $s \mapsto f(s)/(s - z)$ är analytisk och $\mathcal{C}^1$ i området $\Omega \setminus \{z\}$, som innehåller $\bar{\omega}_\epsilon$, ger Cauchys integralsats att

$$0 = \int_{\partial\omega_\epsilon} \frac{f(s)}{s - z} ds = \int_{\partial\omega} \frac{f(s)}{s - z} ds - \int_{C_\epsilon} \frac{f(s)}{s - z} ds,$$

vilket kan skrivas

$$(*) \quad \int_{\partial\omega} \frac{f(s)}{s - z} ds = \int_{C_\epsilon} \frac{f(s)}{s - z} ds = \int_{C_\epsilon} \frac{f(s) - f(z)}{s - z} ds + f(z) \int_{C_\epsilon} \frac{ds}{s - z}.$$

ML-uppskattning ger att

$$\left| \int_{C_\epsilon} \frac{f(s) - f(z)}{s - z} ds \right| \leq \max_{s \in C_\epsilon} \frac{|f(s) - f(z)|}{|s - z|} \cdot 2\pi\epsilon = 2\pi \max_{s \in C_\epsilon} |f(s) - f(z)| \rightarrow 0 \quad \text{då } \epsilon \rightarrow 0^+,$$

ty f är kontinuerlig i z . Eftersom $\int_{C_\epsilon} ds/(s - z) = 2\pi i$ (jfr Exempel 3.6) följer Cauchys integralformel genom att låta $\epsilon \rightarrow 0^+$ i (*). ■

3.21. Exempel. Vi ska beräkna

$$I = \int_C \frac{\text{Log } z}{(z - 1)^3(z - 4)} dz,$$

där C är konturen i figuren.

Om vi sätter $f(z) = (\text{Log } z)/(z - 1)^3$ så är f analytisk (och $\mathcal{C}^1$) utom på negativa realaxeln $]-\infty, 0]$ och i punkten $z = 1$, så på och innanför C är f analytisk (och $\mathcal{C}^1$). Cauchys integralformel säger därför att

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{s - z} ds, \quad z \text{ innanför } C,$$

som i specialfallet $z = 4$ ger att

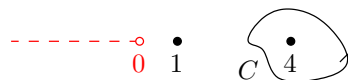
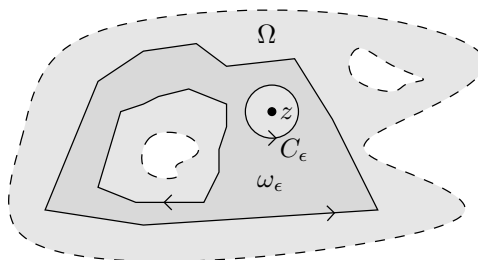
$$f(4) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{s - 4} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\text{Log } s}{(s - 1)^3(s - 4)} ds = \frac{1}{2\pi i} \cdot I, \quad \text{så} \quad I = 2\pi i f(4) = \frac{2\pi i \ln 4}{27}.$$

▲

3.22. Följsats (Cauchys integralformel för derivata). Om $f \in \mathcal{A}(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\Omega)$, så existerar alla derivator $f', f'', f''', \dots$ i Ω , och

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\omega} \frac{f(s)}{(s - z)^{n+1}} ds, \quad z \in \omega, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Speciellt gäller det att $f, f', f'', f''', \dots \in \mathcal{A}(\Omega) \cap \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.



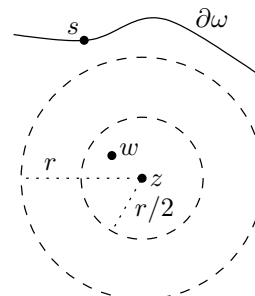
Bevis. Vi bevisar först integralformeln för f' , d.v.s. fallet $n = 1$. Sätt

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\omega} \frac{f(s)}{(s-z)^2} ds, \quad z \in \omega;$$

vi ska alltså visa att $f'(z) = g(z)$.

Fixera $z \in \omega$ och välj $r > 0$ som i början av beviset av Cauchys integralformel, d.v.s. så att den slutna skivan $\bar{D}(z, r)$ ligger helt i ω . Om $s \in \partial\omega$ blir $|s - z| > r$, och om dessutom w ligger så nära z att $|w - z| < r/2$, så ligger w i ω och $|s - w| \geq |s - z| - |w - z| > r/2$, se figur. Eftersom en enkel omskrivning ger att

$$\left(\frac{1}{s-w} - \frac{1}{s-z} \right) \frac{1}{w-z} - \frac{1}{(s-z)^2} = \frac{w-z}{(s-w)(s-z)^2}$$



får vi, med Cauchys integralformel för f och ML-uppskattning, att

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - g(z) \right| &= \left| \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\omega} \frac{f(s)}{s-w} ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\omega} \frac{f(s)}{s-z} ds \right) \frac{1}{w-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\omega} \frac{f(s)}{(s-z)^2} ds \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\omega} \frac{w-z}{(s-w)(s-z)^2} f(s) ds \right| \leq \frac{|w-z|}{(r/2) \cdot r^2} \cdot \frac{L(\partial\omega)}{2\pi} \cdot \max_{s \in \partial\omega} |f(s)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

när $w \rightarrow z$, så $\lim_{w \rightarrow z} (f(w) - f(z))/(w - z) = g(z)$; m.a.o. är $f'(z) = g(z)$.

* Det allmänna fallet visas med induktion över n , m.h.a. den något besvärligare omskrivningen

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{(s-w)^{n+1}} - \frac{1}{(s-z)^{n+1}} \right) \frac{1}{w-z} - \frac{n+1}{(s-z)^{n+2}} \\ = \frac{w-z}{(s-w)^{n+1}(s-z)^{n+2}} \sum_{k=0}^n (s-w)^{n-k} \sum_{l=0}^k (s-z)^{k-l} (s-w)^l; \end{aligned}$$

beloppet av detta begränsas av $C|w-z|/((r/2)^{n+1}r^{n+2})$, där C inte beror på w eller z utan endast på diametern av $\bar{\omega}$ och n . Detaljerna lämnas åt den intresserade läsaren. ■

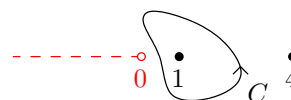
3.23. Anmärkning (*Derivering innanför integraltecknet). Cauchys integralformel för derivata kan också bevisas genom att man visar att man får derivata Cauchys integralformel genom att flytta z -deriveringen innanför integraltecknet:

$$f'(z) = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\omega} \frac{f(s)}{s-z} ds \right) \stackrel{*}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\omega} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f(s)}{s-z} \right) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\omega} \frac{f(s)}{(s-z)^2} ds,$$

och sedan får man $f'', f''', \dots$ genom upprepade derivering på samma sätt; steget * ovan är alltså det kritiska steget och kräver naturligtvis ett bevis, jfr t.ex. Persson-Böiers avsnitt 5.1. ▲

3.24. Exempel. Vi ska, som i Exempel 3.21, beräkna

$$I = \int_C \frac{\operatorname{Log} z}{(z-1)^3(z-4)} dz,$$



men nu i stället längs konturen C i figuren.

Denna gång sätter vi $f(z) = (\operatorname{Log} z)/(z-4)$; då är f analytisk (och $\mathcal{C}^1$) utom på negativa realaxeln $]-\infty, 0]$ och i punkten $z = 4$, så på och innanför C är f analytisk (och $\mathcal{C}^1$). Cauchys integralformel för derivata ger att

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}} ds, \quad n \in \mathbb{N}, \quad z \text{ innanför } C,$$

som i specialfallet $n = 2$, $z = 1$ ger att

$$\frac{f''(1)}{2!} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s-1)^3} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\operatorname{Log} s}{(s-1)^3(s-4)} ds = \frac{1}{2\pi i} \cdot I,$$

så

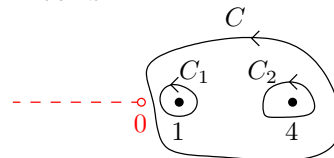
$$I = 2\pi i \cdot \frac{f''(1)}{2!} = \pi i \left(\frac{2 \operatorname{Log} z}{(z-4)^3} + \frac{4-3z}{z^2(z-4)^2} \right) \Big|_{z=1} = \frac{\pi i}{9}.$$

▲

3.25. Exempel. Vi ska ännu en gång beräkna samma integral som i de två senaste exemplen, men nu längs konturen C i figuren till höger, som omsluter både $z = 1$ och $z = 4$.

Integranden $g(z) = (\operatorname{Log} z)/((z-1)^3(z-4))$ är analytisk (och $\mathcal{C}^1$) på och innanför C utom i $z = 1$ och $z = 4$. Vi låter därför C_1 och C_2 vara små kurvor runt $z = 1$ respektive $z = 4$, som i figuren, och Cauchys integralsats ger nu att $\int_{C-C_1-C_2} g(z) dz = 0$, d.v.s. att

$$I = \int_C g(z) dz = \int_{C_1} g(z) dz + \int_{C_2} g(z) dz = I_1 + I_2.$$



Integralerna I_1 och I_2 har vi redan beräknat: I Exempel 3.21 såg vi att $I_2 = 2\pi i (\ln 4)/27$ och i Exempel 3.24 att $I_1 = \pi i/9$, så

$$I = I_1 + I_2 = \frac{i\pi}{27} (3 + 2 \ln 4).$$

▲

★ ÖVNINGAR

★ **3.10** Beräkna

$$I_1 = \int_C \frac{dz}{z-1} \quad \text{och} \quad I_2 = \int_C \frac{dz}{(z-1)^2}$$

då C är följande cirklar, ett varv moturs: (a) $|z-1| = 2$ (b) $|z| = 1/2$ (c) $|z| = 2$.

★ **3.11** Låt $I(r) = \int_{C_r} \frac{dz}{1+z^3}$, där C_r är cirkeln $|z| = r$ tagen ett varv i positiv led och $r > 1$.

(a) Utan att beräkna $I(r)$ exakt, visa att $|I(r)| \leq \frac{2\pi r}{r^3-1}$ då $r > 1$.

(b) Motivera varför $I(r)$ är oberoende av r då $r > 1$.

(c) Beräkna $I(r)$ då $r > 1$ m.h.a. (a) och (b).

★ **3.12** Beräkna $\int_C \frac{\cos s}{s-2} ds$ och $\int_C \frac{\cos s}{(s-2)^2} ds$, där C är cirkeln $|s| = 4$ tagen ett varv moturs.

★ **3.13** Räkna ut $\int_C \frac{e^z dz}{z^2+1}$, där C är kvadraten $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| = 2$ ett varv moturs.

★ **3.14** Låt C vara en enkel sluten kurva med positiv orientering. Beräkna $\int_C \frac{s^3+2s}{(s-z)^3} ds$, $z \notin C$.

★ **3.15** Räkna ut $\int_C \frac{\cosh 2z}{z^5} dz$, där C är ellipsen $x^2 + 4y^2 = 1$ ett varv medurs.

★ **3.16** Beräkna $\int_C \left(1 + z^2 + \frac{1}{z^2+1} \right) dz$ om C är halvcirkeln från $\sqrt{3}$ till $-\sqrt{3}$ i övre halvplanet.

★ **3.17** Beräkna $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\bar{z}^2 - i}{z-i} dz$, då C är cirkeln $|z| = 2$ tagen ett varv i positiv led.

3.5 *Regularitet. Lokala och globala primitiver m.m.

Vi ska i detta avsnitt, till att börja med, visa att det extra kravet att $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ i integralformlerna i Avsnitt 3.4 faktiskt inte behövs, och det sker i två steg nedan: Sats 3.26 och Sats 3.27.

Vi påminner först om att analytiska funktioner i alla fall är kontinuerliga, enligt Proposition 1.18 på s. 9: $f \in \mathcal{A}(\Omega) \Rightarrow f \in \mathcal{C}(\Omega)$.

3.26. Sats (Cauchy-Goursats sats). Om $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, så är

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$$

för varje sluten triangelyta $\Delta \subset \Omega$.

Bevis. Eftersom $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ existerar alla integraler $\int_{\partial\Delta} f(z) dz$. Tag en godtycklig $\Delta \subset \Omega$ och sätt

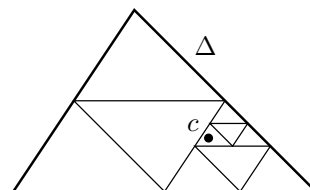
$$I = \left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right|.$$

Vi ska visa att $I = 0$, och därmed att $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$.

Låt $\ell = L(\partial\Delta)$ vara triangelns omkrets, och låt $\epsilon > 0$ vara godtyckligt. Sätt $\Delta_0 = \Delta$, och dela upp Δ_0 i fyra kongruenta deltrianglar $\Delta_0^1, \Delta_0^2, \Delta_0^3, \Delta_0^4$ genom att förbinda mittpunkterna på triangelns tre sidor (se figur). Då är

$$\int_{\partial\Delta_0} = \int_{\partial\Delta_0^1} + \int_{\partial\Delta_0^2} + \int_{\partial\Delta_0^3} + \int_{\partial\Delta_0^4}$$

eftersom kurvintegralerna längs deltriangelarnas gemensamma sidor tar ut varandra. Triangelolikheten ger att åtminstone en av dessa fyra deltrianglar – kalla den Δ_1 – uppfyller att $\left| \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz \right| \geq I/4$. Uppenbarligen är $L(\partial\Delta_1) = \ell/2$.



Upprepa nu förfarandet med Δ_1 . Då finner vi en mindre triangel Δ_2 med $\left| \int_{\partial\Delta_2} f(z) dz \right| \geq I/4^2$ och $L(\partial\Delta_2) = \ell/2^2$, och vi får successivt trianglar $\Delta_0 \supseteq \Delta_1 \supseteq \Delta_2 \supseteq \dots$ med

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f(z) dz \right| \geq \frac{I}{4^n} \quad \text{och} \quad L(\partial\Delta_n) = \frac{\ell}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Man kan visa att det finns precis en punkt $c \in \Omega$ som ligger i alla Δ_n (se t.ex. TATA34 Analys överkurs), och eftersom f är analytisk i Ω existerar $f'(c)$. Till vårt $\epsilon > 0$ finns därför något $\delta > 0$ sådant att $D(c, \delta) \subset \Omega$ och

$$|f(z) - f(c) - f'(c)(z - c)| \leq \epsilon |z - c|, \quad z \in D(c, \delta).$$

Tag nu N så stort att $\Delta_N \subset D(c, \delta)$. Eftersom $\int_{\partial\Delta_N} dz = 0 = \int_{\partial\Delta_N} z dz$ (t.ex. eftersom z och $z^2/2$ är primitiva funktioner till 1 respektive z och $\partial\Delta_N$ är en sluten kurva) ger ML-uppskattning att

$$\begin{aligned} 0 \leq I &\leq 4^N \left| \int_{\partial\Delta_N} f(z) dz \right| = 4^N \left| \int_{\partial\Delta_N} (f(z) - f(c) - f'(c)(z - c)) dz \right| \\ &\leq 4^N \epsilon \max_{z \in \partial\Delta_N} |z - c| \cdot L(\partial\Delta_N) \leq 4^N \epsilon (L(\partial\Delta_N))^2 = 4^N \epsilon (\ell/2^N)^2 = \ell^2 \epsilon. \end{aligned}$$

Alltså gäller olikheterna $0 \leq I \leq \ell^2 \epsilon$, och eftersom $\epsilon > 0$ är godtyckligt måste därför $I = 0$. ■

Nu följer en omvändning:

3.27. Sats. Antag att $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ och att

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$$

för varje sluten triangelyta $\Delta \subset \Omega$. Då gäller följande:

1. **(Existens av lokal primitiv)** I varje öppen cirkelskiva $D \subseteq \Omega$ finns det en funktion $F \in \mathcal{A}(D) \cap \mathcal{C}^1(D)$ sådan att $F' = f$ i D .
2. **(Moreras sats)** $f \in \mathcal{A}(\Omega) \cap \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Bevis. Tag $D = D(c, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - c| < r\} \subseteq \Omega$, och definiera

$$F(z) = \int_{[c,z]} f(s) ds, \quad z \in D,$$

där $[c, z]$ som vanligt står för sträckan från c till z . Då blir, för $z, w \in D$,

$$F(w) - F(z) = \int_{[c,w]} f(s) ds - \int_{[c,z]} f(s) ds \stackrel{*}{=} \int_{[z,w]} f(s) ds = \int_{[z,w]} (f(s) - f(z)) ds + f(z) \int_{[z,w]} ds,$$

där vi i steg $*$ använder oss av antagandet att integralen längs triangeln med hörn c, z, w är noll. Division av båda led med $\int_{[z,w]} ds = w - z$ då $w \neq z$, överflyttning av $f(z)$ och ML-uppskattning ger sedan att

$$\left| \frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{w - z} \int_{[z,w]} (f(s) - f(z)) ds \right| \leq \max_{s \in [z,w]} |f(s) - f(z)| \rightarrow 0$$

då $w \rightarrow z$, eftersom f är kontinuerlig i z . Alltså får vi att $F'(z) = f(z)$, och detta gäller för alla $z \in D$, så F är en primitiv till f i D , varför $F \in \mathcal{A}(D)$. Att $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ medför nu att $F \in \mathcal{A}(D) \cap \mathcal{C}^1(D)$.

Enligt Cauchys integralformel för derivata, Följdsats 3.22, följer det nu att $F \in \mathcal{A}(D) \cap \mathcal{C}^\infty(D)$, och eftersom $f = F'$ även att $f \in \mathcal{A}(D) \cap \mathcal{C}^\infty(D)$. Men deriverbarhet är en lokal egenskap, varför $f \in \mathcal{A}(\Omega) \cap \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. ■

Om vi kombinerar Cauchy-Goursats sats och Moreras sats, och betänker att analytiska funktioner är kontinuerliga, får vi således att

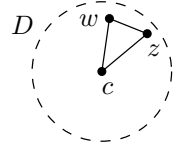
$$f \in \mathcal{A}(\Omega) \quad \implies \quad f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega),$$

och vi kan därför – i efterhand – stryka det extra kravet att $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ i Cauchys integralsats och Cauchys integralformel.

Dessutom följer det nu av ovanstående satser att varje analytisk funktion i ett område Ω har *lokala* primitiva funktioner, d.v.s. att

$$f \in \mathcal{A}(\Omega) \text{ och } D = D(c, r) \subseteq \Omega \quad \implies \quad \text{det finns en } F \in \mathcal{A}(D) \text{ sådan att } F' = f \text{ i } D,$$

jfr Anmärkning 3.11. Inte nog med det – till nollskilda analytiska funktioner kan man också hitta lokala analytiska logaritmer och rötter:



3.28. Följdsats (Lokal existens av analytiska logaritmer och rötter). Antag att $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ och att $f(z) \neq 0$ för alla $z \in \Omega$. I varje skiva $D = D(c, r) \subseteq \Omega$ finns det då en funktion $g \in \mathcal{A}(D)$ sådan att

$$\exp g = f \quad \text{i } D,$$

och dessutom finns det funktioner $h_m \in \mathcal{A}(D)$, $m = 1, 2, 3, \dots$, sådana att

$$(h_m)^m = f \quad \text{i } D.$$

Bevis. Sätt $\phi = f'/f$; eftersom f är analytisk och nollskild är ϕ analytisk, och $f' - \phi f = 0$. Om $D = D(c, r) \subseteq \Omega$ finns det enligt ovan en funktion $\Phi \in \mathcal{A}(D)$ sådan att $\Phi' = \phi$ i D , så $e^{-\Phi}$ är en (nollskild) integrerande faktor till differentialekvationen $f' - \phi f = 0$ i D :

$$f' - \phi f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (f e^{-\Phi})' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f e^{-\Phi} = C \quad \Leftrightarrow \quad f = C e^{\Phi} \quad \text{i } D,$$

där C är en nollskild konstant (ty $f \neq 0$); här har vi använt Proposition 1.27 på s. 13. Tag sedan $c \in \mathbb{C}$ sådant att $e^c = C$ och låt $g = c + \Phi$; då är $e^g = e^c e^{\Phi} = C e^{\Phi} = f$ i D , och beviset är klart.

Avslutningsvis sätter vi $h_m = e^{g/m}$; då blir h_m analytisk i D , och $(h_m)^m = e^g = f$. ■

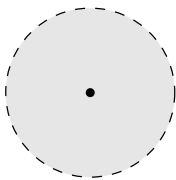
3.29. Anmärkning (Faran med att skriva $g = \log f$). Funktionen g i Följdsats 3.28 är alltså en gren till den flervärda funktionen $\log f$ i D , och ibland skriver man t.o.m. (men något oegentligt) $g = \log f$. Det är viktigt att förstå att även om $f(z_1) = f(z_2)$ i två olika punkter i D så kan $g(z_1) \neq g(z_2)$. Som ett enkelt exempel kan vi ta $f(z) = z^4$ i skivan $D = D(2, 2)$. Då duger $g(z) = 4 \operatorname{Log} z$ eftersom $e^{4 \operatorname{Log} z} = (e^{\operatorname{Log} z})^4 = z^4$ i D , och vi ser att $f(1+i) = -4 = f(1-i)$ men att $g(1+i) = \ln 4 + i\pi \neq \ln 4 - i\pi = g(1-i)$; notera att punkterna $1 \pm i$ verkligen ligger i D .

Jfr också Exempel 2.12 på s. 24, där vi konstruerade en gren till $\log(z^2 + 3z)$ som antar olika värden i punkterna $3i$ och $-3-3i$ trots att $z^2 + 3z = -9 + 9i$ i båda. ▲

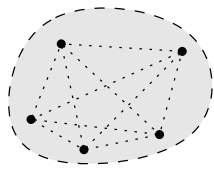
I Sats 3.27 hittade vi (lokala) primitiver i *cirkelskivor*, men om man skärskådar beviset ser man att det enda som egentligen krävs, förutom att $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ och att $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$ för varje sluten triangelyta $\Delta \subset \Omega$, är att det går att definiera en funktion

$$F(z) = \int_{[c,z]} f(s) ds, \quad z \in \Omega,$$

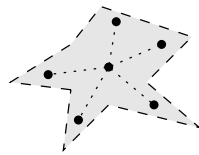
d.v.s. att det finns någon punkt $c \in \Omega$ sådan att sträckan $[c, z] \subseteq \Omega$ närhelst $z \in \Omega$; ett område Ω med denna egenskap kallas **stjärnformigt** (m.a.p. c). Specialfall av stjärnformiga områden är s.k. **konvexa** områden: ett område sägs vara konvext om sträckan $[z_1, z_2] \subseteq \Omega$ närhelst $z_1, z_2 \in \Omega$. Cirkelskivor är i sin tur specialfall av konvexa områden.



Cirkelskiva



Konvext område



Stjärnformigt område



Enkelt sammanhängande område

I stjärnformiga områden Ω har således varje analytisk funktion f en primitiv funktion F , och om dessutom $f \neq 0$ finns det en analytisk funktion g sådan att $e^g = f$. Det visar sig att detta är sant i mer generella områden än så, nämligen i s.k. **enkelt sammanhängande** områden, vilket definitionsmässigt är områden i vilka varje sluten kurva kan deformerats kontinuerligt till en punkt utan att lämna området under processen, en process som preciseras i Anmärkning 3.31 nedan. Först ett exempel.

3.30. Exempel (Primitiv till $1/z$). Låt $\Omega = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. Området Ω är stjärnformigt m.a.p. 1 (t.ex.) – dock inte konvext – och funktionen $f(z) = 1/z$ är analytisk i Ω , så

$$F(z) := \int_{[1,z]} \frac{ds}{s}, \quad z \in \Omega,$$

är en primitiv till f i Ω . Eftersom $F'(z) = 1/z$ i Ω och $F(1) = 0$ inser vi att $F(z) = \text{Log } z$, principalgrenen till logaritmen; notera att Ω är det största området där $\text{Log } z$ är analytisk.

Att

$$F(z) = \text{Log } z = \ln |z| + i \text{Arg } z$$

kan också ses via direkt uträkning av integralen, med parametrisering av sträckan $[1, z]$, men enklare är att använda att vi nu *vet* att f har en primitiv i Ω och att vi därför kan integrera längs vilken styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva som helst i Ω från 1 till z för att få värdet $F(z)$, enligt Sats 3.10. Vi går därför längs positiva realaxeln från 1 till $|z|$ och därefter längs cirkeln med radie $|z|$ från $|z|$ till $z = |z|e^{i\theta}$, där $\theta = \text{Arg } z \in]-\pi, \pi[$, och får, med uppenbara parametriseringar,

$$F(z) = \int_1^{|z|} \frac{dt}{t} + \int_0^\theta \frac{|z|ie^{it} dt}{|z|e^{it}} = \ln |z| + i\theta = \ln |z| + i \text{Arg } z = \text{Log } z, \quad z \in \Omega.$$

▲

3.31. Anmärkning (Deformation av kurvor). Låt $I = [0, 1]$. En sluten kurva $\gamma_0 : I \rightarrow \Omega$ sägs vara kontinuerligt deformierbar i Ω till en sluten kurva $\gamma_1 : I \rightarrow \Omega$ om det finns en kontinuerlig funktion $D : I \times I \rightarrow \Omega$ sådan att $D(t, 0) = \gamma_0(t)$ och $D(t, 1) = \gamma_1(t)$, och det för varje $s \in I$ är så att $t \mapsto D(t, s)$ är en sluten kurva $\gamma_s : I \rightarrow \Omega$; γ_s kan alltså betraktas som en övergångskurva mellan startkurvan γ_0 och slutkurvan γ_1 . Om en sådan funktion D finns, och kurvorna γ_0 och γ_1 dessutom är styckvis $\mathcal{C}^1$, kan man visa att

$$f \in \mathcal{A}(\Omega) \quad \implies \quad \int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

Detta är således en generalisering av specialfall 2 av Cauchys integralsats på s. 47, där vi visade att $\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$ om C_1 och C_2 är *enkla* slutna styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurvor (d.v.s. konturer) sådana att $\partial\omega = C_1 - C_2$, randen till ett begränsat område ω , och f är analytisk i ett område Ω som innehåller $\bar{\omega}$; i denna enklare situation kan C_1 deformeras kontinuerligt i Ω till C_2 . Vinsten är att kurvorna γ_0 och γ_1 inte behöver vara enkla, och att de kan ha gemensamma punkter.

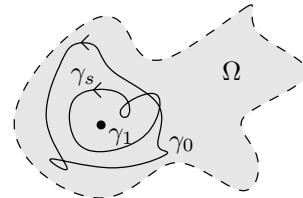
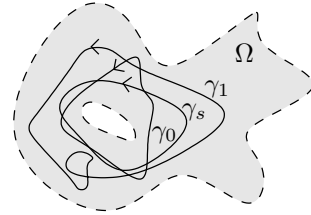
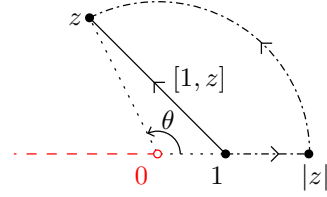
I fallet då $\gamma_1(t) = c \in \Omega$ för alla $t \in I$, d.v.s. då kurvan γ_1 är konstant (en punkt), säger vi också att γ_0 är sammandragbar (till en punkt) i Ω om γ_0 är kontinuerligt deformierbar i Ω till γ_1 ; om γ_0 dessutom är styckvis $\mathcal{C}^1$ följer det då av föregående stycke att

$$f \in \mathcal{A}(\Omega) \quad \implies \quad \int_{\gamma_0} f(z) dz = 0,$$

vilket är en generalisering av specialfall 1 av Cauchys integralsats. Ett område Ω där varje sluten kurva är sammandragbar sägs vara enkelt sammanhängande.

Ett enkelt sammanhängande område (i planet) kan ses som ett område utan hål. Området i den första figuren i denna anmärkning är *inte* enkelt sammanhängande.

Mera om deformation av kurvor och s.k. homotopier i TATA78 Komplex analys bk. ▲



Genom att väsentligen samla ihop det vi redan har gjort kan vi nu formulera följande sats:

3.32. Sats (Villkor för existens av lokala och globala primitiver). Antag att $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Då gäller (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d) $\Leftrightarrow$ (e) där

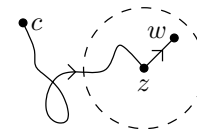
- (a) Det finns en *global* primitiv funktion F till f i Ω , d.v.s. en funktion $F \in \mathcal{A}(\Omega)$ sådan att $F' = f$ i Ω .
- (b) $\int_C f(z) dz = 0$ för alla slutna styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurvor C i Ω .
- (c) $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$ för alla slutna triangelytor $\Delta \subseteq \Omega$.
- (d) Det finns *lokala* primitiva funktioner till f i Ω , d.v.s. till varje cirkelskiva (eller stjärnformigt område) $D \subseteq \Omega$ finns det en funktion $F \in \mathcal{A}(D)$ sådan att $F' = f$ i D .
- (e) $f \in \mathcal{A}(\Omega)$.

Ifall Ω är enkelt sammanhängande gäller även implikationen (b) $\Leftarrow$ (c), och då råder således ekvivalens mellan alla fem: (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d) $\Leftrightarrow$ (e).

Bevis. Här är allt utom (b) $\Rightarrow$ (a), och (c) $\Rightarrow$ (b) ifall Ω är enkelt sammanhängande, redan bevisat, närmare bestämt (a) $\Rightarrow$ (b): Sats 3.10; (b) $\Rightarrow$ (c): Trivialt; (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (e): Sats 3.27; och (e) $\Rightarrow$ (c): Sats 3.26.

Återstår alltså, till att börja med, att visa att (b) $\Rightarrow$ (a). Fixera $c \in \Omega$ och sätt

$$F(z) = \int_{C_{c,z}} f(s) ds, \quad z \in \Omega,$$



där $C_{c,z}$ är en godtycklig styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva (liksom alla kurvor som omtalas nedan) i Ω från c till z . Att F är väldefinierad följer av att om $\tilde{C}_{c,z}$ är en annan kurva i Ω från c till z så är $C := C_{c,z} - \tilde{C}_{c,z}$ en sluten kurva i Ω varför $\int_C f(s) ds = 0$, och därmed är $\int_{\tilde{C}_{c,z}} f(s) ds = \int_{C_{c,z}} f(s) ds$. Vi ska nu visa att $F'(z) = f(z)$ för alla $z \in \Omega$. Fixera därför $z \in \Omega$ och välj sedan $r > 0$ så litet att $D := D(z, r) \subseteq \Omega$. Vi får att

$$F(w) = \int_{C_{c,w}} f(s) ds = \int_{C_{c,z} + [z,w]} f(s) ds = F(z) + \int_{[z,w]} f(s) ds, \quad w \in D,$$

och att $F'(z) = f(z)$ följer nu på samma sätt som i beviset av Sats 3.27, efter steg *.

Till sist, om Ω är enkelt sammanhängande är det, enligt Anmärkning 3.31 ovan, sant att (e) $\Rightarrow$ (b), och eftersom (c) $\Rightarrow$ (e) följer det att (c) $\Rightarrow$ (b). ■

3.6 Medelvärdesegenskapen. Maximumprincipen

I detta avsnitt ska vi studera ett par av de intressanta konsekvenser som Cauchys integralformel har, nämligen medelvärdesegenskapen och maximumprincipen.

Innan vi går vidare noterar vi att vi i fortsättningen av denna text – tack vare resultaten om regularitet i Avsnitt 3.5 – kan utnyttja att vi nu vet att analytiska funktioner med automatik är oändligt deriverbara: $f \in \mathcal{A}(\Omega) \Rightarrow f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$; t.ex. kan det extra kravet att $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ i Cauchys integralformel strykas fr.o.m. nu.

En omedelbar följd av Cauchys integralformel är följande:

3.33. Proposition. Om $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, $D(c, R) \subseteq \Omega$ och $0 \leq r < R$, så är

$$f(c) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c + re^{i\theta}) d\theta \quad (\text{medelvärdesegenskapen för } f),$$

och

$$|f(c)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(c + re^{i\theta})| d\theta \quad (\text{submedelvärdesegenskapen för } |f|).$$

Bevis. Formeln för $f(c)$ är trivial om $r = 0$. Om $0 < r < R$, låt $s = c + re^{i\theta}$, $\theta : 0 \rightarrow 2\pi$, vara en parametrisering av cirkeln $C_r : |s - c| = r$ tagen ett varv moturs. Cauchys integralformel och denna parametrisering ger genast att

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(s)}{s - c} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(c + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c + re^{i\theta}) d\theta.$$

Olikheten följer sedan omedelbart av Proposition 3.1:

$$|f(c)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c + re^{i\theta}) d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(c + re^{i\theta})| d\theta.$$

■

Medelvärdesegenskapen säger alltså att $f(c)$ är medelvärdet av de värden f antar på cirkeln $|z - c| = r$, vilket är en mycket stark egenskap hos analytiska funktioner. En direkt konsekvens av medelvärdesegenskapen är maximumprincipen nedan.

Vi påminner om att Ω alltid står för ett område.

3.34. Sats (Maximumprincipen). Om $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ och $|f|$ antar ett största värde i Ω , så är f konstant.

Bevis. Antag att $|f|$ antar ett största värde i Ω , d.v.s. att det finns en punkt $c \in \Omega$ sådan att $|f(z)| \leq |f(c)|$ för alla $z \in \Omega$. Låt $M = |f(c)|$, och tag en skiva $D(c, R) \subseteq \Omega$. Submedelvärdesegenskapen för $|f|$ ger då att

$$0 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(c + re^{i\theta})| d\theta - |f(c)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|f(c + re^{i\theta})| - M) d\theta, \quad 0 \leq r < R.$$

Sätt $g(\theta) = |f(c + re^{i\theta})| - M$ för fixt r . Då är $g(\theta) \leq 0$ för alla θ , och eftersom g är kontinuerlig och samtidigt $\int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta \geq 0$ måste därför $g(\theta) = 0$ för alla θ ; således är $|f(c + re^{i\theta})| = M$ för alla θ . Men detta gäller för varje r med $0 \leq r < R$, så $|f| = M$ i hela skivan $D(c, R)$, och att $|f|$ är konstant i $D(c, R)$ medför att f är konstant där, enligt Följdsats 1.28 på s. 13, så $f = f(c)$ i skivan.

Tag nu en godtycklig punkt $w \in \Omega$, och förbind c med w med en kedja av cirkelskivor $D_0, D_1, \dots, D_n$ enligt Hjälpssats 1.12 på s. 8. Enligt ovan är $f = f(c)$ i D_0 , och eftersom $c_1 \in D_0$ är $f(c_1) = f(c)$ och $|f(c_1)| = M$, så resonemanget ovan kan upprepas i D_1 , vilket ger att $f = f(c)$ även i D_1 . Efter ändligt många steg får vi att $f = f(c)$ även i D_n , så $f(w) = f(c)$. Eftersom $w \in \Omega$ var godtycklig är alltså $f(z) = f(c)$ i hela Ω . ■

3.35. Anmärkning. Vi ska senare, i Anmärkning 4.45 på s. 86, visa att det räcker att $|f|$ antar ett lokalt maximum någonstans i Ω för att f ska vara konstant. ▲

Följande konsekvens av maximumprincipen är ofta användbar:

3.36. Följsats (Maximumprincipen i begränsade områden). Om Ω är begränsad och $f \in \mathcal{A}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, så antar $|f|$ sitt största värde någonstans på randen $\partial\Omega$.

Bevis. Eftersom $|f|$ är kontinuerlig och reellvärd på den kompakta mängden $\bar{\Omega}$ antar $|f|$ ett maximum i någon punkt $c \in \bar{\Omega}$. Om $c \in \partial\Omega$ är vi klara, och om $c \in \Omega$ visar maximumprincipen (Sats 3.34) att f är konstant i Ω , och på grund av kontinuitet är f därför konstant i hela $\bar{\Omega}$, varför $|f|$ även nu antar sitt maximum på randen $\partial\Omega$. ■

3.37. Exempel (Om Ω är obegränsad). Det är väsentligt att Ω är begränsad i Följsats 3.36, ty annars behöver inte maximum antas. Om exempelvis $f(z) = e^{-iz}$ och $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, övre halvplanet, så är f hel, och speciellt gäller det att $f \in \mathcal{A}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$. På randen $\partial\Omega = \mathbb{R}$, realaxeln, är $|f(x)| = |e^{-ix}| = 1$, men $|f|$ antar inte något största värde över huvud taget på $\bar{\Omega}$ eftersom t.ex. $|f(iy)| = e^y \rightarrow +\infty$ då $y \rightarrow +\infty$. ▲

3.38. Exempel. Låt $f(z) = 2z^2 + 3iz + 1$. Vi ska bestämma största värdet av $|f(z)|$ på den slutna enhetsskivan $|z| \leq 1$.

Maximum av $|f|$ antas någonstans på randen, och eftersom f inte är konstant kan maximum inte antas i någon inre punkt. Det räcker alltså att undersöka enhetscirkeln $|z| = 1$ för att hitta alla punkter där maximum antas.

Vi undersöker först vad triangelolikheten kan ge:

$$|2z^2 + 3iz + 1| \leq |2z^2| + |3iz| + |1| = 2|z|^2 + 3|z| + 1 = 6, \quad |z| = 1,$$

med likhet precis då talen $2z^2$, $3iz$ och 1 , som vektorer, är parallella och lika riktade (och $|z| = 1$, förstås), vilket gäller precis då $z^2 = 1$ och $iz = 1$. Detta är dock en motsägelse, så 6 är inte största värdet; allt vi vet hittills är att $|f(z)| < 6$ då $|z| \leq 1$ (jfr Övning 1.14 på s. 5).

Vi måste undersöka $|f|$ mera noggrant, och parametriserar därför enhetscirkeln $|z| = 1$ med $z = e^{i\theta}$ och får att

$$\begin{aligned} |2z^2 + 3iz + 1|^2 &= |2e^{i2\theta} + 3ie^{i\theta} + 1|^2 \stackrel{*}{=} |2e^{i\theta} + 3i + e^{-i\theta}|^2 = |3\cos\theta + i(3 + \sin\theta)|^2 \\ &= 9\cos^2\theta + (3 + \sin\theta)^2 = 9(1 - t^2) + (3 + t)^2 = 18 + 6t - 8t^2, \end{aligned}$$

där vi i steg $*$ använder att $|e^{i\theta}| = 1$, och på slutet sätter $t = \sin\theta$. Att optimera polynomet $p(t) = 18 + 6t - 8t^2$ då $-1 \leq t \leq 1$ är enkelt (kvadratkomplettering eller funktionsundersökning), och vi får största värdet $p(3/8) = 153/8$. Värdet $t = 3/8$ svarar mot att $\sin\theta = 3/8$ och $\cos\theta = \pm\sqrt{55}/8$, så

$$|f|_{\max} = \left| f\left(\frac{\pm\sqrt{55} + 3i}{8}\right) \right| = \sqrt{\frac{153}{8}} = \frac{3\sqrt{34}}{4}.$$

▲

* ÖVNINGAR

- * **3.18** Bestäm största värdet av $|f(z)|$ då $|z| \leq 1$, och ange de punkter där maximum antas, om $f(z)$ är (a) $z^2 + 2i$ (b) $z/(z^2 + 3)$ (c) $(z - 1)^2(z + 1)$.
- * **3.19** Bestäm maximum och minimum av $|2z^2 - z - 1|$ då $|z| \leq 2$.
- * **3.20** Låt Ω vara remsan $|\operatorname{Re} z| < \pi/2$. Visa att $f(z) = \exp(\exp iz)$ är obegränsad i Ω men att $|f(z)| = 1$ för alla z på randen till Ω . Är detta förenligt med maximumprincipen?

- ★ **3.21** Antag att f är analytisk i $|z| < 1$ och kontinuerlig i $|z| \leq 1$. Antag vidare att $|f(z)| > 1$ för alla z med $|z| = 1$ och att $f(0) = 1$. Visa att f måste ha ett nollställe någonstans i $|z| < 1$.

4 Serier

Vi ska i detta kapitel bl.a. visa att en funktion f är analytisk om och endast om den lokalt kring varje punkt z_0 i sitt definitionsområde Ω kan skrivas som en konvergent potensserie (Taylorserie), vilket betyder att det finns tal $\delta > 0$ och $c_0, c_1, c_2, \dots \in \mathbb{C}$, som alla får bero på z_0 , sådana att

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots, \quad |z - z_0| < \delta.$$

I själva verket tas denna senare egenskap ofta som *definition* av begreppet (komplex)analytisk, dock inte i denna text (se Definition 1.25 på s. 13).

4.1 Komplexa numeriska serier

I kursen i envariabelanalys behandlades *reella* numeriska serier, se Forsling-Neymark avsnitt 10.1 (Numeriska serier). Steget till *komplexa* numeriska serier är inte långt.

Låt $a_1, a_2, a_3, \dots \in \mathbb{C}$ vara en oändlig följd av tal. Som för reella serier bildar vi delsummorna (eller partialsummorna) $s_n, n = 1, 2, 3, \dots$, av termerna $a_1, a_2, a_3, \dots$ enligt

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

och säger att serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

är **konvergent** om $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ existerar ändligt ($s \in \mathbb{C}$); detta gränsvärde kallas i så fall seriens **summa**, och vi skriver $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$. I annat fall sägs serien vara **divergent**.

Följande båda resultat bör vara kända för reella serier:

4.1. Proposition (Divergenstestet). Om termerna i en serie *inte* går mot 0, så är serien divergent, d.v.s.:

$$a_n \not\rightarrow 0 \text{ då } n \rightarrow \infty \quad \implies \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ är divergent.}$$

Bevis. Vi gör ett indirekt bevis och antar därför att serien är konvergent, d.v.s. att $s_n \rightarrow$ något $s \in \mathbb{C}$ då $n \rightarrow \infty$. Men i så fall får vi genast att $a_n = s_n - s_{n-1} \rightarrow s - s = 0$ då $n \rightarrow \infty$. ■

Som namnet säger är detta ett test för divergens och inte för konvergens. Om $a_n \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$ kan som bekant vad som helst hända; t.ex. är $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ divergent men $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ konvergent.

4.2. Proposition. För den **geometriska serien** med kvot $q \in \mathbb{C}$ gäller följande:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots \quad \text{är} \quad \begin{cases} \text{konvergent med summa } \frac{1}{1-q} & \text{om } |q| < 1, \\ \text{divergent} & \text{om } |q| \geq 1. \end{cases}$$

Bevis. Om $|q| \geq 1$ så är $|q^n| = |q|^n \geq 1$ för alla $n \in \mathbb{N}$, varför termerna q^n inte går mot 0 när $n \rightarrow \infty$; serien är därmed divergent för dessa q enligt divergenstestet. Om $|q| < 1$ ger direkt uträkning av delsummorna, som är geometriska summor, att

$$s_n = \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \rightarrow \frac{1}{1 - q} \text{ då } n \rightarrow \infty, \quad |q| < 1,$$

ty $|q^{n+1}| = |q|^{n+1} \rightarrow 0$ när $n \rightarrow \infty$ för dessa q . ■

Nästa resultat har naturligtvis ingen motsvarighet för reella serier:

4.3. Proposition (Uppdelning i real- och imaginärdelar). Låt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vara en komplex serie. Då gäller följande:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ är konvergent} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_n \text{ och } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_n \text{ är konvergenta,}$$

och i så fall gäller likheterna

$$\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_n \quad \text{och} \quad \operatorname{Im} \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_n.$$

Bevis. Låt s_n , R_n och I_n vara delsummorna till serierna $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$ och $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$, och sätt $s = R + iI$. Då är $s_n = R_n + iI_n$, och påståendet följer direkt av att

$$s_n \rightarrow s \iff R_n \rightarrow R \text{ och } I_n \rightarrow I,$$

vilket, i en snarlik situation, bevisades i Proposition 1.15 på s. 9. ■

Från envariabelanalysen har vi **Jämförelsekriteriet för positiva serier**, som säger att om $0 \leq a_n \leq b_n$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är konvergent, så är också $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, och för seriernas summor gäller då olikheterna $0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. **Satsen om absolutkonvergens** för reella serier har vi också, och den säger som bekant att om den positiva serien $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ är konvergent, så är också den reella serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, och för summorna gäller i så fall olikheten $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Den senare satsen har en motsvarighet för komplexa serier:

4.4. Sats (Absolutkonvergens). Om den positiva serien $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ är konvergent, så är också den komplexa serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, och

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|;$$

vi säger i så fall att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är **absolutkonvergent**.

Bevis. Eftersom $|\operatorname{Re} a_n| \leq |a_n|$ och $|\operatorname{Im} a_n| \leq |a_n|$ ger jämförelsekriteriet att de båda positiva serierna $\sum_{n=1}^{\infty} |\operatorname{Re} a_n|$ och $\sum_{n=1}^{\infty} |\operatorname{Im} a_n|$ är konvergenta. Satsen om absolutkonvergens för reella serier medför därför att de reella serierna $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$ och $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$ är konvergenta, och därmed är den komplexa serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, enligt Proposition 4.3.

Olikheten i satsen bevisas på samma sätt som en liknande olikhet för integraler i Proposition 3.1 på s. 39 eftersom serier har samma linjaritetsegenskaper som integraler. Detaljerna i beviset utelämnas därför här. ■

4.5. Exempel (Konvergensundersökningar). Vi undersöker konvergens för de tre serierna

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+e^{in}}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+in}{n^2} \quad \text{och} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+in e^{i\pi n}}{n^2}.$$

Till att börja med konstaterar vi att divergenstestet inte kan användas på någon av serierna eftersom $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$ och $c_n \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$.

Då

$$|a_n| = \left| \frac{1+e^{in}}{n^2} \right| = \frac{|1+e^{in}|}{n^2} \leq \frac{|1|+|e^{in}|}{n^2} = \frac{2}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

och den positiva serien $\sum_{n=1}^{\infty} 2/n^2$ är konvergent, ger jämförelsekriteriet att $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ är konvergent, och därmed är $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, ja t.o.m. absolutkonvergent.

Vidare får vi att

$$|b_n| = \left| \frac{1+in}{n^2} \right| = \frac{|1+in|}{n^2} = \frac{\sqrt{1+n^2}}{n^2} \geq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

och eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ är divergent är också $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ divergent, enligt jämförelsekriteriet. Satsen om absolutkonvergens ger därför *inte* besked om huruvida $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är konvergent eller divergent. Vi undersöker i stället real- och imaginärdelarna separat, alltså de reella serierna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{och} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

och ser omedelbart att $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} b_n$ är konvergent men att $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} b_n$ är divergent, varför $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är divergent enligt Proposition 4.3.

Slutligen ser vi att

$$c_n = \frac{1+in e^{i\pi n}}{n^2} = \frac{1+i(-1)^n n}{n^2}, \quad \text{så} \quad |c_n| = \frac{\sqrt{1+n^2}}{n^2} \geq \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

varför även $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ är divergent. En undersökning av real- och imaginärdelarna ger här att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{och} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

och båda dessa serier är konvergenta, den senare eftersom den är en Leibnizserie: serien är alternerande och beloppet av termerna, $1/n$, *avtar* mot noll då $n \rightarrow \infty$. Således är $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent enligt Proposition 4.3 (men alltså inte absolutkonvergent). ▲

Vi kommer också att behöva numeriska serier av typen

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k = \dots + a_{-2} + a_{-1} + a_0 + a_1 + a_2 + \dots,$$

där $a_k \in \mathbb{C}$ för alla $k \in \mathbb{Z}$, s.k. **dubbelsidiga serier**. En sådan serie sägs vara konvergent om delsummorna

$$s_{m,n} = a_{-m} + a_{-m+1} + \dots + a_{n-1} + a_n = \sum_{k=-m}^n a_k$$

har ett gränsvärde $s \in \mathbb{C}$ när $m \rightarrow \infty$ och $n \rightarrow \infty$ *oberoende av varandra*; detta gränsvärde sägs i så fall vara seriens summa, och vi skriver $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k = s$. I annat fall sägs serien vara divergent.

Definitionen ovan säger att $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k$ är konvergent med summan $s \in \mathbb{C}$ precis då det till varje $\epsilon > 0$ finns ett positivt heltal N sådant att $|s_{m,n} - s| < \epsilon$ för alla $m \geq N$ och $n \geq N$. Av detta följer att $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ är konvergent om och endast om de båda (vanliga enkelsidiga) serierna $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ och $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} = a_{-1} + a_{-2} + \dots$ är konvergenta, och i så fall blir dess summa summan av dessa två seriers summor:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} = (a_0 + a_1 + a_2 + \dots) + (a_{-1} + a_{-2} + \dots). \quad (4.1)$$

4.2 Komplexa potensserier

I kursen i envariabelanalys behandlades *reella* potensserier, se Forsling-Neymark avsnitt 10.3 (Potensserier). Steget till *komplexa* potensserier är inte heller det särskilt långt.

En komplex potensserie är en serie av formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$$

där $z \in \mathbb{C}$ är en variabel och $c_0, c_1, c_2, \dots \in \mathbb{C}$ är givna konstanter, s.k. koefficienter. För varje fixt z får vi en numerisk serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$, där $a_n = c_n z^n$.

För att hitta var en potensserie konvergerar behöver vi först ett resultat där man jämför numeriska serier med geometriska serier. I envariabelanalysen formulerades rot- och kvotkriterierna – och dessutom bevisades rotkriteriet – och det fungerar på precis samma sätt för komplexa serier:

4.6. Proposition (Jämförelse med geometrisk serie). Låt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ vara en numerisk serie. Om något av gränsvärdena

$$Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (\text{rotkriteriet}) \quad \text{eller} \quad Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad (\text{kvotkriteriet})$$

existerar, $0 \leq Q \leq \infty$, så gäller följande:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{är} \quad \begin{cases} \text{absolutkonvergent om } Q < 1 \text{ (inklusive fallet } Q = 0), \\ \text{divergent om } Q > 1 \text{ (inklusive fallet } Q = \infty). \end{cases}$$

(Kriterierna ger inte besked ifall $Q = 1$, se s. 63.)

Bevis. Beviset är identiskt med beviset i det reella fallet, men för att underlätta diskussionen i Anmärkning 4.7 nedan presenterar vi ändå beviset av rotkriteriet. Antag därför att $\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow Q$ då $n \rightarrow \infty$, där $0 \leq Q \leq \infty$.

Om å ena sidan $Q < 1$ (inklusive fallet $Q = 0$) kan vi välja ett (något större) tal q sådant att $Q < q < 1$, och till detta q finns ett heltal N sådant att $\sqrt[n]{|a_n|} < q$ för alla $n \geq N$. Således är $|a_n| < q^n$ för alla dessa n , varför $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=N}^{\infty} q^n$, där den senare serien är en konvergent geometrisk serie eftersom $0 < q < 1$, och därmed är den positiva serien $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$ konvergent enligt jämförelsekriteriet för positiva serier; att $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ är konvergent följer nu omedelbart.

Om å andra sidan $Q > 1$ (inklusive fallet $Q = \infty$) kan vi välja ett (något mindre) tal q sådant att $1 < q < Q$, och till detta q finns ett heltal N sådant att $\sqrt[n]{|a_n|} > q$ för alla $n \geq N$. Således är $|a_n| > q^n$ för alla dessa n , och eftersom $q > 1$ är $|a_n| > 1$, så a_n går inte mot noll då $n \rightarrow \infty$ (följden $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \dots$ är t.o.m. obegränsad), så serien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ är divergent enligt divergenstestet.

Man kan visa att om $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = Q$, där $0 \leq Q \leq \infty$, så är också $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = Q$, och kvotkriteriet följer därför omedelbart av rotkriteriet. ■

4.7. Anmärkning (*En formulering med lim sup). I fallet $Q > 1$ i beviset av rotkriteriet ovan räcker det egentligen att olikheten $\sqrt[n]{|a_n|} > q$ gäller för *oändligt många* heltal $n \geq N$ för att vi ska kunna visa att a_n inte går mot noll då $n \rightarrow \infty$ och att serien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ därmed är divergent enligt divergenstestet; att olikheten gäller för *alla* heltal $n \geq N$ utnyttjas inte fullt ut i beviset.

Självfallet behöver inte $\sqrt[n]{|a_n|}$ ha något gränsvärde Q , $0 \leq Q \leq \infty$, över huvud taget när $n \rightarrow \infty$. Som ett enkelt exempel på detta kan vi ta termerna $a_n = (2 + (-1)^n)^n$; då är $\sqrt[n]{|a_n|} = 3$ för jämna n och $\sqrt[n]{|a_n|} = 1$ för udda n . Om vi däremot sätter

$$Q = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

där vi för talföljder $t_0, t_1, t_2, \dots \in \mathbb{R}$ definierar **lim sup**, *limes superior* eller *övre gränsvärdet*, enligt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{t_n, t_{n+1}, t_{n+2}, \dots\},$$

så får vi alltid ett bestämt värde på Q , $0 \leq Q \leq \infty$, eftersom funktionen $n \mapsto \sup\{t_n, t_{n+1}, t_{n+2}, \dots\}$ är avtagande på $\mathbb{N}$ (när n växer försvinner ju tal från mängderna vi tar supremum av). Om $Q < q < 1$ så finns ett heltal N sådant att $|a_n| < q^n$ för alla $n \geq N$, precis som i beviset ovan, så $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ är absolutkonvergent. Om $1 < q < Q$ så finns oändligt många n sådana att $|a_n| > q^n$, och eftersom $q > 1$ är $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

Slutligen, om $Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existerar, $0 \leq Q \leq \infty$, så är också $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = Q$. Det naturliga är därför att låta $Q = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ i formuleringen av Proposition 4.6, och detta gränsvärde existerar således alltid. ▲

För numeriska serier är rot- och kvotkriterierna synnerligen grova: Om $Q < 1$ går termerna exponentiellt snabbt mot noll och om $Q > 1$ blir termerna (åtminstone i en delföljd) exponentiellt snabbt obegränsat stora, ja ännu snabbare i de båda fallen om $Q = 0$ respektive $Q = \infty$.

Om $Q = 1$ ger kriterierna inget besked över huvud taget. Detta är fallet bl.a. om termerna är av typen $a_n = p(n)/q(n)$, där p och q är polynom; t.ex. är ju $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ divergent medan $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ är konvergent, och för båda är $Q = 1$.

Kriteriernas användbarhet är främst i samband med potensserier.

4.8. Sats (Existens av konvergensradie). Till varje potensserie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

hör ett entydigt bestämt R , $0 \leq R \leq \infty$, kallat **konvergensradie**, sådant att

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ är } \begin{cases} \text{absolutkonvergent om } |z| < R, \\ \text{divergent om } |z| > R. \end{cases}$$

Skivan $|z| < R$ kallas för seriens **konvergensskiva** (som är hela $\mathbb{C}$ om $R = \infty$ och tomma mängden $\emptyset$ om $R = 0$).

Bevis. Här använder vi $\limsup$ från Anmärkning 4.7, men satsen kan också bevisas utan hjälp av $\limsup$, se Forsling-Neymark där satsen visserligen formuleras för *reella* serier men beviset går igenom oförändrat för *komplexa* serier. Den som vill kan ersätta $\limsup$ med $\lim$ nedan, och då få ett bevis för att R existerar i specialfallet att $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ existerar.

Fixera $z \neq 0$, sätt $a_n = c_n z^n$ och $G = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$. Eftersom $\sqrt[n]{|a_n|} = |z| \sqrt[n]{|c_n|}$ får vi att

$$Q = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |z| \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \begin{cases} 0, & G = 0, \\ |z|G, & 0 < G < \infty, \\ \infty, & G = \infty, \end{cases}$$

så Proposition 4.6 ger genast att

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ är } \begin{cases} \text{absolutkonvergent om } |z|G < 1, \text{ d.v.s. om } |z| < 1/G, \\ \text{divergent om } |z|G > 1, \text{ d.v.s. om } |z| > 1/G, \end{cases}$$

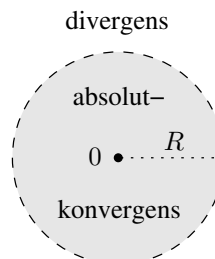
så $R = 1/G$ uppfyller villkoren i satsen, om vi här gör tolkningen $1/0 = \infty$ och $1/\infty = 0$. ■

4.9. Anmärkning (Om konvergens på cirkeln $|z| = R$). Observera att Sats 4.8 inte säger något om konvergens då $|z| = R$, och faktiskt kan lite av varje hända där. Studera t.ex. följande tre potensserier, alla med konvergensradie $R = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad \text{och} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}.$$

Den första är divergent på hela cirkeln $|z| = 1$ (eftersom $z^n \not\rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$ när $|z| = 1$) och den tredje är absolutkonvergent på hela cirkeln $|z| = 1$ (eftersom $|z^n/n^2| = 1/n^2$ då $|z| = 1$ och $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ är konvergent), medan den andra konvergerar i alla punkter på cirkeln $|z| = 1$ utom i punkten $z = 1$, vilket dock är svårare att bevisa, se Övning 4.12.

Mer om potensseriers konvergens på randen till konvergensskivan finns i Avsnitt 4.8. ▲



För att beräkna konvergensradien använder man normalt rot- eller kvotkriteriet, som i nedanstående exempel.

4.10. Exempel (Rot- och kvotkriterierna). Konvergensradien för potensserien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{n+1} z^{3n} = 1 + 4z^3 + \frac{64}{3}z^6 + 128z^9 + \dots$$

kan bestämmas med rot- eller kvotkriteriet. Sätt, för fixt $z \neq 0$,

$$a_n = \frac{8^n}{n+1} z^{3n}.$$

Eftersom

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{8}{\sqrt[n]{n+1}} |z|^3 = 8|z|^3 \exp\left(-\frac{\ln(n+1)}{n}\right) \rightarrow 8|z|^3 = Q \quad \text{då } n \rightarrow \infty,$$

och rotkriteriet säger att serien konvergerar om $Q < 1$ men divergerar om $Q > 1$, inser vi att serien konvergerar om $|z| < 1/2$ men divergerar om $|z| > 1/2$; alltså är konvergensradien $R = 1/2$.

Om vi i stället använder kvotkriteriet får vi följande:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{8^{n+1} z^{3(n+1)} / (n+2)}{8^n z^{3n} / (n+1)} \right| = 8|z|^3 \cdot \frac{1+1/n}{1+2/n} \rightarrow 8|z|^3 = Q \quad \text{då } n \rightarrow \infty,$$

och med samma avslutande resonemang som i förra stycket får vi att $R = 1/2$. ▲

Att multiplicera och/eller dividera en potensseries koefficienter med polynom påverkar inte konvergensradien eftersom $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|p(n)|} = 1$ för alla polynom p (utom nollpolynomet). Vi preciserar:

4.11. Proposition. Om p och q är polynom skilda från nollpolynomet, och $q(n) \neq 0$ för alla $n \in \mathbb{N}$, så har potensserierna

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{och} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(n)}{q(n)} c_n z^n$$

samma konvergensradie.

Vi ska nu visa att potensserier är analytiska funktioner i sina konvergensskivor, och att de dessutom får integreras och deriveras termvis där.

4.12. Sats (Termvis derivering och integrering). Antag att potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ har konvergensradie $R > 0$, och sätt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots, \quad |z| < R.$$

Då är f analytisk i skivan $|z| < R$,

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} = c_1 + 2c_2 z + 3c_3 z^2 + \dots, \quad |z| < R,$$

och

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1} = c_0 z + \frac{c_1 z^2}{2} + \frac{c_2 z^3}{3} + \frac{c_3 z^4}{4} + \dots, \quad |z| < R,$$

är en primitiv funktion till f i skivan $|z| < R$ (alla ges av $F + C$, $C \in \mathbb{C}$).

Potensserierna för derivatan f' och primitiven F har också konvergensradie R .

4.13. Anmärkning. Primitiven F i satsen ovan kan också skrivas i integralform:

$$F(z) = \int_{[0,z]} f(s) ds, \quad |z| < R,$$

där $[0, z]$ som vanligt är *sträckan* från 0 till z . Detta följer av Proposition 3.10 på s. 43 eftersom F är en primitiv till f i skivan och $F(0) = 0$, varför $\int_{[0,z]} f(s) ds = F(z) - F(0) = F(z)$. ▲

I Forsling-Neymark bevisas motsvarigheten till Sats 4.12 för *reella* potensserier, men det går inte att överföra deras bevis direkt till vår situation eftersom de använder sig av medelvärdessatsen, som är ett rent reellt resultat, se Anmärkning 4.18. I stället bygger vårt resonemang på följande hjälpsats:

4.14. Hjälpsats. Om $|a| \leq r$ och $|z| \leq r$, så gäller olikheten

$$|z^n - a^n| \leq n r^{n-1} |z - a|, \quad n = 1, 2, \dots$$

Om dessutom $z \neq a$, så gäller också olikheten

$$\left| \frac{z^n - a^n}{z - a} - n a^{n-1} \right| \leq \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2} |z - a|, \quad n = 2, 3, \dots$$

Bevis. Beviset bygger på identiteten

$$(*) \quad z^n - a^n = (z - a)(z^{n-1} + z^{n-2}a + z^{n-3}a^2 + \dots + z^2a^{n-3} + za^{n-2} + a^{n-1}),$$

som inses genom direkt utveckling av högerledet. Eftersom det finns precis n termer i den högra parentesens och alla termer där har belopp högst r^{n-1} får vi att

$$|z^n - a^n| \leq |z - a|(|z|^{n-1} + |z|^{n-2}|a| + \dots + |z||a|^{n-2} + |a|^{n-1}) \leq |z - a| \cdot n r^{n-1},$$

och därmed är den första olikheten bevisad.

Använder vi sedan (*) då $z \neq a$ samt den första olikheten upprepade gånger får vi att

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{z^n - a^n}{z - a} - na^{n-1} \right| &= |z^{n-1} + z^{n-2}a + \dots + za^{n-2} + a^{n-1} - na^{n-1}| \\
 &= |(z^{n-1} - a^{n-1}) + (z^{n-2} - a^{n-2})a + \dots + (z - a)a^{n-2}| \\
 &\leq |z^{n-1} - a^{n-1}| + |z^{n-2} - a^{n-2}||a| + \dots + |z - a||a|^{n-2} \\
 &\leq |z - a| \cdot (n-1)r^{n-2} + |z - a| \cdot (n-2)r^{n-3}r + \dots + |z - a|r^{n-2} \\
 &= |z - a|((n-1) + (n-2) + \dots + 1)r^{n-2} = \{\text{aritmetisk summa}\} \\
 &= |z - a| \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2},
 \end{aligned}$$

och därmed är beviset av den andra olikheten klart. ■

Bevis av Sats 4.12. Proposition 4.11 medför genast att de tre potensserierna i satsen har samma konvergensradie, alltså R .

Fixera a med $|a| < R$, och välj sedan r så att $|a| < r < R$; då är serierna $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n a^{n-1}$ och $\sum_{n=2}^{\infty} (n(n-1)/2)|c_n|r^{n-2}$ konvergenta. Om $|z| < r$ och $z \neq a$ får vi från Hjälpssats 4.14 att

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{f(z) - f(a)}{z - a} - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n a^{n-1} \right| &= \left| \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left(\frac{z^n - a^n}{z - a} - na^{n-1} \right) \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \left| \frac{z^n - a^n}{z - a} - na^{n-1} \right| \\
 &\leq |z - a| \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2} \rightarrow 0 \quad \text{då } z \rightarrow a
 \end{aligned}$$

eftersom $\sum_{n=2}^{\infty} (n(n-1)/2)|c_n|r^{n-2}$ är konvergent och oberoende av z . Således är

$$f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n a^{n-1}.$$

Slutligen, eftersom serien för $F(z)$ har konvergensradie R är den analytisk där $|z| < R$ enligt ovan, och termvis derivering ger direkt att $F'(z) = f'(z)$ för alla z med $|z| < R$. ■

4.15. Exempel (Manipulation av geometrisk serie). Den geometriska seriens summa beräknade vi i Proposition 4.2:

$$(*) \quad 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1.$$

Termvis derivering av (*) ger att

$$1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z} \right) = \frac{1}{(1-z)^2}, \quad |z| < 1,$$

och multiplikation med z ger oss sambandet

$$z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}, \quad |z| < 1; \quad (4.2)$$

exempelvis kan vi räkna ut summan av följande numeriska serie, eftersom $z = 1/3$ ligger i konvergensskivan:

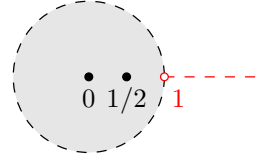
$$\frac{1}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{1/3}{(1-1/3)^2} = \frac{3}{4}.$$

Å andra sidan ger termvis integrering av (*) att

$$z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} = -\operatorname{Log}(1-z) + C, \quad |z| < 1,$$

för någon konstant $C \in \mathbb{C}$, eftersom $-\operatorname{Log}(1-z)$ är en primitiv funktion till $1/(1-z)$ i området $\Omega = \mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$, som ju innehåller enhetsskivan $|z| < 1$. Insättning av $z = 0$ bestämmer konstanten:

$$0 = -\operatorname{Log}(1-0) + C, \quad \text{så} \quad C = 0.$$



Vi kan även nu beräkna vissa numeriska serier, t.ex.

$$\frac{1}{1 \cdot 2^1} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)^{n+1}}{n+1} = -\operatorname{Log}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln 2,$$

eftersom $z = 1/2$ ligger i konvergensskivan. ▲

Vi kommer också att behöva serier där vi tillåter **negativa potenser av z** , d.v.s. dubbelsidiga potensserier $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$. Enligt (4.1) på s. 61 är en sådan serie konvergent precis då serierna $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ och $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n}$ båda är konvergenta, och i så fall blir dess summa

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n} = (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots) + \left(\frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots\right).$$

Här är den första serien i högerledet, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, en vanlig potensserie, som därför har någon konvergensradie R_2 , och om $g(z)$ betecknar denna series summa i skivan $|z| < R_2$ så är g analytisk där. Om vi i den andra serien sätter $w = 1/z$ får vi en potensserie $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n$ i variabeln w , som därför har någon konvergensradie r , och om $h(w)$ betecknar denna series summa i skivan $|w| < r$ så är h analytisk där. Således är funktionen $z \mapsto h(1/z)$ analytisk i området $|z| > R_1 = 1/r$, och om $R_1 < R_2$ är alltså serien $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ absolutkonvergent i området $R_1 < |z| < R_2$, som vi kallar seriens **konvergensring** (även om det i fallet $0 = R_1 < R_2 < \infty$ är en punkterad skiva, i fallet $0 < R_1 < R_2 = \infty$ är området utanför en cirkel, och i fallet $0 = R_1 < R_2 = \infty$ är $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$).

Vi sätter nu

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right), \quad R_1 < |z| < R_2, \quad (4.3)$$

och denna funktion är alltså analytisk. Derivatorna $g'(z)$ och $h'(w)$ får vi genom termvis derivering enligt Sats 4.12, och tillsammans med kedjeregeln ger detta att

$$f'(z) = g'(z) + h'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1} - \frac{1}{z^2} \sum_{n=1}^{\infty} n c_{-n} \left(\frac{1}{z}\right)^{n-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n c_n z^{n-1},$$

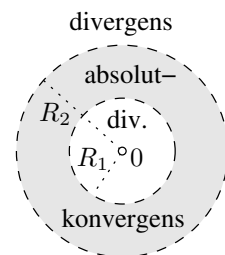
så serien för f får deriveras termvis, precis som vanliga potensserier, och serierna för f och f' har samma konvergensring.

Om vi dessutom sätter

$$\tilde{F}(z) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq -1}}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1},$$

så har också $\tilde{F}$ samma konvergensring som f , och termvis derivering enligt ovan ger direkt att

$$(*) \quad \tilde{F}'(z) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq -1}}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n - \frac{c_{-1}}{z} = f(z) - \frac{c_{-1}}{z}.$$



$\tilde{F}(z)$ är således en primitiv funktion till $f(z) - c_{-1}/z$ i konvergensringen, och den fås genom att ta primitiver termvis och lägga ihop. Notera att f själv har en primitiv i hela ringen om och endast om $c_{-1} = 0$ eftersom $1/z$ saknar primitiv i ringen, jfr Anmärkning 3.11 på s. 43.

Låt nu C_ρ vara cirkeln $|s| = \rho$ tagen ett varv i positiv led. Eftersom $\tilde{F}'$ trivialt har en primitiv i ringen (nämligen $\tilde{F}$) ger integration av (*) ovan att

$$\int_{C_\rho} \left(f(s) - \frac{c_{-1}}{s} \right) ds = \int_{C_\rho} \tilde{F}'(s) ds = 0, \quad R_1 < \rho < R_2,$$

enligt Sats 3.10 på s. 43. Men $\int_{C_\rho} ds/s = 2\pi i$, så koefficienten c_{-1} för z^{-1} i potensserien ges av sambandet

$$(**) \quad c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} f(s) ds, \quad R_1 < \rho < R_2.$$

Vi ska nu se att även övriga koefficienter c_n kan skrivas som integraler. Studera för fixt $n \in \mathbb{Z}$ potensserien

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^{k-n-1} = z^{-n-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Den har samma konvergensring som f , dess summa i ringen är $f(z)/z^{n+1}$, och koefficienten för z^{-1} i denna serie är c_n , så enligt (**) ovan är

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(s)}{s^{n+1}} ds, \quad R_1 < \rho < R_2, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Vi har därmed bevisat följande entydighetsresultat:

4.16. Proposition (Entydighet hos koefficienterna). Om serien $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ har konvergensskiva $|z| < R$, eller om serien $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ har konvergensring $R_1 < |z| < R_2$, och vi sätter $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ respektive $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ i konvergensområdet, så ges koefficienterna c_n av sambandet

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(s)}{s^{n+1}} ds$$

för alla moturs cirklar C_ρ med centrum i origo och radie ρ som finns i konvergensområdet. Speciellt är seriens koefficienter c_n entydigt bestämda av seriens summa f .

4.17. Exempel (Konvergensring för dubbelsidig potensserie). Studera potensserien

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \dots + \frac{4}{z^4} + \frac{3}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} + \frac{z^4}{16} + \dots;$$

här är alltså $c_n = -n$ för $n < 0$ och $c_n = 1/2^n$ för $n \geq 0$. För att bestämma konvergensringen $R_1 < |z| < R_2$ skriver vi

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} + \dots \right) + \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{4}{z^4} + \dots \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{z^n}.$$

Rotkriteriet tillämpat på den första serien i högerledet ger att den konvergerar då $|z| < 2$ och divergerar då $|z| > 2$, medan kvotkriteriet tillämpat på den andra serien ger att den konvergerar då $|z| > 1$ och divergerar då $|z| < 1$. Alltså är potensseriens konvergensring $1 < |z| < 2$, och i denna ring definierar potensserien en analytisk funktion. $\blacktriangle$

Vi avslutar detta avsnitt med att diskutera medelvärdessatsen, som alltså är ett rent reellt resultat:

4.18. Anmärkning (*Medelvärdessatsen är inte sann för komplexvärda funktioner).

Medelvärdessatsen i reell analys säger som bekant att $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ för något ξ mellan a och b om $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är tillräckligt snäll, se Forsling-Neymark.

Att satsen inte gäller för komplexvärda funktioner av en reell variabel, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, ses enkelt med motexemplet $f(t) = e^{it}$, $a = 0$ och $b = 2\pi$. Här är nämligen

$$f(b) - f(a) = e^{i2\pi} - e^{i0} = 0 \quad \text{medan} \quad f'(\xi)(b - a) = ie^{i\xi} \cdot 2\pi \neq 0 \quad \text{för alla } \xi.$$

Uppskattningen

$$|f(b) - f(a)| \leq \max_{t \in [a, b]} |f'(t)| \cdot |b - a|$$

gäller dock alltid, vilket följer av ML-uppskattning i likheten $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$.

Satsen gäller som väntat inte heller för analytiska funktioner f , inte ens om man skulle tillåta att $\xi \in \mathbb{C}$ ligger på någon kurva γ mellan $a \in \mathbb{C}$ och $b \in \mathbb{C}$; motexemplet $f(z) = e^{iz}$, $a = 0$ och $b = 2\pi$ fungerar även här. Uppskattningen $|f(b) - f(a)| \leq \max_{z \in \gamma} |f'(z)| \cdot L(\gamma)$ är dock sann, eftersom $f(b) - f(a) = \int_{\gamma} f'(s) ds$ när γ är en kurva från a till b i det område där f är analytisk; här är $L(\gamma)$ längden av γ . ▲

*** ÖVNINGAR – repetition Envariabelanalys 2**

★ 4.1 Beräkna summan av följande serier om de är konvergenta.

$$(a) 8 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \dots \quad (b) 2 - \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \dots \quad (c) \sum_{n=3}^{\infty} 4^n \quad (d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n - 5 \cdot 2^n}{3^n}$$

★ 4.2 Är serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ absolutkonvergent? Om inte, är den ändå konvergent?

★ 4.3 Kan rot- eller kvotkriteriet användas för att avgöra om följande serier är konvergenta? Om inte, avgör konvergens på annat sätt!

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n/2}}{n^7} \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \quad (d) \sum_{n=8}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

★ 4.4 Bestäm konvergensradien för följande potensserier:

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2^n} \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n \quad (d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n + n^3} \quad (e) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^{3n+1}$$

★ 4.5 Härled Maclaurinserien för $\ln(1+x)$ genom att integrera Maclaurinserien för dess derivata. Konvergensradie?

★ 4.6 Utgå från en geometrisk serie för att beräkna

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} n2^n \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad (e) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n(n+1)} \quad (f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n(n+2)}$$

★ 4.7 Sätt formellt in ix istället för x i Maclaurinserien för exponentialfunktionen och tag real- och imaginärdelar. Känns resultatet bekant?

★ ÖVNINGAR – övriga uppgifter

★ 4.8 Är följande numeriska serier absolutkonvergenta? Om inte, är de ändå konvergenta?

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ni}{n^2} \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n-i} \quad (d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+i} \quad (e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$$

★ 4.9 Bestäm konvergensraden för potensserierna

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n z^n}{n^2} \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{3^n + n^3} \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(2+i+(-1)^n)^n}$$

★ 4.10 Om $|z| < 1$, beräkna (a) $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ (Jfr Övning 4.6)★ 4.11 Beräkna $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nz}$ där den konvergerar, och undersök $\lim_{\alpha \rightarrow 0+} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} \sin n\beta$ för $\beta \in \mathbb{R}$.★ 4.12 I integralkalkyl förekommer som bekant *partiell integration*: Om f och g' är kontinuerliga på $[a, b]$, så är $\int_a^b f(x)g'(x) dx = F(b)g(b) - \int_a^b F(x)g'(x) dx$, där $F(x) = \int_a^x f(t) dt$; observera att vi här har valt den primitiv F till f som uppfyller $F(a) = 0$. För summor finns i stället **partiell summation**: Om $a_0, a_1, a_2, \dots$ och $b_0, b_1, b_2, \dots$ är talföljder, så är

$$\sum_{n=0}^N a_n b_n = A_N b_N - \sum_{n=0}^{N-1} A_n (b_{n+1} - b_n), \quad N \geq 1, \quad \text{där } A_n = \sum_{k=0}^n a_k;$$

här är alltså A_n , $n \in \mathbb{N}$, delsummorna till serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

- (a) Bevisa formeln för partiell summation, t.ex. m.h.a induktion.
- (b) Antag att $b_n \searrow 0$ och att $A_0, A_1, A_2, \dots$ är en begränsad talföljd, alltså att det finns en konstant C sådan att $|A_n| \leq C$ för alla n . Visa att $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ är konvergent.
- (c) Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ är konvergent (men inte absolutkonvergent) om $|z| = 1$ men $z \neq 1$.
- (d) Antag att $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ är konvergent. Visa att $\lim_{t \rightarrow 1-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

4.3 Serieutvecklingar för analytiska funktioner

I föregående avsnitt såg vi att potensserier – även sådana med negativa exponenter – är analytiska funktioner i de områden där de konvergerar. I detta avsnitt ska vi visa omvändningen: Analytiska funktioner f kan utvecklas i sådana serier, nämligen i Taylorserier om f är analytisk i en skiva, och i s.k. Laurentserier om f är analytisk i en ring.

Vi antar till att börja med att skivan eller ringen har centrum i origo, för enkelhets skull.

4.19. Sats (Existens av Maclaurinserie). Antag att f är analytisk i skivan $|z| < r$, där $r > 0$. Då är

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad |z| < r,$$

där

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(s)}{s^{n+1}} ds = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad 0 < \rho < r, \quad n \in \mathbb{N},$$

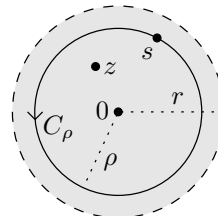
och C_ρ är cirkeln $|s| = \rho$ tagen ett varv i positiv led. För serien, som kallas **Maclaurinserie**, gäller att dess konvergensskiva $|z| < R$ innehåller skivan $|z| < r$, d.v.s. att $R \geq r$.

Bevis. Fixera z med $|z| < r$, och tag sedan ρ sådant att $|z| < \rho < r$. Cauchys integralformel (Följdsats 3.20 på s. 47) tillämpad på skivan $\omega = \{s : |s| < \rho\}$ med randen C_ρ orienterad moturs ger då att

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(s)}{s-z} ds.$$

Om vi sätter $w = z/s$ får vi, för varje $N \in \mathbb{N}$, att

$$\begin{aligned} \frac{1}{s-z} &= \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1-w} = \frac{1}{s} \left(1 + w + w^2 + \dots + w^N + \frac{w^{N+1}}{1-w} \right) \\ &= \sum_{n=0}^N \frac{z^n}{s^{n+1}} + \frac{(z/s)^{N+1}}{s-z}, \end{aligned}$$



vilket medför att Cauchys integralformel för f ovan kan skrivas om till likheten

$$(*) \quad \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(s)}{s^{n+1}} ds \right) z^n = f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{(z/s)^{N+1}}{s-z} f(s) ds, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Vänsterledet är helt enkelt summan $\sum_{n=0}^N c_n z^n$, där $c_n = f^{(n)}(0)/n!$ enligt Cauchys integralformel för derivata (Följdsats 3.22 på s. 48), så c_n är oberoende av z . ML-uppskattning av integralen i högerledet ger, eftersom $|z/s| = |z|/\rho < 1$ och $|s-z| \geq \rho - |z| > 0$ för alla $s \in C_\rho$, att

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{(z/s)^{N+1}}{s-z} f(s) ds \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{(|z|/\rho)^{N+1}}{\rho - |z|} \cdot \max_{s \in C_\rho} |f(s)| \cdot 2\pi\rho \rightarrow 0 \quad \text{då } N \rightarrow \infty.$$

Genom att låta $N \rightarrow \infty$ i $(*)$ får vi därför att $\sum_{n=0}^N c_n z^n \rightarrow f(z)$, och eftersom z var godtyckligt valt i skivan $|z| < r$ gäller detta i hela skivan. Speciellt konvergerar potensserien $\sum_{n=0}^\infty c_n z^n$ för alla z med $|z| < r$, så dess konvergensradie R uppfyller olikheten $R \geq r$. ■

Satsen säger speciellt att konvergensskivan $|z| < R$ för f 's Maclaurinserie innehåller varje skiva $|z| < r$ där f är analytisk; det *kan* inträffa att $R > r$ även om r är radien för den största skivan av denna typ där f är analytisk, jfr Exempel 4.31. I Avsnitt 4.6 längre fram i texten definieras s.k. singulariteter till f , och där ska vi se att man ofta m.h.a. sådana kan bestämma R (se Följdsats 4.54). Redan nu kan vi dock formulera ett enkelt resultat om bestämning av R som fungerar i många situationer:

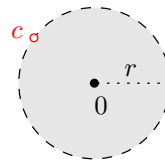
4.20. Proposition (Om Maclaurinseriens konvergensradie, resultat 1). Antag att f är analytisk i skivan $|z| < r$ där $0 < r < \infty$, och att det finns någon punkt c på cirkeln $|z| = r$ med egenskapen att någon av $f, f', f'', \dots$ saknar ändligt gränsvärde när $z \rightarrow c$ *inifrån*. Då har Maclaurinserien för f konvergensradie $R = r$.

Villkoret i Proposition 4.20 är alltså *tillräckligt* för att konvergensradien ska vara just r . Det är dock *inte nödvändigt*, vilket t.ex. funktionen $f(z) = \sum_{n=0}^\infty 2^{-n} z^{n^2}$, $|z| < 1$, visar. Denna potensserie (tillika f 's Maclaurinserie) har konvergensradie $R = 1$, och alla funktioner $f, f', f'', \dots$ har ändliga gränsvärden inifrån i alla punkter på enhetscirkeln $|z| = 1$, se Anmärkning 4.66.

Bevis av Proposition 4.20. Låt $S(z) = \sum_{n=0}^\infty c_n z^n$ vara Maclaurinserien för f . Enligt Sats 4.19 är $S(z) = f(z)$ för alla z i skivan $|z| < r$, och serien har konvergensradie $R \geq r$. Vidare är S analytisk, speciellt kontinuerlig, i skivan $|z| < R$.

Antag att $R \neq r$; eftersom $R \geq r$ måste därför $R > r$. Men då är S kontinuerlig i c (ty $|c| = r < R$), så

$$\lim_{\substack{z \rightarrow c \\ |z| < r}} f(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow c \\ |z| < r}} S(z) = S(c) \in \mathbb{C},$$



varför f har ändligt gränsvärde när $z \rightarrow c$ inifrån.

Låt $k \in \mathbb{N}$. Då är $f^{(k)}(z) = S^{(k)}(z)$ för alla z i skivan $|z| < r$, och $S^{(k)}$ ges av en potensserie med samma konvergensradie som serien för S har, d.v.s. R , enligt Sats 4.12. Vi kan således upprepa resonemanget ovan med $f^{(k)}$ och $S^{(k)}$ i stället för f och S , och inser att även $f^{(k)}$ har ändligt gränsvärde när $z \rightarrow c$ inifrån. Alltså har $f, f', f'', \dots$ ändliga gränsvärden när $z \rightarrow c$ inifrån, vilket strider mot förutsättningarna, och således måste $R = r$. ■

4.21. Proposition (Några elementära funktioners Maclaurinserier). Om $|z| < R$ är

$$\begin{aligned} \exp z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots, & R = \infty; \\ \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots, & R = \infty; \\ \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots, & R = \infty; \\ \operatorname{Log}(1+z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots, & R = 1; \\ \operatorname{PV}(1+z)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \dots, & R = 1 \text{ om } \alpha \notin \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ovanstående standardserier känner vi naturligtvis igen från envariabelanalysen: byter vi ut z mot x får vi helt enkelt de reella Maclaurinserierna för $\exp x$, $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$ och $(1+x)^\alpha$. De kan också härledas på samma sätt (genom upprepad derivering).

Konvergensradierna för serierna ovan kan beräknas direkt – enklast med kvotkriteriet – men vi kan också använda oss av Sats 4.19 och Proposition 4.20 på följande vis:

1. $\exp z$, $\cos z$ och $\sin z$ är hela funktioner. Deras Maclaurinserier har därför konvergensradie $R = \infty$, och funktionerna är lika med sina respektive Maclaurinserier för alla $z \in \mathbb{C}$.
2. $\operatorname{Log}(1+z)$ är analytisk utom på strålen $]-\infty, -1]$, så den är analytisk i skivan $|z| < 1$. Eftersom $\operatorname{Log}(1+z) = \ln|1+z| + i \operatorname{Arg}(1+z)$ ser vi att $\operatorname{Re} \operatorname{Log}(1+z) \rightarrow -\infty$ då $z \rightarrow -1$ inifrån, så $\operatorname{Log}(1+z)$ saknar ändligt gränsvärde då $z \rightarrow -1$ inifrån. Alltså har Maclaurinserien konvergensradie $R = 1$, och är lika med $\operatorname{Log}(1+z)$ då $|z| < 1$ (bl.a.).
3. Om $\alpha \in \mathbb{N}$ så är $(1+z)^\alpha$ ett polynom, alltså en hel funktion (med ändligt många termer i sin Maclaurinserie), varför $R = \infty$. I annat fall låter vi $k \in \mathbb{N}$ vara ett tal sådant att $\operatorname{Re} \alpha < k$. Sätt $f(z) = \operatorname{PV}(1+z)^\alpha = \exp(\alpha \operatorname{Log}(1+z))$. Denna funktion är analytisk i skivan $|z| < 1$, $f^{(k)}(z) = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1) \exp((\alpha-k) \operatorname{Log}(1+z))$, och

$$|\exp((\alpha-k) \operatorname{Log}(1+z))| = \exp((\operatorname{Re} \alpha - k) \ln|1+z| - (\operatorname{Im} \alpha) \operatorname{Arg}(1+z)) \rightarrow +\infty$$

då $z \rightarrow -1$ inifrån, så $f^{(k)}$ saknar ändligt gränsvärde då $z \rightarrow -1$ inifrån (observera att $\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1) \neq 0$). Maclaurinserien har därför konvergensradie $R = 1$, och är lika med $\operatorname{PV}(1+z)^\alpha$ då $|z| < 1$ (bl.a.).

(Maclaurinserierna för $\text{Log}(1+z)$ och $\text{PV}(1+z)^\alpha$ konvergerar också i vissa punkter på randen $|z|=1$; mer om detta i Avsnitt 4.8.)

Maclaurinserierna för

$$\cosh z \quad \text{och} \quad \sinh z,$$

och deras konvergensradier, härleds enkelt ur Maclaurinserien för $\exp z$, se Övning 4.13.

4.22. Anmärkning (*Den "saknade" standardserien). I Forsling-Neymark, kapitel 10.3, finns också standardserien $\arctan x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \dots$, med konvergensradie $R=1$. Om vi här byter ut x mot z får vi en komplex potensserie, också med $R=1$, som visar sig vara Maclaurinserien för funktionen $(1/2i)\text{Log}((i-z)/(i+z))$, vilket också förklarar varför $R=1$. Denna funktion betecknas $\text{Arctan } z$, och är principalvärdet på den flervärda funktionen $\arctan z$, som i sin tur, för givet $z \neq \pm i$, definieras som alla lösningar w till ekvationen $\tan w = z$, jfr diskussionen om flervärda $\arccos z$ i Anmärkning 2.27 på s. 34 samt Övning 2.24 på s. 37. Den standardserie som "saknas" i Proposition 4.21 är således

$$\text{Arctan } z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots, \quad R=1.$$

Mer om $\arctan z$ i TATA78 Komplex analys fk. (Se Avsnitt 4.8 för beteendet då $|z|=1$.) ▲

4.23. Anmärkning (*Maclaurinutveckling med restterm i integralform). Om f är analytisk i en skiva $|z| < r$ för något $r > 0$ är speciellt $\int_{[0,z]} f'(s) ds = f(z) - f(0)$ då $|z| < r$. På samma sätt som i reell analys (upprepad partiell integration) erhåller man därför för fixt z med $|z| < r$ och $n \in \mathbb{N}$ att

$$\begin{aligned} f(z) &= f(0) + \int_{[0,z]} 1 \cdot f'(s) ds = f(0) + [(s-z)f'(s)]_{s=0}^{s=z} - \int_{[0,z]} (s-z)f''(s) ds \\ &= f(0) + f'(0)z + \int_{[0,z]} (z-s)f''(s) ds = \{ \text{upprepa} \} \\ &= \underbrace{f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n}_{\text{Maclaurinpolynomet } p_n(z)} + \underbrace{\int_{[0,z]} \frac{(z-s)^n}{n!} f^{(n+1)}(s) ds}_{\text{Resttermen } R_{n+1}(z)}, \end{aligned}$$

där resttermen alltså är skriven i integralform. Med parametriseringen $s=tz$, $t:0 \rightarrow 1$, kan den också skrivas

$$R_{n+1}(z) = \frac{\varphi_{n+1}(z)}{(n+1)!} z^{n+1}, \quad \text{där} \quad \varphi_{n+1}(z) = \int_0^1 (n+1)(1-t)^n f^{(n+1)}(tz) dt;$$

här kan funktionen φ_{n+1} uppskattas på följande vis:

$$|\varphi_{n+1}(z)| \leq \max_{[0,z]} |f^{(n+1)}| \cdot \int_0^1 (n+1)(1-t)^n dt = \max_{[0,z]} |f^{(n+1)}|, \quad |z| < r.$$

Således får vi följande feluppskattning när f approximeras med sitt Maclaurinpolynom p_n :

$$|f(z) - p_n(z)| = |R_{n+1}(z)| \leq \max_{[0,z]} |f^{(n+1)}| \cdot \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad |z| < r.$$

Vi kan dock *inte* skriva resttermen i Lagranges form, $(f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)!)z^{n+1}$ för något ξ , av samma skäl som att medelvärdessatsen inte fungerar för komplexvärda funktioner, se Anmärkning 4.18. Däremot kan vi skriva den i ordoform på ett för analytiska funktioner speciellt sätt, se Avsnitt 4.4. ▲

Vi ska nu övergå till att studera serieutvecklingar för funktioner som är analytiska i ringar, och börjar med ett exempel.

4.24. Exempel (Serieutveckling i ring). Låt

$$f(z) = \frac{2}{2-z} + \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Vi ser att f är analytisk utom i punkterna $z = 1$ och $z = 2$.

Till att börja med är f analytisk i skivan $|z| < 1$ och är därför lika med sin Maclaurinserie i denna skiva.

f är analytisk också i ringen $1 < |z| < 2$, och en naturlig fråga är om f , även i denna ring, kan skrivas som en konvergent (vanlig enkelsidig) potensserie. Om detta vore möjligt, så att $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ för $1 < |z| < 2$, så skulle potensserien ha konvergensradie $R \geq 2$. Därmed skulle potensserien vara en analytisk funktion i hela skivan $|z| < 2$, och speciellt vara kontinuerlig i punkten $z = 1$. Som i beviset av Proposition 4.20 skulle vi då få en motsägelse eftersom f blir obegränsad när $z \rightarrow 1$ inifrån ringen $1 < |z| < 2$. Någon sådan serieframställning av f finns alltså inte i ringen $1 < |z| < 2$.

Nästa naturliga fråga är om vi i stället kan skriva f som en konvergent dubbelsidig potensserie så att $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ för $1 < |z| < 2$. Svaret på denna fråga är ja. Faktum är att serien i Exempel 4.17 har precis rätt summa:

$$f(z) = \frac{2}{2-z} + \frac{z}{(z-1)^2} = \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} + \dots\right) + \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \dots\right), \quad 1 < |z| < 2.$$

Den första serien i högerledet är nämligen en geometrisk serie med kvot $z/2$ och har därför summan $1/(1-z/2) = 2/(2-z)$ då $|z| < 2$. Den andra serien fås genom att byta z mot $1/z$ i ekvation (4.2) på s. 66 och har därför summan $(1/z)/(1-1/z)^2 = z/(z-1)^2$ då $|z| > 1$. ▲

Vi ska nu se att varje funktion f som är analytisk i en ring kan utvecklas i en dubbelsidig potensserie i ringen:

4.25. Sats (Existens av Laurentserie). Antag att f är analytisk i ringen $r_1 < |z| < r_2$, där $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$. Då är

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad r_1 < |z| < r_2,$$

där

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(s)}{s^{n+1}} ds, \quad r_1 < \rho < r_2, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (4.4)$$

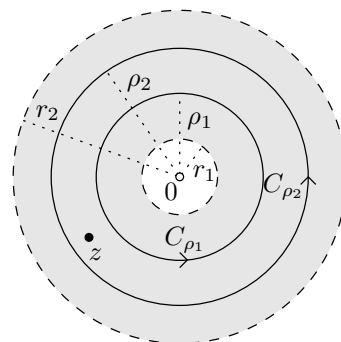
och C_ρ är cirkeln $|s| = \rho$ tagen ett varv i positiv led. Serien, som kallas **Laurentserie**, har konvergensring $R_1 < |z| < R_2$ som innehåller ringen $r_1 < |z| < r_2$, d.v.s. $R_1 \leq r_1$ och $R_2 \geq r_2$.

Bevis. Beviset har stora likheter med beviset för Sats 4.19. Fixera z med $r_1 < |z| < r_2$, och tag sedan ρ_1 och ρ_2 sådana att $r_1 < \rho_1 < |z| < \rho_2 < r_2$. Cauchys integralformel tillämpad på ringen $\omega = \{s : \rho_1 < |s| < \rho_2\}$ med rand $\partial\omega = C_{\rho_2} - C_{\rho_1}$ ger då att

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\rho_2}} \frac{f(s)}{s-z} ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\rho_1}} \frac{f(s)}{s-z} ds.$$

Eftersom $|z/s| = |z|/\rho_2 < 1$ då $s \in C_{\rho_2}$ får vi på samma sätt som i beviset för Sats 4.19 att

$$\begin{aligned} f_2(z) &:= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\rho_2}} \frac{f(s)}{s-z} ds = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\rho_2}} \frac{f(s)}{s^{n+1}} ds \right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\rho}} \frac{f(s)}{s^{n+1}} ds \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \end{aligned}$$



där c_n för $n \in \mathbb{N}$ ges av (4.4). Steg * följer av Cauchys integralsats, specialfall 2, eftersom funktionen $s \mapsto f(s)/s^{n+1}$ är analytisk i hela ringen $r_1 < |s| < r_2$, varför vi kan byta radien ρ_2 till vilken radien ρ som helst så länge som $r_1 < \rho < r_2$; därför är koefficienterna c_n samma för alla z i ringen. Själva potensserien konvergerar för alla z i skivan $|z| < r_2$, så dess konvergensradie $R_2 \geq r_2$.

Den andra integralen hanteras på ett likartat sätt, men med $w = s/z$, så att, för $N = 1, 2, 3, \dots$,

$$-\frac{1}{s-z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-w} = \frac{1}{z} \left(1 + w + w^2 + \dots + w^{N-1} + \frac{w^N}{1-w} \right) = \sum_{n=-N}^{-1} \frac{z^n}{s^{n+1}} - \frac{(s/z)^N}{s-z},$$

så

$$f_1(z) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\rho_1}} \frac{f(s)}{s-z} ds = \sum_{n=-N}^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\rho_1}} \frac{f(s)}{s^{n+1}} ds \right) z^n - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\rho_1}} \frac{(s/z)^N}{s-z} f(s) ds.$$

Den första delen av högerledet är helt enkelt summan $\sum_{n=-N}^{-1} c_n z^n$, där c_n för dessa n ges av (4.4), igen enligt Cauchys integralsats, så c_n är oberoende av z (men kan bero på själva ringen). ML-uppskattning av den andra delen ger, eftersom $|s/z| = \rho_1/|z| < 1$ och $|s-z| \geq |z| - \rho_1 > 0$ för alla $s \in C_{\rho_1}$, att den delen går mot 0 då $N \rightarrow \infty$, så $\sum_{n=-N}^{-1} c_n z^n \rightarrow f_1(z)$ då $N \rightarrow \infty$. För serien $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n$, som ju konvergerar i något område $|z| > R_1$ och därtill konvergerar för alla z med $|z| > r_1$, måste därför gälla att $R_1 \leq r_1$.

Sammantaget konvergerar serien $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ i någon ring $R_1 < |z| < R_2$, där $R_1 \leq r_1$ och $R_2 \geq r_2$, och $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = f(z)$ då $r_1 < |z| < r_2$. ■

Man kan formulera ett resultat för Laurentseriens konvergensring som är helt analogt med resultatet för Maclaurinseriens konvergensskiva (Proposition 4.20): Om $|c| = r_1$ (eller $|c| = r_2$) och någon av $f, f', f'', \dots$ saknar ändligt gränsvärde när $z \rightarrow c$ inifrån ringen $r_1 < |z| < r_2$, så är $R_1 = r_1$ (respektive $R_2 = r_2$).

Proposition 4.16 om entydighet hos en potensseries koefficienter medför nu att varje konvergent serie som ser ut som en Maclaurin- eller Laurentserie också är en sådan serie. Vi illustrerar med några exempel.

4.26. Exempel. Eftersom e^w har Maclaurinserien

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = 1 + w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \dots, \quad w \in \mathbb{C},$$

kan vi genom att sätta $w = 1/z$ för $z \neq 0$ få utvecklingen

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1/n!}{z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1/2}{z^2} + \frac{1/6}{z^3} + \dots, \quad z \in \mathbb{C}^*,$$

och eftersom denna serie konvergerar i området och ser ut som en Laurentserie är den också Laurentserien för $e^{1/z}$ i $\mathbb{C}^*$, enligt Proposition 4.16. ▲

4.27. Exempel. Vi ska bestämma Maclaurin- respektive Laurentserier för

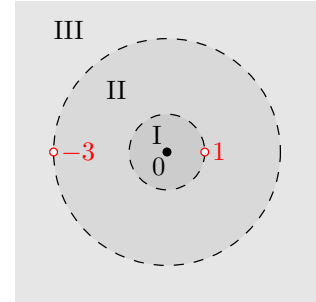
$$f(z) = \frac{z^4 - z^3 - 8z^2 + 12z - 8}{z^2 + 2z - 3}$$

i områden med centrum i origo. Polynomdivision och partialbråksuppdelning ger först att

$$f(z) = z^2 - 3z + 1 - \frac{1}{z-1} + \frac{2}{z+3}.$$

Vi ser att f är analytisk utom i punkterna $z = 1$ och $z = -3$, så de största områdena med centrum i origo där f kan utvecklas i serier med potenser av z är

- (I) $|z| < 1$,
- (II) $1 < |z| < 3$,
- (III) $|z| > 3$,



se figuren.

Geometriskas serier med kvot z om $|z| < 1$ och kvot $1/z$ om $|z| > 1$ ger att

$$\frac{1}{z-1} = \begin{cases} -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n, & |z| < 1, \\ \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-(1/z)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}, & |z| > 1, \end{cases}$$

och geometriska serier med kvot $-z/3$ om $|z| < 3$ och kvot $-3/z$ om $|z| > 3$ ger att

$$\frac{1}{z+3} = \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-(-z/3)} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}, & |z| < 3, \\ \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-(-3/z)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{z^{n+1}}, & |z| > 3, \end{cases}$$

vilket sammantaget ger oss följande serier i de tre olika områdena:

$$f(z) = \begin{cases} z^2 - 3z + 1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}, & |z| < 1, \\ z^2 - 3z + 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}, & 1 < |z| < 3, \\ z^2 - 3z + 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{z^{n+1}}, & |z| > 3. \end{cases}$$

Utvecklingen i område (I), alltså i skivan $|z| < 1$, saknar negativa z -potenser och är en Maclaurin-utveckling, vilket är som det ska vara eftersom f är analytisk i den skivan. ▲

Att addera potensserier är triviale, liksom att multiplicera dem med en konstant $c \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n + b_n) z^n \quad \text{och} \quad c \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (ca_n) z^n,$$

och serierna i högerleden konvergerar åtminstone där serierna i vänsterleden konvergerar.

Att *multiplicera* potensserier, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} b_l z^l$, visar sig också fungera på ett intuitivt naturligt sätt: Varje term i den ena serien multipliceras med samtliga termer i den andra, och därefter summeras produkterna; om $n \in \mathbb{Z}$ blir koefficienten för z^n i produkten därför summan av

alla termer $a_k b_l$ där $k + l = n$, precis som vid multiplikation av polynom. Att det fungerar så är inte trivialt – det är inte ens självklart att produkten kan skrivas som en potensserie över huvud taget, och dessutom får man ofta oändligt många termer i produkten med ett och samma gradtal.

4.28. Sats (Multiplikation av potensserier). Antag att konvergensringarna för potensserierna $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$ och $\sum_{l=-\infty}^{\infty} b_l z^l$ båda innehåller ringen $R_1 < |z| < R_2$, där $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$. Låt $f(z)$ och $g(z)$ vara dessa respektive seriesummor i denna ring, och sätt $h(z) = f(z)g(z)$. Då är i denna ring $h(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, d.v.s.,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} b_l z^l = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad \text{där} \quad c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k}, \quad n \in \mathbb{Z};$$

speciellt är de numeriska serierna $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k}$, $n \in \mathbb{Z}$, konvergenta.

Om de båda serierna saknar negativa potenser av z kan sambandet förenklas till

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_l z^l = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad \text{där} \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Bevis. Vi bevisar den andra delen av satsen, alltså den del som handlar om vanliga (enkelsidiga) potensserier. Den svårare första delen av satsen kan bevisas m.h.a. s.k. *likformig konvergens* av (dubbelsidiga) potensserier, och ett bevis återfinns i Avsnitt 4.8.

Antag att potensserierna $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ och $\sum_{l=0}^{\infty} b_l z^l$ båda innehåller skivan $|z| < R$, där $R > 0$. Sätt $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $g(z) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l z^l$ och $h(z) = f(z)g(z)$, samtliga för $|z| < R$. Eftersom f och g är analytiska i skivan är också h det, så $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ för alla z i skivan, och Maclaurinkoefficienterna c_n , $n \in \mathbb{N}$, kan skrivas

$$c_n = \frac{h^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(fg)^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(0) g^{(n-k)}(0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \frac{g^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

enligt den allmänna regeln för högre ordningens derivator av en produkt, ofta kallad Leibniz regel: $(fg)' = f'g + fg'$, $(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$, $(fg)''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$ etc. ■

4.29. Exempel. Funktionen $e^{1/z} \operatorname{Log}(1+z)$ är analytisk utom i origo och längs strålen $]-\infty, -1]$; i området $0 < |z| < 1$ har den därför en Laurentserie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$. Standardutvecklingar ger att

$$\begin{aligned} e^{1/z} \operatorname{Log}(1+z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1/k!}{z^k} \cdot \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{l} z^l = \left(1 + \frac{1/1!}{z} + \frac{1/2!}{z^2} + \dots\right) \left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad 0 < |z| < 1, \end{aligned}$$

se Proposition 4.21 och Exempel 4.26. Genom att samla ihop alla termer av, säg, grad 2 i produkten får vi att

$$c_2 = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2!} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4!} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + \dots,$$

och allmänt är, för $n \geq 1$,

$$c_n = 1 \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{1}{1!} \cdot \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{(-1)^{n+3}}{n+2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k+1}}{(n+k) \cdot k!}, \quad n \geq 1;$$

på liknande sätt fås att

$$c_n = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{l \cdot (l-n)!}, \quad n \leq 0,$$

▲

I ovanstående satser och exempel har vi utvecklat funktioner som är analytiska i en skiva eller ring med centrum i origo. Om i stället **centrum ligger i $z_0 \in \mathbb{C}$** sätter vi helt enkelt

$$w = z - z_0 \quad \text{och studerar funktionen} \quad g(w) = f(w + z_0),$$

som då är analytisk i en skiva eller ring med centrum i origo, och vi får serier av typen

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \text{respektive} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

där koefficienterna c_n ges av integralformeln

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}} ds$$

för alla moturs cirklar C_ρ med centrum i z_0 och radie ρ som finns i konvergensområdet. Den första serien kallas **Taylorserie**, och för den kan koefficienterna också skrivas $c_n = f^{(n)}(z_0)/n!$, medan den andra serien fortfarande brukar kallas Laurentserie trots att konvergensområdets centrum inte längre behöver vara origo (även Maclaurinserier är ju Taylorserier, för övrigt).

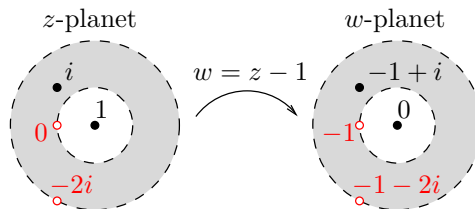
4.30. Exempel. Låt

$$f(z) = \frac{4}{z^3 + 2iz^2}.$$

Vi ska utveckla f i en Laurentserie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - 1)^n$ i största möjliga område som innehåller punkten $z = i$. Vi partialbråksuppdelar och sätter därefter $w = z - 1$, d.v.s. $z = w + 1$:

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{2i}{z^2} - \frac{1}{z + 2i} = \frac{1}{w + 1} - \frac{2i}{(w + 1)^2} - \frac{1}{w + 1 + 2i}.$$

Som funktion i w är den analytisk utom i punkterna $w = -1$ och $w = -1 - 2i$, och eftersom $|-1| = 1$ och $|-1 - 2i| = \sqrt{5}$ är de möjliga konvergensområdena med centrum i $w = 0$ därför $|w| < 1$, $1 < |w| < \sqrt{5}$ och $|w| > \sqrt{5}$, se figur. Punkten $z = i$ svarar mot punkten $w = -1 + i$, som ligger i området $1 < |w| < \sqrt{5}$ då ju $|-1 + i| = \sqrt{2}$, och det är alltså serien i det området vi söker.



Geometrisk serien med kvot $-1/w$ då $|w| > 1$ ger att

$$\frac{1}{w + 1} = \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{1 + 1/w} = \frac{1}{w} \sum_{n=0}^{\infty} (-1/w)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^{-n-1}, \quad |w| > 1,$$

och termvis derivering ger dessutom att

$$\frac{1}{(w + 1)^2} = -\frac{d}{dw} \left(\frac{1}{w + 1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n + 1) w^{-n-2}, \quad |w| > 1.$$

Vidare är, med kvoten $-w/(1 + 2i)$ då $|w| < \sqrt{5}$,

$$\frac{1}{w + 1 + 2i} = \frac{1}{1 + 2i} \cdot \frac{1}{1 + w/(1 + 2i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n w^n}{(1 + 2i)^{n+1}}, \quad |w| < \sqrt{5},$$

så sammantaget får vi att

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z - 1)^{n+1}} - 2i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n + 1)}{(z - 1)^{n+2}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z - 1)^n}{(1 + 2i)^{n+1}}, \quad 1 < |z - 1| < \sqrt{5}.$$

▲

4.31. Exempel (*En Taylorserie med "för stor" konvergensskiva). Låt $f(z) = \operatorname{Log} z$. Eftersom $f'(z) = z^{-1}$, $f''(z) = (-1)z^{-2}$ och, allmänt, $f^{(n)}(z) = (-1) \cdot \dots \cdot (-n+1)z^{-n}$ då $n \geq 3$ får vi att Taylorserien S för f kring punkten $z = c$, där c inte ligger på negativa realaxeln $]-\infty, 0]$, är

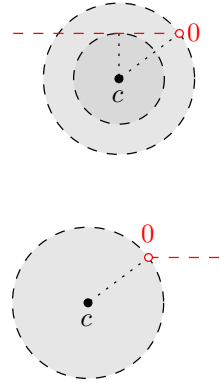
$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (z-c)^n = \operatorname{Log} c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (z-c)^n}{n c^n}, \quad |z-c| < |c|;$$

notera att kvotkriteriet medför att denna potensseries konvergensområde är skivan $|(z-c)/c| < 1$, d.v.s. skivan $|z-c| < |c|$.

Vi antar i fortsättningen att $\operatorname{Re} c < 0$ och $\operatorname{Im} c < 0$, som i figuren intill. Den största skivan med centrum i c där f är analytisk är skivan $|z-c| < |\operatorname{Im} c|$ (mörkgrå i figuren), ty f är inte analytisk på negativa realaxeln $]-\infty, 0]$. Detta är en strikt mindre skiva än Taylorseriens konvergensskiva $|z-c| < |c|$. Från Sats 4.19 vet vi att $f(z) = S(z)$ (åtminstone) i den mindre skivan, och vi ska nu undersöka vilka värden $S(z)$ har i resten av konvergensskivan.

S är Taylorserie för *alla* grenar till $\log z$ som har värdet $\operatorname{Log} c$ i punkten $z = c$, ty alla sådana grenar har samma derivator där. Betrakta nu grenen $g(z) = \ln |z| + i\theta(z)$, där $-2\pi < \theta(z) < 0$; då är speciellt $g(c) = \operatorname{Log} c$. Funktionen g är analytisk i hela skivan $|z-c| < |c|$, se figur, och därför är $g(z) = S(z)$ i hela denna skiva. Vidare är $g(z) = f(z)$ i den del av denna skiva som ligger i undre halvplanet $\operatorname{Im} z < 0$, och därmed är också $S(z) = f(z)$ där, medan $g(z) = f(z) - 2\pi i$ i den del som ligger i övre halvplanet $\operatorname{Im} z > 0$, varför $S(z) = f(z) - 2\pi i$ där.

S är ett exempel på en s.k. **analytisk fortsättning** av $\operatorname{Log} z$ från den mindre skivan till den större. Analytisk fortsättning behandlas i detalj i TATA78 Komplex analys fk. ▲



4.4 Serieutvecklingar med $\mathcal{O}(z^n)$

I envariabelanalysen definierades symbolen $\mathcal{O}(x^n)$ för $n \in \mathbb{N}$, se Forsling-Neymark avsnitt 8.2 (Maclaurin- och Taylorutveckling med restterm i ordoform): Den är en allmän beteckning för en funktion av formen $x^n b(x)$ där b är en funktion som är *begränsad* i en omgivning till 0.

När vi nu definierar symbolen $\mathcal{O}(z^n)$ kräver vi mer än så:

4.32. Definition. Låt $n \in \mathbb{N}$. Vi säger att en funktion f är **(stora) ordo z^n** , skrivet

$$f(z) = \mathcal{O}(z^n),$$

om det finns en funktion g som är analytisk i 0 (d.v.s. i någon omgivning till 0) sådan att

$$f(z) = z^n g(z)$$

i någon omgivning till 0.

Eftersom $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, Maclaurinserien för g , i någon skiva $|z| < r$ om g är analytisk i 0, ser vi att $f(z) = \mathcal{O}(z^n)$ om och endast om f , i skivan $|z| < r$, kan skrivas som en konvergent potensserie där alla termer har grad $\geq n$.

4.33. Proposition (Räkneregler för ordo). Om $m, n \in \mathbb{N}$ gäller följande:

1. $z^n = \mathcal{O}(z^n)$,
2. $m \leq n \Rightarrow \mathcal{O}(z^m) + \mathcal{O}(z^n) = \mathcal{O}(z^m)$,
3. $\mathcal{O}(z^m) \cdot \mathcal{O}(z^n) = \mathcal{O}(z^{m+n})$,
4. $(\mathcal{O}(z^m))^n = \mathcal{O}(z^{mn})$,
5. $f(z) = \mathcal{O}(z^m)$ och $g(w) = \mathcal{O}(w^n) \Rightarrow g(f(z)) = \mathcal{O}(z^{mn})$,
6. $\int_{[0,z]} \mathcal{O}(s^n) ds = \mathcal{O}(z^{n+1})$,
7. $(\mathcal{O}(z^{n+1}))' = \mathcal{O}(z^n)$.

Räknereglerna 1–5 ovan för $\mathcal{O}(z^n)$ har direkta motsvarigheter för $\mathcal{O}(x^n)$. Däremot behöver övriga två regler inte vara sanna i det reella fallet: $\mathcal{O}(x^n)$ behöver i själva verket inte ens vara integrerbar (regel 6) och $\mathcal{O}(x^{n+1})$ behöver inte ens vara deriverbar (regel 7).

Bevis av Proposition 4.33. Definitionen av $\mathcal{O}(z^n)$ ger genast:

1. $z^n = z^n g(z)$ där $g(z) = 1$;
2. $z^m g_1(z) + z^n g_2(z) = z^m g(z)$ där $g(z) = g_1(z) + z^{n-m} g_2(z)$ och $n - m \in \mathbb{N}$;
3. $z^m g_1(z) \cdot z^n g_2(z) = z^{m+n} g(z)$ där $g(z) = g_1(z) g_2(z)$;
4. $(z^m g_1(z))^n = z^{mn} g(z)$ där $g(z) = (g_1(z))^n$;
5. om $f(z) = z^m g_1(z)$ och $g(w) = w^n g_2(w)$ så är $g(f(z)) = (f(z))^n g_2(f(z)) = (z^m g_1(z))^n g_2(f(z)) = z^{mn} h(z)$ med $h(z) = (g_1(z))^n g_2(f(z))$;
6. termvis integrering av $f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k z^k$ ger $\int_{[0,z]} f(s) ds = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_{k-1} z^k / k$;
7. $(z^{n+1} g_1(z))' = z^n g(z)$ där $g(z) = (n+1)g_1(z) + z g_1'(z)$.

■

Följande entydighetsresultat känner vi också igen ifrån reella $\mathcal{O}(x^n)$:

4.34. Proposition (Entydighet hos koefficienterna). Om $n \in \mathbb{N}$ och

$$c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \mathcal{O}(z^{n+1}) = d_0 + d_1 z + \dots + d_n z^n + \mathcal{O}(z^{n+1}),$$

så är $c_0 = d_0, c_1 = d_1, \dots, c_n = d_n$.

Bevis. Påståendet följer direkt från Proposition 4.16, men vi ger här ett mera elementärt bevis.

Enligt förutsättningen finns det funktioner $g(z)$ och $h(z)$, analytiska i skivor $|z| < \delta_1$ respektive $|z| < \delta_2$, sådana att, med $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$,

$$c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + z^{n+1} g(z) = d_0 + d_1 z + \dots + d_n z^n + z^{n+1} h(z), \quad |z| < \delta,$$

varför

$$h(z) - g(z) = \frac{c_0 - d_0}{z^{n+1}} + \frac{c_1 - d_1}{z^n} + \dots + \frac{c_n - d_n}{z}, \quad 0 < |z| < \delta.$$

Eftersom $h(z) - g(z) \rightarrow h(0) - g(0) \in \mathbb{C}$ då $z \rightarrow 0$ och högerledet blir obegränsat då $z \rightarrow 0$ om $c_k - d_k \neq 0$ för något $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ måste alltså $c_k = d_k$ för $k = 0, 1, \dots, n$. ■

4.35. Exempel. Vi ska bestämma alla termer av grad högst 3 i Maclaurinserien för

$$f(z) = \frac{\cos 2z}{e^z + 1},$$

och även bestämma seriens konvergensskiva.

Vi ser först att f är analytisk utom där

$$e^z + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^z = -1 \quad \Leftrightarrow \quad z = \log(-1) = i(\pi + 2n\pi), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Eftersom $\cos 2z \neq 0$ i dessa punkter inser vi att $|f(z)| \rightarrow +\infty$ då z närmar sig var och en av dem, så Maclaurinseriens konvergensradie $R = \pi$, enligt Proposition 4.20. För att bestämma början på själva serien gör vi ansatsen

$$f(z) = \frac{\cos 2z}{e^z + 1} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \mathcal{O}(z^4)$$

och använder standardutvecklingarna $\cos w = 1 - w^2/2 + \mathcal{O}(w^4)$, med $w = 2z$ så att $\cos 2z = 1 - 2z^2 + \mathcal{O}(z^4)$, och $e^z = 1 + z + z^2/2 + z^3/6 + \mathcal{O}(z^4)$. Multiplikation med $e^z + 1$ ger att

$$\begin{aligned} 1 - 2z^2 + \mathcal{O}(z^4) &= (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \mathcal{O}(z^4)) \left(2 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \mathcal{O}(z^4) \right) \\ &= 2c_0 + (c_0 + 2c_1)z + \left(\frac{c_0}{2} + c_1 + 2c_2 \right) z^2 + \left(\frac{c_0}{6} + \frac{c_1}{2} + c_2 + 2c_3 \right) z^3 + \mathcal{O}(z^4), \end{aligned}$$

och entydighet hos koefficienterna (Proposition 4.34 ovan) ger det triangulära ekvationssystemet $2c_0 = 1$, $c_0 + 2c_1 = 0$, $c_0/2 + c_1 + 2c_2 = -2$ och $c_0/6 + c_1/2 + c_2 + 2c_3 = 0$, med den entydiga lösningen $c_0 = 1/2$, $c_1 = -1/4$, $c_2 = -1$ och $c_3 = 25/48$. Alltså får vi serien

$$f(z) = \frac{\cos 2z}{e^z + 1} = \frac{1}{2} - \frac{z}{4} - z^2 + \frac{25z^3}{48} + \mathcal{O}(z^4), \quad |z| < \pi,$$

och att detta verkligen är (början av) Maclaurinserien följer också av Proposition 4.34. ▲

4.36. Exempel (Alternativ lösning till Exempel 4.35). Vi kan också bestämma termerna i Maclaurinserien i föregående exempel m.h.a. standardutvecklingen

$$(1 + s)^{-1} = 1 - s + s^2 - s^3 + \mathcal{O}(s^4).$$

Eftersom

$$e^z + 1 = 2 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \mathcal{O}(z^4) = 2 \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{12} + \mathcal{O}(z^4) \right) = 2(1 + s)$$

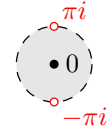
om

$$s = \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{12} + \mathcal{O}(z^4)$$

låter vi s vara just detta, och får successivt att

$$s^2 = s \cdot s = \left(\frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{12} + \mathcal{O}(z^4) \right) \left(\frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{12} + \mathcal{O}(z^4) \right) = \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{4} + \mathcal{O}(z^4),$$

$$s^3 = s^2 \cdot s = \left(\frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{4} + \mathcal{O}(z^4) \right) \left(\frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{12} + \mathcal{O}(z^4) \right) = \frac{z^3}{8} + \mathcal{O}(z^4)$$



och $\mathcal{O}(s^4) = \mathcal{O}(z^4)$. Således blir, eftersom $1/(e^z + 1) = (1/2)(1 + s)^{-1}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{e^z + 1} &= \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{12} + \mathcal{O}(z^4) \right) + \left(\frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{4} + \mathcal{O}(z^4) \right) - \left(\frac{z^3}{8} + \mathcal{O}(z^4) \right) + \mathcal{O}(z^4) \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^3}{48} + \mathcal{O}(z^4),\end{aligned}$$

och om vi avslutar med att multiplicera denna utveckling med $\cos 2z = 1 - 2z^2 + \mathcal{O}(z^4)$ får vi samma termer som i föregående exempel. ▲

4.5 Cauchys olikheter med följder

En ML-uppskattning av integralen i (4.4) på s. 74 ger oss följande enkla men nyttiga resultat:

4.37. Följdsats (Cauchys olikheter). Om f är analytisk i ringen $r_1 < |z| < r_2$ och c_n , $n \in \mathbb{Z}$, är Laurentseriekoefficienterna för f i denna ring, så gäller olikheterna

$$|c_n| \leq \frac{\max_{|s|=\rho} |f(s)|}{\rho^n}, \quad r_1 < \rho < r_2, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.5)$$

Olikheterna gäller naturligtvis också om f är analytisk i en hel skiva $|z| < r$, med $r_1 = 0$ och $r_2 = r$, eftersom den då är analytisk även i $0 < |z| < r$; dessutom är $c_n = 0$ för $n = -1, -2, -3, \dots$ i så fall. Om f t.o.m. är hel, d.v.s. analytisk i hela $\mathbb{C}$ så att $r = \infty$, kan vi nu enkelt bevisa följande fundamentala resultat (för ett alternativt bevis, utan hänvisning till serier, se Övning 4.22):

4.38. Sats (Liouilles sats). Om f är hel analytisk och begränsad, så är f konstant.

Bevis. Att f är hel analytisk medför att $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, Maclaurinserien för f , för alla $z \in \mathbb{C}$. Eftersom f dessutom är begränsad finns det ett tal M sådant att $|f(z)| \leq M$ för alla $z \in \mathbb{C}$, och därför säger Cauchys olikheter att

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}, \quad \rho > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Här är vänsterledet $|c_n|$ oberoende av ρ medan högerledet $M/\rho^n \rightarrow 0$ då $\rho \rightarrow \infty$ för fixt $n \geq 1$, så $c_n = 0$ för alla $n \geq 1$. Därför är $f(z) = c_0$ för alla $z \in \mathbb{C}$, så f är konstant. ■

4.39. Anmärkning. Liouilles sats är naturligtvis även den anmärkningsvärt stark, precis som resultaten om regularitet och entydighet som vi formulerade i Avsnitt 1.4, och har ingen motsvarighet i reell analys. Att en funktion f på realaxeln är deriverbar och begränsad medför ju inte att den är konstant, vilket redan det enkla motexemplet $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, visar. ▲

Nu kan vi, med våra *analytiska* metoder, t.o.m. bevisa följande centrala *algebraiska* sats (för ett alternativt bevis, utan hänvisning till Liouilles sats, se Övning 4.23):

4.40. Följdsats (Algebrans fundamentalsats). Varje ickekonstant polynom p har (minst) ett nollställe i $\mathbb{C}$.

Bevis. Om p är ett ickekonstant polynom kan det skrivas i formen

$$p(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{n-1} z^{n-1} + c_n z^n \quad \text{för något } n \geq 1, \text{ där } c_n \neq 0.$$

Vi gör ett motsägelsetbevis: Antag att $p(z) \neq 0$ för alla $z \in \mathbb{C}$. Sätt $f = 1/p$. Då är f hel analytisk, och eftersom

$$\left| \frac{p(z)}{z^n} \right| = \left| \frac{c_0}{z^n} + \frac{c_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{c_{n-1}}{z} + c_n \right| \rightarrow |c_n| > 0$$

då $|z| \rightarrow +\infty$ finns det ett tal R sådant att $|p(z)/z^n| \geq |c_n|/2 > 0$ då $|z| > R$; för dessa z är det därför sant att $|p(z)| \geq |c_n||z|^n/2 \geq |c_n|R^n/2$. Om vi sätter $M_1 = 2/(|c_n|R^n)$ har vi alltså bevisat att $|f(z)| \leq M_1$ då $|z| > R$. Vidare, på den kompakta mängden $|z| \leq R$ är den reellvärda kontinuerliga funktionen $|f|$ begränsad, enligt reell flervariabelanalys, vilket betyder att det finns en konstant M_2 sådan att $|f(z)| \leq M_2$ då $|z| \leq R$. Sätt nu $M = \max(M_1, M_2)$. Då är

$$|f(z)| \leq M \quad \text{för alla } z \in \mathbb{C}.$$

Liouvilles sats medför därför att f , och därmed p , är konstant, vilket är en motsägelset. Alltså måste $p(z) = 0$ för något $z \in \mathbb{C}$. ■

★ ÖVNINGAR

★ 4.13 Ange Maclaurinserierna för $\cosh$, $\sinh$, $\cos$ och $\sin$ genom att utgå från serien för $\exp$. Ange också konvergensskivorna.

★ 4.14 Bestäm de tre första icke-försvinnande termerna i Maclaurinserien för f , och ange konvergensskivan, om $f(z)$ är

$$(a) \tan z \quad (b) \frac{(1-z)^{1/2}}{1+z^2} \text{ (principalgrenen)} \quad (c) \frac{1}{\cos z - 5/4}$$

★ 4.15 Om $f(z) = \exp(z^2)$, beräkna $f^{(20)}(0)$.

★ 4.16 Utveckla f i Taylorserie kring punkten $2i$, och ange tillhörande konvergensskiva, om

$$(a) f(z) = \frac{1}{z} \quad (b) f(z) = \frac{1}{z^2} \quad (c) f(z) = \operatorname{Log} z$$

★ 4.17 Bestäm Laurentserien för $1/(z+z^2)$ i följande områden: (a) $0 < |z| < 1$ (b) $|z| > 1$
(c) $0 < |z+1| < 1$ (d) $|z+1| > 1$ (e) $|z+1/2| < 1/2$ (f) $2 < |z-2| < 3$
(g) största möjliga ring med centrum $z = i$ som innehåller punkten $z = -1/2$

★ 4.18 Bestäm Laurentserierna för följande funktioner i de angivna områdena i $\mathbb{C}$:

$$(a) \frac{1}{(1+z)(9-z^2)}, \quad 1 < |z| < 3 \quad (b) \frac{e^z}{z-1}, \quad |z| > 1 \quad (c) (1+z) \sin \frac{1}{z}, \quad |z| > 0$$

★ 4.19 Antag att f är hel analytisk och att $|f(z)| \leq e^{|z|^2}$ för alla $z \in \mathbb{C}$. Visa att

$$\left| \frac{f^{(4)}(0)}{4!} \right| \leq \frac{e^{\rho^2}}{\rho^4}, \quad \rho > 0.$$

Som synes är vänsterledet i olikheten oberoende av ρ , medan högerledet beror på ρ . Vilken bästa uppskattning av $|f^{(4)}(0)|$ får vi av detta?

★ 4.20 Visa följande generalisering av Liouvilles sats: Om $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ och det finns konstanter $C \geq 0$ och $N \in \mathbb{N}$ sådana att $|f(z)| \leq C(1+|z|^N)$ för alla $z \in \mathbb{C}$, så är $f(z)$ ett polynom i z av grad högst N . Ledning: Visa att Maclaurinkoefficienterna $c_n = 0$ för alla $n > N$.

★ 4.21 Visa att om f är analytisk då $z \neq 0$ och $|f(z)| \leq \sqrt{|z|} + 1/\sqrt{|z|}$, så är f konstant. Ledning: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ i $0 < |z| < \infty$. Vilka Laurentkoefficienter c_n är noll?

- ★ **4.22** Använd Cauchys integralformel för derivata (Följdsats 3.22 på s. 48) för att visa att en hel begränsad funktion f måste uppfylla att $f'(z) = 0$ för alla $z \in \mathbb{C}$. Slutsats?
- ★ **4.23** Bevisa algebrans fundamentalsats m.h.a. maximumprincipen (Sats 3.34 på s. 56) tillämpad på $f = 1/p$ om $p \neq 0$.

4.6 Nollställen och singulariteter

Algebrans fundamentalsats (Följdsats 4.40) och faktorsatsen använda upprepade gånger medför att varje ickekonstant **polynom** $p(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_nz^n$ av grad $n \geq 1$ kan faktoriseras i förstegradsfaktorer: $p(z) = c_n(z - z_1) \cdot \dots \cdot (z - z_n)$ för några tal $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, polynoms **nollställen**. Talen $z_1, \dots, z_n$ behöver ju inte alla vara olika, och om z_0 är ett nollställe som upprepas precis $N \geq 1$ gånger får vi med polynomdivision ett polynom q sådant att

$$p(z) = (z - z_0)^N q(z), \quad \text{där } q(z_0) \neq 0,$$

för alla $z \in \mathbb{C}$; heltalet N är nollställets **multiplicitet**.

Vi generaliserar till analytiska funktioner:

4.41. Definition (Multiplicitet av nollställe). Om f är analytisk i z_0 sägs f ha nollställe av multiplicitet $N \in \{1, 2, 3, \dots\}$ i z_0 om det finns en funktion g som är analytisk i z_0 sådan att

$$f(z) = (z - z_0)^N g(z), \quad \text{där } g(z_0) \neq 0,$$

för alla z i någon omgivning till z_0 .

Om vi utvecklar f i Taylorserie kring z_0 ,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < r,$$

ser vi genast att definitionen ovan är ekvivalent med att

$$c_0 = c_1 = \dots = c_{N-1} = 0 \quad \text{men} \quad c_N \neq 0,$$

vilket också, eftersom $c_n = f^{(n)}(z_0)/n!$, är ekvivalent med att

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(N-1)}(z_0) = 0 \quad \text{men} \quad f^{(N)}(z_0) \neq 0.$$

4.42. Exempel (Multiplicitetsundersökning). Låt

$$f(z) = z^2(e^z - 1).$$

Vi ser att $f(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 = 0$ eller $e^z - 1 = 0 \Leftrightarrow z = 0$ eller $z = \log 1 = 2n\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$.

Kort Maclaurinutveckling ger att $f(z) = z^3 + \mathcal{O}(z^4)$, så nollstället $z = 0$ har multiplicitet 3 (nollstället är trippelt). I övriga nollställen till f , d.v.s. i punkterna $z = 2n\pi i$, $n \neq 0$, är redan $f'(z) = 2z(e^z - 1) + z^2e^z = (2n\pi i)^2 \neq 0$, så dessa har multiplicitet 1 (är enkla).

Alternativt kan vi undersöka nollställena för varje enskild faktor som ingår i $f(z)$ separat: z^2 har dubbelt nollställe i $z = 0$ och $h(z) = e^z - 1$ har enkla nollställen i $z = 2n\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$ (eftersom $h'(z) = e^z = 1 \neq 0$ där); således har f nollställen av multiplicitet $2 + 1 = 3$ i $z = 0$ och av multiplicitet 1 i $z = 2n\pi i$, $n \neq 0$. ▲

Icke-konstanta polynom har ändligt många nollställen, som därför med nödvändighet måste vara isolerade. Även nollställena till icke-konstanta analytiska funktioner visar sig vara isolerade (även om de naturligtvis inte behöver vara ändligt många).

4.43. Sats (Isolerade nollställen). Antag att f är analytisk i skivan $|z| < r$ och att $f(0) = 0$. Då gäller det *antingen* att

$$(1) \quad f(z) = 0 \text{ för alla } z \text{ i skivan } |z| < r$$

eller att

$$(2) \quad f \text{ har nollställe av någon multiplicitet } N \geq 1 \text{ i punkten } 0.$$

I fall (2) finns det ett tal $\delta > 0$ sådant att $f(z) \neq 0$ för alla z i den punkterade skivan $0 < |z| < \delta$, så nollstället som finns i $z = 0$ är isolerat.

Bevis. I skivan $|z| < r$ är $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, Maclaurinserien för f , och eftersom $f(0) = 0$ är $c_0 = 0$. Vi får nu två fall:

(1) Om alla $c_n = 0$ så är $f(z) = 0$ för alla z i skivan $|z| < r$.

(2) Om något $c_n \neq 0$ finns det ett minsta heltal $N \geq 1$ sådant att $c_N \neq 0$, varför

$$f(z) = c_N z^N + c_{N+1} z^{N+1} + \dots = z^N (c_N + c_{N+1} z + \dots) = z^N \sum_{k=0}^{\infty} c_{N+k} z^k, \quad |z| < r.$$

Låt $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{N+k} z^k$ för $|z| < r$; då är $f(z) = z^N g(z)$ där. Eftersom potensserien i definitionen av g har samma konvergensradie R som Maclaurinserien för f , och eftersom $R \geq r$ (se Sats 4.19) är g analytisk i skivan $|z| < r$; det faktum att $g(0) = c_N \neq 0$ medför därför att f har nollställe av multiplicitet N i 0. Vidare är g kontinuerlig, så det finns ett tal $\delta > 0$ sådant att $\delta \leq r$ och $g(z) \neq 0$ i skivan $|z| < \delta$, varför $f(z) = z^N g(z) \neq 0$ i den punkterade skivan $0 < |z| < \delta$. ■

Vi kan nu bevisa resultatet om entydighet som vi formulerade och använde i Avsnitt 1.4: Om f och g är hela funktioner som är lika på realaxeln, så är de lika i hela planet. Vi ska i själva verket bevisa en mycket mera allmän sats än så, och i ett godtyckligt område Ω :

4.44. Sats (Entydighetssatsen för analytiska funktioner). Antag att $f, g \in \mathcal{A}(\Omega)$. Om mängden

$$M = \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$$

har en hopningspunkt i Ω (se Definition 1.7 på s. 6), så är $f(z) = g(z)$ för alla $z \in \Omega$.

Bevis. Låt $h = f - g$, som då är analytisk i Ω . Vi ska visa att $h = 0$.

Låt $c \in \Omega$ vara en hopningspunkt till M . Då finns det en följd av punkter $z_1, z_2, z_3, \dots \in \Omega$, alla olika, sådana att $h(z_n) = 0$ för $n = 1, 2, 3, \dots$ och $z_n \rightarrow c$ då $n \rightarrow \infty$. Eftersom h är kontinuerlig i Ω är också $h(c) = 0$, men detta nollställe är ju inte isolerat, så $h(z) = 0$ för alla z i varje skiva $D(c, r) \subseteq \Omega$, enligt satsen om isolerade nollställen (Sats 4.43).

Tag nu en godtycklig punkt $w \in \Omega$ och förbind c med w med en kedja av cirkelskivor $D_0, D_1, \dots, D_n$ med mittpunkter $c_k \in D_k$, $c_0 = c$, $c_n = w$, och $c_k \in D_{k-1}$ för $k = 1, 2, \dots, n$, se Hjälpsats 1.12 med figur på s. 8. Enligt ovan är $h = 0$ i D_0 , och eftersom c_1 är en inre punkt i D_0 är också c_1 ett icke-isolerat nollställe till h . Således är $h = 0$ även i D_1 , och genom att upprepa resonemanget ett ändligt antal gånger får vi så småningom att $h = 0$ också i D_n , och speciellt är $h(w) = 0$. Men w var en godtycklig punkt i Ω , så $h = 0$ i hela Ω . ■

4.45. Anmärkning (*En starkare maximumprincip). Om vi kombinerar maximumprincipen (Sats 3.34 på s. 56) och entydighetssatsen (Sats 4.44) inser vi att det räcker att $|f|$ har ett *lokalt* maximum någonstans i Ω för att f ska vara konstant i Ω . Om nämligen $c \in \Omega$ är en lokal maximipunkt för $|f|$, d.v.s. om det finns ett $r > 0$ sådant att $|f(z)| \leq |f(c)|$ för alla $z \in D = D(c, r) \subseteq \Omega$, så ger maximumprincipen på D att f är konstant, lika med $f(c)$, i D . Om vi sedan sätter $g(z) = f(c)$, konstant, för $z \in \Omega$ så är g analytisk i Ω och $f = g$ i D , som är en mängd med hopningspunkt i Ω , varför entydighetssatsen ger att $f(z) = g(z) = f(c)$ för alla $z \in \Omega$. ▲

4.46. Anmärkning (*Analytiska funktioner med givna nollställen). Om $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ är givna är det lätt att konstruera en (hel) analytisk funktion med dessa nollställen och inga andra: polynomet $p(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k) = (z - z_1) \cdot \dots \cdot (z - z_n)$ duger.

Om vi i stället har en oändlig följd $z_1, z_2, z_3, \dots \in \Omega$, där samma tal får upprepas *ändligt* många gånger, kan man visa att det går att konstruera en funktion $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ som har dessa nollställen, med rätt multipliciteter, och inga andra, förutsatt att följderna ovan saknar hopningspunkt i Ω (om den skulle ha hopningspunkt är det naturligtvis omöjligt, eftersom $f = 0$ i hela Ω i så fall, enligt entydighetssatsen). Det är dock inte så enkelt som att bara skriva $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n (z - z_k)$ eftersom det dels kan hända att detta gränsvärde inte ens existerar som ett komplext tal för vissa z , dels att gränsvärdet är noll i andra punkter i Ω än i de önskade punkterna $z_1, z_2, z_3, \dots$.

Som ett smakprov ger vi funktionen $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n (1 - z^2/k^2)$, som man kan visa är en hel analytisk funktion med enkla nollställen $\pm 1, \pm 2, \dots$ och inga andra. I själva verket är $f(z) = (\sin(\pi z))/(\pi z)$ då $z \neq 0$ och $f(0) = 1$; denna funktion skrivs ofta $\text{sinc } z$ och är viktig i signalbehandling. ▲

Vi påminner om att en funktion f sägs vara analytisk i en punkt z_0 om den är analytisk i någon cirkelskiva $D(z_0, \delta)$.

4.47. Definition (Isolerad singularitet). Om f är analytisk i någon punkterad cirkelskiva $D^*(z_0, \delta)$ samtidigt som f inte är analytisk eller kanske inte ens är definierad i punkten z_0 , säger vi att z_0 är en isolerad singularitet till f .

4.48. Exempel. Låt

$$f_1(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad f_2(z) = \frac{1}{z^3}, \quad f_3(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right), \quad f_4(z) = \frac{1}{\sin(\pi/z)} \quad \text{och} \quad f_5(z) = \text{Log } z.$$

f_1, f_2 och f_3 är analytiska i $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ men inte definierade i origo, så $z_0 = 0$ är en isolerad singularitet till alla tre.

f_4 uppvisar ett mera komplicerat beteende: Den är analytisk förutom i de oändligt många punkterna $\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/3, \dots$ (d.v.s. där $\sin(\pi/z) = 0$) och i punkten 0. Var och en av punkterna $\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/3, \dots$ är en isolerad singularitet till f_4 (jfr Exempel 1.8 på s. 6) medan punkten 0 *inte* är det eftersom f_4 inte är analytisk i någon enda punkterad skiva $D^*(0, \delta)$.

f_5 är analytisk i $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ men inte kontinuerlig på $]-\infty, 0[$ och inte ens definierad i 0; *ingen* av punkterna $z = x \leq 0$ är alltså en isolerad singularitet till f_5 .

Det är ändå rimligt att säga att f_4 är singular i 0 och f_5 på $]-\infty, 0]$, men att precisera vad det egentligen ska betyda är inte helt trivialt (se Anmärkning 4.57). Vi ska i denna text nästan uteslutande studera isolerade singulariteter. ▲

Om z_0 är en isolerad singularitet till f så har f en Laurentserie

$$\begin{aligned} f(z) &= (c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots) + \left(\frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{c_{-3}}{(z - z_0)^3} + \dots \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < \delta, \end{aligned}$$

för något $\delta > 0$. Beroende på hur många negativa $(z - z_0)$ -potenser som finns med i denna serie definierar vi tre olika typer av isolerade singulariteter:

- **Hävbar singularitet:** En isolerad singularitet sägs vara hävbar om $c_n = 0$ för alla $n < 0$, d.v.s. om

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Om vi (om)definierar värdet i z_0 så att $f(z_0) = c_0$, så gäller serieutvecklingen ovan i hela skivan $|z - z_0| < \delta$, och eftersom serien är en konvergent potensserie i $(z - z_0)$ blir f , med detta värde på $f(z_0)$, analytisk i hela skivan, och serien blir helt enkelt Taylorserien för f i skivan. Speciellt ser vi att $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existerar ändligt (som ett komplext tal, c_0).

- **Pol:** En isolerad singularitet sägs vara en pol av **ordning** N , där $N \in \{1, 2, 3, \dots\}$, om $c_n = 0$ för alla $n < -N$ men $c_{-N} \neq 0$, d.v.s. om

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{c_{-N}}{(z - z_0)^N} + \frac{c_{-N+1}}{(z - z_0)^{N-1}} + \dots = \frac{1}{(z - z_0)^N} (c_{-N} + c_{-N+1}(z - z_0) + \dots) \\ &= \frac{1}{(z - z_0)^N} \sum_{k=0}^{\infty} c_{k-N}(z - z_0)^k = \frac{g(z)}{(z - z_0)^N}, \quad 0 < |z - z_0| < \delta, \end{aligned}$$

där $g(z)$ är den i skivan $|z - z_0| < \delta$ konvergenta potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} c_{k-N}(z - z_0)^k$ och är därmed analytisk där, och $g(z_0) = c_{-N} \neq 0$. Speciellt ser vi att $|f(z)| \rightarrow +\infty$ då $z \rightarrow z_0$.

- **Väsentlig singularitet:** En isolerad singularitet som varken är hävbar eller en pol sägs vara väsentlig, vilket är fallet precis då oändligt många av $c_{-1}, c_{-2}, c_{-3}, \dots$ är nollskilda. Speciellt är $|f|$ obegränsad nära z_0 men $|f(z)| \not\rightarrow +\infty$ då $z \rightarrow z_0$, se Proposition 4.52.

4.49. Exempel. Vi tittar på funktionerna f_1 , f_2 och f_3 i Exempel 4.48.

Eftersom

$$f_1(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots, \quad |z| > 0,$$

är 0 en hävbar singularitet till f_1 . Om vi definierar $f_1(0) = 1$ blir f_1 analytisk i 0, och f_1 blir t.o.m. en hel analytisk funktion.

Med $g(z) = 1$ kan vi trivalt skriva

$$f_2(z) = \frac{1}{z^3} = \frac{g(z)}{z^3},$$

så 0 är en pol av ordning 3 till f_2 .

Slutligen, som i Exempel 4.26 får vi att

$$f_3(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1/n!}{z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1/2}{z^2} + \frac{1/6}{z^3} + \dots, \quad |z| > 0,$$

och eftersom Laurentserien innehåller oändligt många negativa z -potenser är 0 en väsentlig singularitet till f_3 . ▲

Nollställen och poler kan således beskrivas på ett likartat sätt i (punkterade) omgivningarna till z_0 :

$$\text{nollställe: } f(z) = (z - z_0)^N \cdot g(z), \quad \text{pol: } f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^N},$$

där g i båda fallen är analytisk och nollskild i z_0 . För nollställen finns alltså faktorn $(z - z_0)^N$, $N \geq 1$, i täljaren medan den för poler finns i nämnaren. En enkel konsekvens av detta är att nollställen i täljare och nämnare i bråk (delvis) tar ut varandra, se Övning 4.29.

4.50. Exempel. Låt

$$f(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}.$$

Eftersom

$$f(z) = \frac{z - \sin z}{z \sin z} = \frac{z^3/6 + \mathcal{O}(z^5)}{z^2 + \mathcal{O}(z^4)} = z \cdot \frac{1/6 + \mathcal{O}(z^2)}{1 + \mathcal{O}(z^2)} = z \cdot g(z),$$

där g är analytisk i 0, ser vi att $z = 0$ är en hävbar singularitet till f , och f blir analytisk i 0 om vi sätter $f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0$. f har dessutom enkelt nollställe i $z = 0$, ty $g(0) = 1/6 \neq 0$.

Övriga singulariteter till f är övriga punkter där $\sin z = 0$, alltså $z = n\pi$, $n \neq 0$ heltal, som är enkla nollställen till $\sin z$ eftersom $\sin'(n\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n \neq 0$. Således har $1/\sin z$ enkelpoler där, och eftersom $1/z$ är analytisk där har även f enkelpoler där. ▲

4.51. Anmärkning (*Partialbråksuppdelning). Vi kan nu bevisa att varje rationell funktion

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad \text{där } \text{grad } p < \text{grad } q, \quad \text{kan skrivas} \quad f(z) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{m_k} \frac{a_{kl}}{(z - z_k)^l}$$

för entydigt bestämda konstanter $a_{kl} \in \mathbb{C}$, där p och q är polynom sådana att $\text{grad } p < \text{grad } q = m_1 + \dots + m_N$ och $z_1, \dots, z_N$ är de olika nollställena till $q(z)$, med multipliciteter $m_1, \dots, m_N$: Låt helt enkelt $\sum_{l=1}^{m_k} a_{kl}/(z - z_k)^l$ vara termerna med negativa $(z - z_k)$ -potenser i Laurentserien för f i någon punkterad skiva $0 < |z - z_k| < \delta_k$ runt z_k ; notera att f inte har värre singularitet där än en pol av ordning m_k . Dessa koefficienter är ju entydigt bestämda, och om vi sätter $\varphi(z) = f(z) - \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{m_k} a_{kl}/(z - z_k)^l$ har φ hävbara singulariteter i $z_1, \dots, z_N$. Med rätt värden där är alltså φ en hel funktion, och eftersom $\text{grad } p < \text{grad } q$ följer det att $\varphi(z) \rightarrow 0$ då $|z| \rightarrow +\infty$. φ är därför en begränsad funktion, så Liouvilles sats (Sats 4.38) medför att φ är konstant, och eftersom, som sagt, $\varphi(z) \rightarrow 0$ då $|z| \rightarrow +\infty$ är denna konstant noll. Påståendet följer. ▲

Nedanstående karakterisering av isolerade singulariteter är främst av teoretiskt intresse, och det är sällan man använder den vid problemlösning.

4.52. Proposition (Karakterisering av isolerade singulariteter m.h.a. belopp). Låt z_0 vara en isolerad singularitet till f . Då är singulariteten

- hävbar $\Leftrightarrow |f|$ är begränsad nära z_0
- en pol $\Leftrightarrow |f(z)| \rightarrow +\infty$ då $z \rightarrow z_0$
- väsentlig $\Leftrightarrow |f|$ är obegränsad nära z_0 men $|f(z)| \not\rightarrow +\infty$ då $z \rightarrow z_0$

***Bevis.** I beviset antar vi för enkelhets skull att $z_0 = 0$.

Om 0 är en hävbar singularitet till f , så existerar $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ ändligt, och därmed är också $|f|$ begränsad nära 0. Omvänt, om det finns tal M och $\delta > 0$ sådana att $|f(z)| \leq M$ närhelst $0 < |z| < \delta$, så ger Cauchys olikheter (4.5) på s. 82 för Laurentseriekoefficienterna att $|c_n| \leq M\rho^{-n}$ då $0 < \rho < \delta$, och genom att låta $\rho \rightarrow 0^+$ för fixa $n = -1, -2, \dots$ ser vi att $c_{-1} = c_{-2} = \dots = 0$, så 0 är en hävbar singularitet till f .

0 är en pol till f om och endast om det finns ett heltal $N \geq 1$ och en funktion g som är analytisk i någon skiva $|z| < \delta$ och som uppfyller att $g(0) \neq 0$ sådana att $f(z) = g(z)/z^N$ då $0 < |z| < \delta$. Om 0 är en pol till f följer det alltså att $|f(z)| \rightarrow +\infty$ då $z \rightarrow 0$. Omvänt, om $|f(z)| \rightarrow +\infty$ då $z \rightarrow 0$ finns det något $\tilde{\delta} > 0$ sådant att $f(z) \neq 0$ då $0 < |z| < \tilde{\delta}$, och om vi sätter $h = 1/f$ är h därför analytisk i $0 < |z| < \tilde{\delta}$. Men $h(z) \rightarrow 0$ då $z \rightarrow 0$, så 0 är en hävbar singularitet till h enligt föregående stycke. Vi sätter därför $h(0) = 0$; då är h analytisk i $|z| < \tilde{\delta}$. Vidare, eftersom h inte är konstant i denna skiva har h nollställe av någon multiplicitet $N \geq 1$ i 0, enligt satsen om isolerade nollställen (Sats 4.43). Alltså kan vi skriva $h(z) = z^N \tilde{h}(z)$ för någon funktion $\tilde{h}$ som är analytisk

i 0 och som uppfyller att $\tilde{h}(0) \neq 0$. Således är $f(z) = 1/h(z) = (1/\tilde{h}(z))/z^N$, där täljaren $1/\tilde{h}$ är analytisk och nollskild i 0 och $N \geq 1$, så f har pol (av ordning N) i 0.

Resultatet för väsentliga singulariteter följer nu omedelbart av de fall som blir över. ■

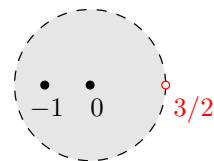
4.53. Exempel (Maclaurinserier och hävbara singulariteter). Studera funktionen

$$f(z) = \frac{\sin \pi z}{2z^2 - z - 3} = \frac{\sin \pi z}{2(z+1)(z-3/2)}.$$

f är analytisk utom där $z = -1$ eller $z = 3/2$, och f har därför en Maclaurinserie som konvergerar i någon skiva $|z| < R$, där $R \geq 1$. Vad kan vi säga om R ?

Både täljare och nämnare har enkla nollställen i $z = -1$, så denna punkt är en hävbar singularitet till f (se Övning 4.29). Om vi sätter

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq -1, \\ \lim_{z \rightarrow -1} f(z) = \pi/5, & z = -1, \end{cases}$$



blir g därför analytisk utom där $z = 3/2$, och eftersom g har samma Maclaurinserie som f (i skivan $|z| < 1$ är ju $g = f$) måste därför $R \geq 3/2$.

Punkten $z = 3/2$ är däremot en pol till g (och f), så $|g(z)| \rightarrow +\infty$ då $z \rightarrow 3/2$. Enligt Proposition 4.20 är därför Maclaurinseriens konvergensradie $R = 3/2$. ▲

Hävbara singulariteter ska man alltså bortse ifrån när man bestämmer konvergensradien för Maclaurinserien, och m.h.a. Proposition 4.20 och Proposition 4.52 får vi nu följande resultat:

4.54. Följsats (Om Maclaurinseriers konvergensradie, resultat 2). Antag att f är analytisk i skivan $|z| < r$ där $0 < r < \infty$, förutom att f får ha hävbara singulariteter där. Antag vidare att det finns någon punkt c på cirkeln $|z| = r$ där f har en pol eller en väsentlig singularitet. Då har Maclaurinserien för f konvergensradie $R = r$.

4.55. Anmärkning (*Meromorfa funktioner). Funktioner som är analytiska i ett område Ω förutom att de tillåts ha *poler* i området sägs vara meromorfa, och mängden av meromorfa funktioner i Ω betecknas $\mathcal{M}(\Omega)$.

Det finns en entydighetssats för meromorfa funktioner som är helt analog med Sats 4.44. Man kan också – med mera avancerade metoder – visa att om $h \in \mathcal{M}(\Omega)$, så finns $f, g \in \mathcal{A}(\Omega)$ sådana att $h = f/g$, förutsatt att $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. (Det senare resultatet gäller dock inte om t.ex. $\Omega = \hat{\mathbb{C}}$, den s.k. Riemannsfären, som definieras i Kapitel 7.)

Meromorfa funktioner studeras i TATA78 Komplex analys fk. ▲

4.56. Anmärkning (*Beteende nära en väsentlig singularitet). Låt z_0 vara en väsentlig singularitet till f . Inte nog med att $|f|$ är obegränsad nära z_0 samtidigt som $|f(z)| \nearrow +\infty$ då $z \rightarrow z_0$, utan i själva verket kan man visa att f i varje punkterad omgivning till z_0 antar alla komplexa värden med högst ett undantag; detta resultat kallas Picards (stora) sats.

(I Övning 4.34 visar vi ett svagare men ändå intressant resultat: f kommer godtyckligt nära vilket värde c som helst i varje punkterad omgivning till z_0 .)

Att Picards sats är sann för den tidigare diskuterade funktionen $f_3(z) = \exp(1/z)$, som har väsentlig singularitet i origo, är lätt att se direkt: Tag en godtycklig punkterad omgivning V^* till 0. Då finns $\delta > 0$ sådant att den punkterade skivan $D^* = D^*(0, \delta) \subseteq V^*$. Om $w_0 \in \mathbb{C}^*$ och $\theta_0 = \text{Arg } w_0$, principalargumentet för w_0 , så är $f_3(z) = w_0$ i alla punkter $z_n \in \mathbb{C}^*$ där $1/z_n = \log w_0 = \ln |w_0| + i(\theta_0 + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$. Eftersom $|1/z_n| \geq |\text{Im}(1/z_n)| = |\theta_0 + 2n\pi| \geq 2\pi|n| - \pi > 1/\delta$ om $|n|$ är stort nog (t.o.m. oberoende av w_0), ser vi att $z_n \in D^* \subseteq V^*$ och $f_3(z_n) = w_0$ för sådana n . Eftersom dessutom $f_3(z) \neq 0$ för alla $z \in \mathbb{C}^*$ drar vi slutsatsen att $f_3(V^*) = \mathbb{C}^*$, så i den punkterade omgivningen V^* till 0 antar f_3 alla värden i $\mathbb{C}$ med ett undantag, nämligen 0. ▲

4.57. Anmärkning (*Singulära punkter i allmänhet). Låt Ω som vanligt vara ett område, och antag att $f \in \mathcal{A}(\Omega)$. Man säger då att en punkt c på randen $\partial\Omega$ är en reguljär punkt för det s.k. funktionselementet (Ω, f) om det finns någon skiva $D = D(c, \delta)$ och någon funktion $g \in \mathcal{A}(D)$ sådana att $f = g$ på $\Omega \cap D$; m.a.o. kan man i så fall utvidga f analytiskt till området $\Omega \cup D$ genom att helt enkelt sätta $f = g$ på skivan D . En punkt $c \in \partial\Omega$ som inte är reguljär kallas singulär.

Med denna definition är det nu lätt att se att om c är en isolerad singularitet till f (vilket speciellt medför att c är en inre punkt i slutna höljet $\bar{\Omega}$ eftersom Ω innehåller en punkterad skiva $D^*(c, \delta)$) så är c också en singulär punkt för funktionselementet (Ω, f) om c är en pol eller väsentlig singularitet till f , medan c *inte* är en singulär punkt för (Ω, f) om c är en hävbar singularitet till f : I det förra fallet blir ju $|f|$ obegränsad nära c , enligt Proposition 4.52, och i det senare fallet kan vi (om)definiera $f(c)$ så att f blir analytisk i $D(c, \delta)$.

Vad gäller funktionerna $f_4(z) = 1/\sin(\pi/z)$ och $f_5(z) = \text{Log } z$ från Exempel 4.48 kan man visa att $z = 0$ är singulär för (Ω_4, f_4) och (Ω_5, f_5) , där $\Omega_4 = \mathbb{C} \setminus \{0, \pm 1, \pm 1/2, \pm 1/3, \dots\}$ och $\Omega_5 = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. Vidare är alla punkter $z = x < 0$ singulära för (Ω_5, f_5) , medan, om vi i stället låter $\tilde{\Omega}_5 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$, övre halvplanet, så är dessa punkter *inte* singulära för $(\tilde{\Omega}_5, f_5)$. Vilka punkter som är singulära för ett funktionselement (Ω, f) beror alltså inte bara på f utan också på Ω , varför det är vanskligt att definiera singulära punkter för en *funktion* f utan att samtidigt precisera i vilket område Ω vi betraktar den.

Singulära punkter för funktionselement behandlas i TATA78 Komplex analys fk. ▲

★ ÖVNINGAR

- ★ 4.24 Visa att $z = 1$ är nollställe till $f(z)$ och bestäm nollställets multiplicitet om $f(z)$ är
 (a) $z^5 - 5z^4 + 9z^3 - 7z^2 + 2z$ (b) $\sinh i\pi z$ (c) $z - 1 - \text{Log } z$ (d) $(1 - \cos 2\pi z)^{30}$

- ★ 4.25 Låt Ω vara enhetsskivan $|z| < 1$, och definiera $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ enligt

$$f(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{1-z}\right), \quad z \in \Omega.$$

Visa att $f(z_n) = 0$ i punkterna $z_n = n/(n+1) \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, som hopar sig i $z = 1$. f är som synes inte noll i hela Ω – är detta förenligt med entydighetssatsen (Sats 4.44)?

- ★ 4.26 Finns det någon hel analytisk f sådan att $f(0) = 1$ men $f(z_n) = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$, där
 (a) $z_n = 1/n$ (b) $z_n = 1 + 1/n$ (c) $z_n = n$?

- ★ 4.27 Bestäm alla analytiska f i enhetsskivan $|z| < 1$ som uppfyller att
 (a) $f(x) = x^2$, $0 < x < 1$ (b) $f(z) = 1/\bar{z}$, $|z| = 1/2$ (c) $f(z) = \bar{z}$, $|z| = 1/2$
 (d) $f(1/n) + f(-1/n) = 1/n^2$ och $f(i/n) - f(-i/n) = 1/n$, $n = 2, 3, 4, \dots$

- ★ 4.28 Antag att f är hel analytisk. Visa att $f(z) \in \mathbb{R}$ då $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ då $z \in \mathbb{C}$.

- ★ 4.29 Antag att f och g har nollställe av multiplicitet N_f respektive N_g i punkten z_0 , och sätt $h = f/g$. Visa följande:

- (a) Om $N_f < N_g$, så har h pol av ordning $N_g - N_f$ i z_0 .
 (b) Om $N_f \geq N_g$, så har h hävbar singularitet i z_0 . Vidare, om $h(z_0)$ sätts till det värde som gör h analytisk i z_0 , så är $h(z_0) \neq 0$ om $N_f = N_g$ medan h har nollställe av multiplicitet $N_f - N_g$ i z_0 om $N_f > N_g$.

- ★ 4.30 Låt $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$.

$f(0)$ är ju odefinierat, men visa att man kan definiera $f(0)$ så att f blir analytisk i 0, och därmed – med detta värde på $f(0)$ – att f har en Maclaurinserie $f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ med konvergensskiva $|z| < R$ (bestäm också R) vars början är

$$f(z) = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12} - \frac{z^4}{720} + \mathcal{O}(z^5), \quad |z| < R.$$

★ 4.31 Låt $f(z) = \frac{1}{z^2 \sin z}$.

(a) Visa att f har trippelpol i origo, och därmed att f har en Laurentserie

$$f(z) = \frac{a}{z^3} + \frac{b}{z^2} + \frac{c}{z} + \{\text{termer av grad} \geq 0\}, \quad 0 < |z| < r.$$

(b) Bestäm a , b , c och (största möjliga) r i (a).

★ 4.32 Bestäm alla isolerade singulariteter till f och avgör deras karaktär – hävbar singularitet, pol (ange ordning) eller väsentlig singularitet – om $f(z)$ är

$$(a) \frac{z^3 + 1}{z^2(z + 1)} \quad (b) z^3 e^{1/z} \quad (c) \frac{\cos z}{z^2 + 1} + 4z \quad (d) \frac{1}{(e^z - 1)^2} - \frac{1}{z^2} \quad (e) \tan z$$

★ 4.33 Antag att f har isolerad singularitet i 0 och att $zf(z) \rightarrow 0$ då $z \rightarrow 0$. Visa att singulariteten är hävbar.

★ 4.34 Antag att f är analytisk i $0 < |z| < \delta$ men har väsentlig singularitet i 0. Visa att till varje $c \in \mathbb{C}$, $\epsilon > 0$ och r med $0 < r < \delta$ finns det ett z med $0 < |z| < r$ sådant att $|f(z) - c| < \epsilon$.
Ledning: Antag att så inte är fallet. Då finns c , ϵ , r för vilka $|f(z) - c| \geq \epsilon$ för alla z med $0 < |z| < r$. Studera $g(z) = 1/(f(z) - c)$.

Jfr också Anmärkning 4.56.

★ 4.35 Låt $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} = z + z^2 + z^4 + z^8 + z^{16} + \dots$ för $|z| < 1$.

(a) Visa att f är analytisk i $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

(b) Visa att $|f(re^{2\pi ia})| \rightarrow +\infty$ då $r \nearrow 1$ för varje $a = m/2^n$, där $n \in \mathbb{N}$ och $m = 1, \dots, 2^n$.

(c) Finns det någon kontinuerlig funktion i en större sammanhängande öppen mängd än U som sammanfaller med f i U ?

4.7 *Multipelpunkter. Öppna avbildningssatsen

Om f är analytisk i punkten $c \in \mathbb{C}$ så har den analytiska funktionen $z \mapsto f(z) - f(c)$ nollställe i c . Enligt satsen om isolerade nollställen (Sats 4.43) är då antingen f konstant $= f(c)$ i någon hel skiva $D(c, r)$ eller också är nollstället isolerat. I det senare – intressanta – fallet kan vi skriva

$$f(z) - f(c) = (z - c)^m g(z), \quad \text{där } g(c) \neq 0,$$

i någon omgivning till c , med en funktion g som är analytisk där, och med något heltal $m \geq 1$. Punkten c är alltså ett nollställe av multiplicitet m till funktionen $z \mapsto f(z) - f(c)$, vilket är ekvivalent med att

$$f'(c) = \dots = f^{(m-1)}(c) = 0 \quad \text{men} \quad f^{(m)}(c) \neq 0.$$

Man säger att **värdet $f(c)$ antas med multiplicitet m i punkten c** , och om $m \geq 2$ säger man att c är en **multipelpunkt** för f .

Det allra enklaste exemplet på denna situation är

$$f(z) = z^m, \quad m \in \{1, 2, 3, \dots\}.$$

f antar värdet $f(0) = 0$ med multiplicitet m i origo, och är en s.k. **m -till-1-avbildning** i varje punkterad skiva $D^*(0, r)$, vilket definitionsmässigt betyder att varje värde $w \in f(D^*(0, r))$ antas i precis m olika punkter $z_1, \dots, z_m \in D^*(0, r)$ och med multiplicitet 1 i var och en av dessa punkter; för just denna funktion är $f(D^*(0, r)) = D^*(0, r^m)$, och vi får punkterna $z_1, \dots, z_m$ genom att helt enkelt lösa den binomiska ekvationen $z^m = w$ där $0 < |w| < r^m$.

Vi generaliserar till allmänna f :

4.58. Sats (Beteende vid multipelpunkt). Antag att f är analytisk i punkten $c \in \mathbb{C}$ och att värdet $f(c)$ antas med multiplicitet $m \geq 1$ i punkten c . Då finns det en omgivning V till c och en radie $\rho > 0$ sådana att

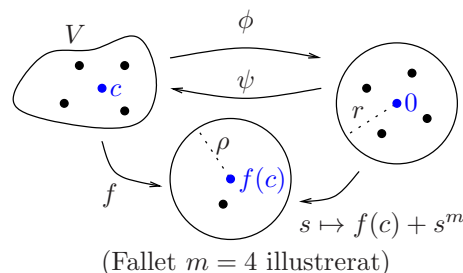
$$f \text{ är } m\text{-till-1 i } V^* := V \setminus \{c\} \quad \text{och} \quad f(V^*) = D^*(f(c), \rho).$$

Bevis. Det finns alltså en analytisk funktion g , definierad i en omgivning V_1 till c , sådan att $g(c) \neq 0$ och $f(z) - f(c) = (z - c)^m g(z)$ för alla $z \in V_1$. Eftersom $g(c) \neq 0$ och g är kontinuerlig finns det också någon skiva $D = D(c, r_1) \subseteq V_1$ där $g \neq 0$, och i D kan vi därför hitta en funktion $h \in \mathcal{A}(D)$ sådan att $h^m = g$, se Följsats 3.28 på s. 53; notera speciellt att $h \neq 0$. I D kan vi således skriva

$$f(z) - f(c) = (z - c)^m g(z) = ((z - c)h(z))^m = (\phi(z))^m,$$

där $\phi(z) := (z - c)h(z)$; då är ϕ analytisk i D , och $\phi'(c) = h(c) \neq 0$. Inversa funktionssatsen för analytiska funktioner (se Övning 1.37 på s. 17) medför därför att det finns en omgivning $V_2 \subseteq D$ till c , en omgivning W_2 till $\phi(c) = 0$, och en funktion $\psi \in \mathcal{A}(W_2)$ sådan att ψ och ϕ 's restriktion till V_2 är varandras inverser.

Låt nu $r > 0$ vara så litet att $D(0, r) \subseteq W_2$ och sätt $V = \psi(D(0, r))$; då är V en öppen delmängd av V_2 eftersom ψ^{-1} är kontinuerlig. Notera att $\phi : V \rightarrow D(0, r)$ är bijektiv, och därmed 1-till-1, och att funktionen $s \mapsto f(c) + s^m$ är m -till-1 på den punkterade skivan $D^*(0, r)$. Av detta följer det också att f är m -till-1 på den punkterade omgivningen $V^* = V \setminus \{c\}$ till c , och att $f(V^*) = D^*(f(c), \rho)$, där $\rho = r^m$.



Notera att radien r i beviset ovan kan väljas hur liten som helst. Om $\epsilon > 0$ är givet kan vi därför ta ett $r > 0$ som är så litet att tillhörande V får plats i skivan $D(c, \epsilon)$, eftersom ψ är kontinuerlig i 0. Om c är en multipelpunkt för f , d.v.s. om $m \geq 2$, kan f därför inte vara injektiv i $D(c, \epsilon)$ eftersom f är en m -till-1-avbildning i V^* och $V^* \subseteq D(c, \epsilon)$.

Vi får därför omedelbart följande resultat om lokal injektivitet:

4.59. Följsats (Lokal injektivitet). Antag att f är analytisk i punkten c . Då gäller följande:

$$f \text{ är injektiv i någon omgivning till } c \quad \Longleftrightarrow \quad f'(c) \neq 0.$$

Bevis. Antag först att $f'(c) \neq 0$. Då antas värdet $f(c)$ med multiplicitet 1 i punkten c , och enligt Sats 4.58 är då f en 1-till-1-avbildning från en omgivning V till c till en skiva $D(f(c), \rho)$ för något $\rho > 0$; observera att värdet $f(c)$ endast antas en gång i V , nämligen i c .

Antag sedan omvänt att $f'(c) = 0$. Om f är konstant i en omgivning till c så är f trivialt inte injektiv. I annat fall antas värdet $f(c)$ med någon multiplicitet $m \geq 2$ i c , och enligt kommentaren omedelbart efter beviset av Sats 4.58 ovan följer det att f inte kan vara injektiv i någon enda skiva $D(c, \epsilon)$ och därmed inte heller i någon omgivning till c .

4.60. Anmärkning. För $\mathcal{C}^1$ -funktioner f från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$ är riktningen $\Leftarrow$ ovan sann, ty om $f'(a) \neq 0$ så har f' ett och samma tecken i någon omgivning till a , och f är därför strängt monotont och därmed injektiv där. Riktningen $\Rightarrow$ är däremot inte sann, och ett enkelt motexempel är $f(x) = x^3$ som är (t.o.m. globalt) injektiv samtidigt som $f'(0) = 0$.

Vi påminner om att Ω står för ett område, alltså en öppen och bågvis sammanhängande mängd.

4.61. Följsats (Öppna avbildningssatsen). Om $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ och f inte är konstant, så är $f(\Omega)$ ett område.

Bevis. Vi bevisar först att $f(\Omega)$ är bågvis sammanhängande. Låt därför $w_0, w_1 \in f(\Omega)$. Då finns $z_0, z_1 \in \Omega$ sådana att $f(z_0) = w_0$ och $f(z_1) = w_1$, och eftersom Ω är bågvis sammanhängande finns en kurva $z(t)$, $t : 0 \rightarrow 1$, i Ω från z_0 till z_1 . Men då är $w(t) := f(z(t))$, $t : 0 \rightarrow 1$, en kurva i $f(\Omega)$ från w_0 till w_1 , så $f(\Omega)$ är bågvis sammanhängande.

Det återstår att bevisa att $f(\Omega)$ är öppen, d.v.s. att det till varje punkt $f(c)$, $c \in \Omega$, finns en radie $\rho > 0$ sådan att $D(f(c), \rho) \subseteq f(\Omega)$. Men det följer omedelbart av Sats 4.58, med samma ρ och V som där, ty $D(f(c), \rho) = f(V) \subseteq f(\Omega)$. ■

4.62. Anmärkning. För C^1 -funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$ är öppna avbildningssatsen *inte* sann, vilket t.ex. funktionen $f(x) = \sin x$ visar: $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$, som inte är en öppen mängd i $\mathbb{R}$. ▲

4.8 *Likformig konvergens av potensserier

Här ska vi lite mera noggrant undersöka hur våra potensserier konvergerar, först i konvergensskivan och senare på dess rand. För att kunna formulera oss precist är följande begrepp användbart:

4.63. Definition (Likformig konvergens). Låt $f_1, f_2, f_3, \dots$ vara en följd av komplexvärda funktioner definierade på en mängd M . Vi säger att f_n konvergerar likformigt mot en funktion f på M när $n \rightarrow \infty$ om det till varje $\epsilon > 0$ finns ett heltal N sådant att

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon \quad \text{närhelst} \quad z \in M \quad \text{och} \quad n \geq N.$$

Vid likformig konvergens fungerar *samma* heltal N samtidigt för *alla* $z \in M$, till skillnad från vanlig (punktvis) konvergens där N som bekant får bero på z . Lägg speciellt märke till att likformig konvergens på M trivialt medför punktvis konvergens i varje punkt i M .

4.64. Sats (Likformig konvergens av potensserier på kompakta cirkelskivor). Antag att potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ har konvergensradie $R > 0$, och sätt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots, \quad |z| < R.$$

Låt f_n för $n \in \mathbb{N}$ vara polynomen

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n,$$

som alltså är potensseriens delsummor, tillika Maclaurinpolynomen för f . Då gäller följande: För varje ρ med $0 < \rho < R$ konvergerar f_n likformigt mot f på skivan $|z| \leq \rho$ när $n \rightarrow \infty$.

Bevis. Tag ρ med $0 < \rho < R$ och låt sedan $\epsilon > 0$. Eftersom $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ är absolutkonvergent då $|z| = \rho$, vilket ju betyder att den positiva serien $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \rho^k$ är konvergent, finns det ett heltal N sådant att denna series svans $\sum_{k=N+1}^{\infty} |c_k| \rho^k < \epsilon$. Om $|z| \leq \rho$ och $n \geq N$ får vi därför att

$$|f_n(z) - f(z)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k z^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k| |z|^k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k| \rho^k \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |c_k| \rho^k < \epsilon,$$

och beviset är klart. ■

Vad kan man nu säga om en potensseries konvergens i punkter på själva cirkeln $|z| = R$ om $0 < R < \infty$? Till att börja med kan vi formulera ett tillräckligt villkor för konvergens på hela cirkeln och ett tillräckligt villkor för divergens på hela cirkeln:

4.65. Proposition. Om potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ har konvergensradie R , där $0 < R < \infty$, så gäller följande:

- (a) Om den positiva serien $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| R^n$ är konvergent, så är potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ absolutkonvergent och likformigt konvergent på den slutna cirkelskivan $|z| \leq R$, och potensseriens summa är en kontinuerlig funktion där.
- (b) Om $c_n R^n$ inte går mot noll då $n \rightarrow \infty$, så är potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ divergent för alla z på cirkeln $|z| = R$.

Bevis. Vi kan utan inskränkning anta att $R = 1$ (genom att om nödvändigt studera $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n w^n$ i stället, där $\tilde{c}_n = c_n R^n$). Sätt också $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ och $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

Vi visar först (a), och antar därför att $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ är konvergent. Eftersom $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ när $z \in \bar{U}$ får vi genast att $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ är absolutkonvergent på $\bar{U}$, och därmed är S en väldefinierad komplexvärd funktion på $\bar{U}$. För att visa att konvergensen är likformig på $\bar{U}$, d.v.s. att delsummorna

$$S_n(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

går likformigt mot S på $\bar{U}$ när $n \rightarrow \infty$, tar vi $\epsilon > 0$. Då kan vi välja ett heltal N sådant att svansen $\sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n| < \epsilon$, och får då, som i beviset av Sats 4.64, att $|S(z) - S_n(z)| < \epsilon$ närhelst $z \in \bar{U}$ och $n \geq N$, så $S_n \rightarrow S$ likformigt på $\bar{U}$. Att funktionen S dessutom är kontinuerlig på $\bar{U}$ kan vi nu visa på följande sätt: Låt $z_0 \in \bar{U}$ och tag $\epsilon > 0$. Välj N som ovan; då är $|S(z) - S_N(z)| < \epsilon$ för alla $z \in \bar{U}$. S_N är ju ett polynom och är därmed kontinuerlig i z_0 , så vi kan välja ett $\delta > 0$ sådant att $|S_N(z) - S_N(z_0)| < \epsilon$ när $|z - z_0| < \delta$. Av detta får vi att

$$|S(z) - S(z_0)| \leq |S(z) - S_N(z)| + |S_N(z) - S_N(z_0)| + |S_N(z_0) - S(z_0)| < \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon$$

när $z \in \bar{U}$ och $|z - z_0| < \delta$, vilket visar att S är kontinuerlig i z_0 .

Påstående (b) är lätt att bevisa: Om c_n inte går mot noll då $n \rightarrow \infty$ går inte heller $c_n z^n$ mot noll om $|z| = 1$, varför $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ divergerar där enligt divergenstestet (Proposition 4.1). ■

4.66. Anmärkning. Funktionen

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k^2}}{2^k} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^4}{4} + \frac{z^9}{8} + \frac{z^{16}}{16} + \frac{z^{25}}{32} + \dots, \quad |z| < 1,$$

omtalades i samband med Proposition 4.20, som handlar om Maclaurinseriers konvergensradie; vi kan nu visa att när $|c| = 1$ har $f, f', f'', \dots$ ändliga gränsvärden då $z \rightarrow c$ inifrån skivan $|z| < 1$.

Den serie vi får genom att derivera termerna i serien för f ovan n gånger, $n \in \mathbb{N}$, är

$$S_{(n)}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2(k^2 - 1) \dots (k^2 - n + 1)}{2^k} z^{k^2 - n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k^2 - n}}{2^k} \prod_{l=0}^{n-1} (k^2 - l).$$

(En produkt utan faktorer tolkas som 1, på samma sätt som att en summa utan termer tolkas som 0.) Om vi fixerar $z \in \mathbb{C}^*$ och låter a_k stå för term nummer k i serien $S_{(n)}(z)$ får vi att

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{|z|^{2k+1}}{2} \prod_{l=0}^{n-1} \left| \frac{(1 + 1/k)^2 - l/k^2}{1 - l/k^2} \right| \rightarrow \begin{cases} 0, & |z| < 1, \\ 1/2, & |z| = 1, \\ +\infty, & |z| > 1, \end{cases} \quad \text{då } k \rightarrow \infty \text{ (för fixt } n),$$

så kvotkriteriet (Proposition 4.6) medför att serien $S_{(n)}(z)$ är absolutkonvergent när $|z| \leq 1$ och divergent när $|z| > 1$; speciellt är dess konvergensradie $R = 1$. Enligt Proposition 4.65 är $S_{(n)}$ dessutom en kontinuerlig funktion på $|z| \leq 1$. Men $f^{(n)}(z) = S_{(n)}(z)$ då $|z| < 1$, så om $|c| = 1$ får vi att $f^{(n)}(z) \rightarrow S_{(n)}(c) \in \mathbb{C}$ då $z \rightarrow c$ inifrån skivan $|z| < 1$. ▲

Det finns gott om potensserier $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ med konvergensradie R , $0 < R < \infty$, som varken uppfyller det tillräckliga villkoret för konvergens på hela randen ($\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| R^n$ är konvergent) eller det tillräckliga villkoret för divergens på hela randen ($c_n R^n$ går inte mot noll då $n \rightarrow \infty$) i Proposition 4.65. Ett enkelt exempel på en sådan serie, alltså en serie för vilken $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| R^n$ är divergent samtidigt som $c_n R^n \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$, är

$$S(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots, \quad R = 1;$$

här är ju $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| R^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, divergent, medan $c_n R^n = (-1)^{n+1}/n \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$. Serien $S(z)$ ovan känner vi igen som Maclaurinserien för $\text{Log}(1+z)$, se Proposition 4.21, så vi vet att

$$S(z) = \text{Log}(1+z), \quad |z| < 1.$$

Eftersom $R = 1$ är potensserien divergent för alla z med $|z| > 1$; att $\text{Log}(1+z)$ råkar ha ett värde för sådana z spelar ingen roll. När $z = -1$ får vi serien $S(-1) = -\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, som är divergent. I Övning 4.12 på s. 70 visas (byt z mot $-z$) att serien $S(z)$ konvergerar för alla övriga z på cirkeln $|z| = 1$, och en naturlig fråga i sammanhanget är om $S(z) = \text{Log}(1+z)$ även för dessa z . Svaret är ja, och det följer av nedanstående sats av M. Riesz.

4.67. Sats (Om Maclaurinseriens konvergens på randen till konvergensskivan).

Antag att $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, där $0 \in \Omega$, och låt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ vara Maclaurinserien för f . Antag vidare att denna serie har konvergensradie $R < \infty$, att $D(0, R) \subseteq \Omega$ och att $c_n R^n \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$. Då gäller följande: För varje kompakt mängd $K \subseteq \Omega \cap \bar{D}(0, R)$ konvergerar Maclaurinserien likformigt mot f på K ; speciellt konvergerar den punktvis mot f i varje punkt på randcirkeln $|z| = R$ där f är analytisk.

4.68. Anmärkning. Notera att det för alla potensserier *nödvändiga* villkoret för konvergens av $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ i en punkt z på cirkeln $|z| = R$, alltså villkoret att $c_n z^n \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$ (vilket trivialt är ekvivalent med villkoret att $c_n R^n \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$), således visar sig vara *tillräckligt* om man dessutom vet att serien i fråga är Maclaurinserien för en funktion f som är analytisk i z . ▲

Innan vi går in på beviset av denna sats undersöker vi vad den medför för våra standardserier i Proposition 4.21 och Anmärkning 4.22.

Vi ser omedelbart att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots = \text{Log}(1+z), \quad |z| \leq 1, \quad z \neq -1,$$

eftersom $R = 1$, $(-1)^{n+1}/n \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$ och $\text{Log}(1+z)$ är analytisk utom längs strålen $]-\infty, -1]$. I punkten $z = -1$ blir serien som sagt $-\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, som är divergent, och trivialt är serien divergent även när $|z| > 1$.

Vidare,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots = \operatorname{Arctan} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \frac{i-z}{i+z}, \quad |z| \leq 1, \quad z \neq \pm i,$$

eftersom $R = 1$, $(-1)^n/(2n+1) \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$ och $\operatorname{Arctan} z$ är analytisk utom där $z = iy$, $|y| \geq 1$ (se figur i Avsnitt 8.5). I punkterna $z = \pm i$ blir serierna $\pm i \sum_{n=0}^{\infty} 1/(2n+1)$, som är divergenta, och trivialt är serien divergent även när $|z| > 1$.

Till sist diskuterar vi potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$ då $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$. Serien har konvergensradie $R = 1$, är Maclaurinserien för $PV(1+z)^\alpha$, och är lite svårare att analysera än ovanstående båda serier. Man kan visa att $\binom{\alpha}{n} \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$ precis då $\operatorname{Re} \alpha > -1$, och i detta fall konvergerar således Maclaurinserien mot $PV(1+z)^\alpha$ även i de punkter på randen där denna funktion är analytisk, alltså i alla punkter utom $z = -1$; om $\operatorname{Re} \alpha \leq -1$ är serien divergent på hela randen enligt divergenstestet. Vad gäller den återstående punkten $z = -1$ då $\operatorname{Re} \alpha > -1$ kan man visa att serien är konvergent, med värdet 0, om $\operatorname{Re} \alpha > 0$ (man kan då t.o.m. visa att $\sum_{n=0}^{\infty} |\binom{\alpha}{n}|$ är konvergent, och potensserien är därför en kontinuerlig funktion på den slutna skivan $|z| \leq 1$, enligt Proposition 4.65) men att den är divergent om $-1 < \operatorname{Re} \alpha \leq 0$ (beviset bygger bl.a. på sambandet $\sum_{n=0}^N \binom{\alpha}{n} (-1)^n = \prod_{n=1}^N (1 - \frac{\alpha}{n})$ om $\alpha \in \mathbb{C}$ och $N \in \mathbb{N}$, något som kan bevisas t.ex. med induktion). Vi sammanfattar:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \dots = PV(1+z)^\alpha, \quad \begin{cases} |z| \leq 1, & \operatorname{Re} \alpha > 0, \alpha \notin \mathbb{N}, \\ |z| \leq 1, z \neq -1, & -1 < \operatorname{Re} \alpha \leq 0, \alpha \neq 0, \\ |z| < 1, & \operatorname{Re} \alpha \leq -1, \end{cases}$$

där vi med $PV 0^\alpha$ menar 0 när $\operatorname{Re} \alpha > 0$; i övriga punkter är serien divergent. Om $\alpha \in \mathbb{N}$ så är potensserien ett polynom av grad α och konvergerar därför i hela $\mathbb{C}$.

Bevis av Sats 4.67. Låt $K \subseteq \Omega \cap \bar{D}(0, R)$ vara en kompakt mängd. Man kan visa att K kan täckas av någon sluten cirkelskiva $|z| \leq r$ med radie $r < R$ tillsammans med ändligt många slutna cirkelsektorer $S_1, \dots, S_m \subseteq \Omega$ med radie R och spets i origo. Med tanke på Sats 4.64 kan vi därför anta att K är en sådan cirkelsektor $S \subseteq \Omega$. Vidare, efter en eventuell skalning och vridning i z -planet kan vi anta att $R = 1$, och därmed att $c_n \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$, och att cirkelsektorn är

$$S = \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : 0 \leq r \leq 1, |\theta| \leq \alpha\}$$

för något α med $0 < \alpha < \pi$, se figur nedan.

Låt f_n vara Maclaurinpolynomen för f , d.v.s. låt

$$f_n(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Enligt förutsättningen går c_k mot noll då $k \rightarrow \infty$, så speciellt finns det en konstant C sådan att $|c_k| \leq C$ för alla $k \in \mathbb{N}$. Vidare, S är en kompakt delmängd av den öppna mängden Ω , så avståndet från S till $\partial\Omega$ är positivt, och vi kan därför välja $\rho > 1$ och β med $\alpha < \beta < \pi$ sådana att den något större cirkelsektorn

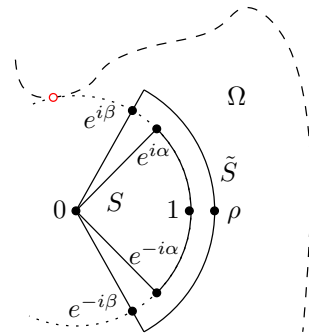
$$\tilde{S} := \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : 0 \leq r \leq \rho, |\theta| \leq \beta\}$$

också ryms i Ω . Notera att f är kontinuerlig på den kompakta mängden $\tilde{S}$, så det finns en konstant $\tilde{M}$ sådan att $|f| \leq \tilde{M}$ på $\tilde{S}$.

Låt nu

$$(*) \quad h_n(z) := \frac{(z - e^{i\beta})(z - e^{-i\beta})}{z^{n+1}} \cdot (f(z) - f_n(z)), \quad z \in \Omega, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Då är h_n analytisk i Ω , alltså även i origo, ty h_n har hävbar singularitet där (med $h_n(0) := c_{n+1}$). Nedan ska vi visa att det till varje $\epsilon > 0$ finns ett heltal N sådant att $|h_n(z)| \leq B_\rho \epsilon$ närhelst $z \in \tilde{S}$



och $n \geq N$, där B_ρ endast beror på ρ . Eftersom olikheterna $|z - e^{\pm i\beta}| \geq \sin(\beta - \alpha) > 0$ och $|z| \leq 1$ gäller för alla $z \in S$ får vi m.h.a. detta att

$$|f(z) - f_n(z)| = \left| \frac{z^{n+1}}{(z - e^{i\beta})(z - e^{-i\beta})} \right| \cdot |h_n(z)| \leq \frac{B_\rho}{\sin^2(\beta - \alpha)} \cdot \epsilon, \quad z \in S, \quad n \geq N,$$

och därmed att f_n konvergerar likformigt mot f på S när $n \rightarrow \infty$, vilket fullbordar beviset.

Tag därför $\epsilon > 0$. Välj N_1 så stort att $|c_k| < \epsilon$ närhelst $k \geq N_1$. Vi vet att $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ i hela konvergensskivan $|z| < 1$, åtminstone punktvis, varför

$$|f(z) - f_n(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k| |z|^k \leq \epsilon \sum_{k=n+1}^{\infty} |z|^k = \epsilon \cdot \frac{|z|^{n+1}}{1 - |z|}, \quad |z| < 1, \quad n \geq N_1.$$

I den del av $\tilde{S}$ där $|z| > 1$ divergerar ju Maclaurinserien, men där kan vi för $n \geq N_1$ skriva

$$|f(z) - f_n(z)| \leq |f(z)| + |f_n(z)| \leq \tilde{M} + \sum_{k=0}^n |c_k| |z|^k \leq \tilde{M} + C \sum_{k=0}^{N_1-1} |z|^k + \epsilon \sum_{k=N_1}^n |z|^k.$$

Vi noterar att när $z \in \tilde{S}$ är $\tilde{M} + C \sum_{k=0}^{N_1-1} |z|^k \leq \tilde{M} + CN_1 \rho^{N_1-1}$, som är oberoende av $n \geq N_1$, medan $\epsilon \sum_{k=N_1}^n |z|^k \geq \epsilon \cdot (n+1 - N_1)$ när $|z| > 1$. Men nu kan vi välja ett nytt heltal $N \geq N_1$ sådant att $\epsilon \cdot (n+1 - N_1) \geq \tilde{M} + CN_1 \rho^{N_1-1}$ för alla $n \geq N$, och därmed få att

$$|f(z) - f_n(z)| \leq 2\epsilon \sum_{k=N_1}^n |z|^k \leq 2\epsilon \cdot \frac{|z|^{n+1}}{|z| - 1}, \quad z \in \tilde{S}, \quad |z| > 1, \quad n \geq N.$$

Sammantaget har vi hittills visat att vi får följande uppskattning från (*):

$$|h_n(z)| \leq 2\epsilon \cdot \frac{|z - e^{i\beta}| |z - e^{-i\beta}|}{||z| - 1|}, \quad z \in \tilde{S}, \quad |z| \neq 1, \quad n \geq N.$$

Vi ska nu uppskatta $|h_n|$ på randen $\partial\tilde{S}$ till cirkelsektorn $\tilde{S}$ när $n \geq N$. Till att börja med är $|z - e^{\pm i\beta}| \leq |z| + 1 \leq \rho + 1$ på hela $\partial\tilde{S}$. På sträckan $z = re^{i\beta}$, $0 \leq r \leq \rho$, är t.o.m. $|z - e^{i\beta}| = ||z| - 1|$, så $|h_n| \leq 2\epsilon(\rho + 1)$ där – även i punkten $e^{i\beta}$ eftersom $h_n(e^{i\beta}) = 0$. På sträckan $z = re^{-i\beta}$, $0 \leq r \leq \rho$, får man helt analogt samma uppskattning. På den återstående delen av $\partial\tilde{S}$, cirkelbågen där $|z| = \rho$, är $|h_n| \leq 2\epsilon(\rho + 1)^2/(\rho - 1)$. Om vi sätter $B_\rho = 2(\rho + 1)^2/(\rho - 1)$ är alltså $|h_n| \leq B_\rho \epsilon$ på hela $\partial\tilde{S}$, och enligt maximumprincipen i begränsade områden (Följdsats 3.36 på s. 57) är därför $|h_n| \leq B_\rho \epsilon$ på hela $\tilde{S}$, vilket enligt resonemanget tidigare i beviset räcker för att bevisa satsen. ■

Vi avslutar med några resultat för dubbelsidiga potensserier:

4.69. Följdsats (Likformig konvergens av dubbelsidiga potensserier på kompakta cirkelringar). Antag att potensserien $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ har konvergensring $R_1 < |z| < R_2$, där $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$, och sätt

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k = (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots) + \left(\frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots \right), \quad R_1 < |z| < R_2.$$

Låt $f_{m,n}$ för positiva heltal m och n vara de rationella funktionerna

$$f_{m,n}(z) = \sum_{k=-m}^n c_k z^k = (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n) + \left(\frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots + \frac{c_{-m}}{z^m} \right),$$

som alltså är den dubbelsidiga potensseriens delsummor. Då gäller följande: Till alla ρ_1, ρ_2 med $R_1 < \rho_1 \leq \rho_2 < R_2$ och varje $\epsilon > 0$ finns det ett heltal N sådant att

$$|f_{m,n}(z) - f(z)| < \epsilon \quad \text{närhelst} \quad \rho_1 \leq |z| \leq \rho_2 \quad \text{och} \quad m \geq N, \quad n \geq N.$$

Bevis. Sätt $g(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots$ och $h(w) = c_{-1}w + c_{-2}w^2 + \dots$, så att $f(z) = g(z) + h(1/z)$, precis som i (4.3) på s. 67. Då är g analytisk i skivan $|z| < R_2$ och h i skivan $|w| < 1/R_1$ (med tolkningen att $1/R_1 = \infty$ om $R_1 = 0$). Sätt $g_n(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_nz^n$ och $h_m(w) = c_{-1}w + c_{-2}w^2 + \dots + c_{-m}w^m$. Om $R_1 < \rho_1 \leq \rho_2 < R_2$ är det då enligt Sats 4.64 sant att $g_n \rightarrow g$ likformigt på cirkelskivan $|z| \leq \rho_2$ och att $h_m \rightarrow h$ likformigt på cirkelskivan $|w| \leq 1/\rho_1$. Om $\epsilon > 0$ finns det därför dels ett heltal N_1 sådant att $|g_n(z) - g(z)| < \epsilon/2$ då $|z| \leq \rho_2$ och $n \geq N_1$, dels ett heltal N_2 sådant att $|h_m(w) - h(w)| < \epsilon/2$ då $|w| \leq 1/\rho_1$ och $m \geq N_2$. Sätt $N = \max(N_1, N_2)$ och $w = 1/z$. Då får vi att

$$\begin{aligned} |f_{m,n}(z) - f(z)| &= |(g_n(z) + h_m(1/z)) - (g(z) + h(1/z))| \\ &\leq |g_n(z) - g(z)| + |h_m(1/z) - h(1/z)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \end{aligned}$$

närhelst $\rho_1 \leq |z| \leq \rho_2$ och $m \geq N$, $n \geq N$. ■

Nu kan vi bevisa Sats 4.28 om multiplikation av dubbelsidiga potensserier:

Fullständigt bevis av Sats 4.28. Funktionerna f och g är analytiska i ringen $R_1 < |z| < R_2$, och därmed är också h analytisk där. Således har h en Laurentserie i ringen: $h(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, där koefficienterna c_n är entydigt bestämda och ges av integralformeln (4.4) på s. 74, där vi integrerar längs någon cirkel C_ρ med radie ρ och där $R_1 < \rho < R_2$.

Vi sätter $f_{p,q}(z) = \sum_{k=-p}^q a_k z^k$ och $g_m(z) = \sum_{l=-m}^m b_l z^l$ för positiva heltal p, q, m ; vi ska utnyttja att $f_{p,q} \rightarrow f$ och $g_m \rightarrow g$ likformigt på C_ρ då $p \rightarrow \infty$ och $q \rightarrow \infty$ respektive $m \rightarrow \infty$.

Fixera $n \in \mathbb{Z}$; vi ska visa att $c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k}$, och speciellt att denna serie konvergerar.

Fixera sedan $p > |n|$ och $q > |n|$. Produkten $f_{p,q}(z)g_m(z)$ består av ändligt många termer, med gradtal fr.o.m. $-p-m$ t.o.m. $q+m$, och om m är så stort att $m > \max(p, q) + |n|$ så är koefficienten för z^n i denna produkt $\sum_{k=-p}^q a_k b_{n-k}$ för alla sådana m (kontrollera gärna detta i ett (k, l) -diagram). Integration längs cirkeln C_ρ ger därför, t.ex. som i Exempel 3.6 på s. 42, att

$$\sum_{k=-p}^q a_k b_{n-k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f_{p,q}(s)g_m(s)}{s^{n+1}} ds, \quad p > |n|, \quad q > |n|, \quad m > \max(p, q) + |n|.$$

Vi ska nu låta $m \rightarrow \infty$ (för fixa p, q, n). Tag $\epsilon > 0$. Enligt Följdsats 4.69 finns det ett heltal M , som vi kan anta är större än $\max(p, q) + |n|$, sådant att $|g_m(s) - g(s)| < \epsilon$ närhelst $s \in C_\rho$ och $m \geq M$. ML-uppskattning ger därför att

$$\left| \sum_{k=-p}^q a_k b_{n-k} - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f_{p,q}(s)g(s)}{s^{n+1}} ds \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f_{p,q}(s)(g_m(s) - g(s))}{s^{n+1}} ds \right| \leq \frac{\max_{s \in C_\rho} |f_{p,q}(s)|}{\rho^n} \cdot \epsilon.$$

Eftersom $\epsilon > 0$ är godtyckligt måste uttrycket längst till vänster på föregående rad vara noll, d.v.s.:

$$\sum_{k=-p}^q a_k b_{n-k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f_{p,q}(s)g(s)}{s^{n+1}} ds, \quad p > |n|, \quad q > |n|.$$

I nästa steg ska vi låta $p \rightarrow \infty$ och $q \rightarrow \infty$ oberoende av varandra (för fixt n). Tag därför (ett nytt) $\epsilon > 0$. Enligt Följdsats 4.69 finns det ett heltal N , som vi kan anta är större än $|n|$, sådant att $|f_{p,q}(s) - f(s)| < \epsilon$ närhelst $s \in C_\rho$, $p \geq N$ och $q \geq N$. Således är

$$\left| \sum_{k=-p}^q a_k b_{n-k} - c_n \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{(f_{p,q}(s) - f(s))g(s)}{s^{n+1}} ds \right| \leq \frac{\max_{s \in C_\rho} |g(s)|}{\rho^n} \cdot \epsilon, \quad p > N, \quad q > N.$$

Men det innebär att

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k} = c_n,$$

jfr diskussionen i slutet av Avsnitt 4.1, och beviset är klart. ■

5 Residykalkyl

I detta kapitel ska vi se hur vi kan använda oss av en funktions singulariteter (se Avsnitt 4.6) för att beräkna vissa integraler, både komplexa kurvintegraler och reella integraler. Även om det i en del sammanhang kan vara ett problem att en funktion har singulariteter visar det sig här att det faktiskt är just singulariteterna som möjliggör effektiv beräkning av integralerna.

5.1 Residyer

Vi påminner om att när z_0 är en isolerad singularitet till f så ges f av en Laurentserie

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \\ = (c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots) + \left(\frac{c_{-1}}{z-z_0} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-3}}{(z-z_0)^3} + \dots \right)$$

i en punkterad skiva $0 < |z-z_0| < \delta$ för något $\delta > 0$, och koefficienterna c_n ges av integralformeln

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(s) ds}{(s-z_0)^{n+1}}, \quad 0 < \rho < \delta, \quad n \in \mathbb{Z},$$

där C_ρ är cirkeln $|z-z_0| = \rho$ tagen ett varv moturs, se s. 78 (Avsnitt 4.3). Specialfallet $n = -1$ ger oss sambandet

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} f(s) ds, \quad 0 < \rho < \delta,$$

och därmed får vi ett sätt att räkna ut integralen $\int_{C_\rho} f(s) ds$ om vi kan bestämma c_{-1} på annat sätt, typiskt genom serieutveckling; m.h.a. residysatsen nedan (Sats 5.2) kan även andra integraler beräknas. Koefficienten c_{-1} spelar således en viktig roll, och den har fått ett eget namn:

5.1. Definition (Residy). Antag att z_0 är en isolerad singularitet till f . Med residyn för f i z_0 menas koefficienten c_{-1} för $(z-z_0)^{-1}$ i Laurentserien för f i en punkterad skiva runt z_0 , och vi skriver

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}.$$

Nedan är ω ett begränsat område vars rand $\partial\omega$ består av ändligt många konturer med positiv orientering relativt ω , som på s. 46 (Avsnitt 3.4), där också en figur finns.

5.2. Sats (Residysatsen). Antag att f är analytisk i en omgivning till $\bar{\omega}$ utom möjligen i de ändligt många punkterna $z_1, \dots, z_N \in \omega$. Då är

$$\int_{\partial\omega} f(s) ds = 2\pi i \sum_{n=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_n} f(z).$$

Bevis. Eftersom de punkter i ω där f inte är analytisk är ändligt många är de också isolerade singulariteter. Låt ω_ϵ vara ω med små, parvis disjunkta, slutna cirkelskivor $D_n = \bar{D}(z_n, \epsilon) \subset \omega$ borttagna, där $\epsilon > 0$ dessutom är så litet att z_n är den enda singulariteten till f i D_n , och låt C_n vara randen till D_n orienterad moturs. Då är $\partial\omega_\epsilon = \partial\omega - C_1 - \dots - C_N$, och Cauchys integralsats (Sats 3.17 på s. 46) tillämpad på någon omgivning Ω till $\bar{\omega}_\epsilon$ ger att

$$0 = \int_{\partial\omega_\epsilon} f(s) ds = \int_{\partial\omega} f(s) ds - \sum_{n=1}^N \int_{C_n} f(s) ds = \int_{\partial\omega} f(s) ds - 2\pi i \sum_{n=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_n} f(z),$$

där den sista likheten är en konsekvens av definitionen av residy. Påståendet följer. $\blacksquare$

5.3. Exempel. Vi ska beräkna integralen

$$\int_C z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$$

där C är enhetscirkeln $|z| = 1$ tagen ett varv moturs. Vi ser att $z^2 \sin(1/z)$ är singularär endast i $z = 0$, och att denna punkt ligger innanför C . Eftersom $\sin w = w - w^3/3! + w^5/5! - \dots$, där ... står för termer av grad 7 och högre i w , och serien konvergerar för alla $w \in \mathbb{C}$, ser vi att

$$z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) = z^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{120z^5} + \dots \right) = z - \frac{1/6}{z} + \frac{1/120}{z^3} + \dots, \quad \text{så} \quad \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = -\frac{1}{6},$$

ty ... i det sista steget står för termer av grad -5 och lägre i z , och serien konvergerar för alla $z \neq 0$. Residysatsen ger alltså att integralens värde är $2\pi i \cdot (-1/6) = -i\pi/3$.

Denna integral kan också beräknas på annat sätt, se Exempel 5.12. $\blacktriangle$

I Exempel 5.3 var $z = 0$ en **väsentlig singularitet**, och för att beräkna residyn i en sådan har man endast serieutveckling att tillgå. I en **hävbar singularitet** är residyn trivialt noll. I det återstående fallet, **poler**, kan man från serieutvecklingen härleda vissa samband som ofta är användbara, vilket vi nu ska se.

5.4. Proposition (Residyberäkning i pol). Om f har pol av ordning N i z_0 , så att det finns en funktion g som är analytisk i z_0 sådan att

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^N}$$

i någon punkterad omgivning till z_0 , så är

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{g^{(N-1)}(z_0)}{(N-1)!} = \frac{1}{(N-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} ((z - z_0)^N f(z)).$$

De första fallen blir således som följer:

$$\begin{aligned} N = 1 : \quad & \operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{g(z)}{z - z_0} = g(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0)f(z)), \\ N = 2 : \quad & \operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{g(z)}{(z - z_0)^2} = g'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} ((z - z_0)^2 f(z)), \\ N = 3 : \quad & \operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{g(z)}{(z - z_0)^3} = \frac{g''(z_0)}{2!} = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^2}{dz^2} ((z - z_0)^3 f(z)). \end{aligned}$$

Bevis. g är analytisk i någon skiva $|z - z_0| < \delta$ och kan därför skrivas

$$g(z) = g(z_0) + g'(z_0)(z - z_0) + \frac{g''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < \delta;$$

alltså har f Laurentserien

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^N} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^{k-N}, \quad 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Residyn för f i z_0 , alltså koefficienten för $(z - z_0)^{-1}$ i denna serie, får vi således från term nummer $k = N - 1$:

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{g(z)}{(z - z_0)^N} = \frac{g^{(N-1)}(z_0)}{(N-1)!} = \frac{1}{(N-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} ((z - z_0)^N f(z)),$$

där den sista likheten beror på att alla derivator av g är kontinuerliga i z_0 . ■

I enkelpoler är det ofta enklare att använda sig av nedanstående resultat.

5.5. Följdsats (Residyberäkning i enkelpol). Om f i en punkterad omgivning till z_0 kan skrivas i formen

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

där p och q är analytiska i z_0 och q har enkelt nollställe i z_0 , så är

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Bevis. Enligt förutsättningen är $q(z) = (z - z_0)h(z)$ för någon funktion h som är analytisk i z_0 och för vilken $h(z_0) \neq 0$ (se Definition 4.41 på s. 84); notera också att $q'(z_0) = h(z_0)$. Alltså är, enligt fall $N = 1$ i Proposition 5.4 med $g = p/h$,

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{p(z)/h(z)}{z - z_0} = \operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{g(z)}{z - z_0} = g(z_0) = \frac{p(z_0)}{h(z_0)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

■

5.6. Anmärkning. För att f i Proposition 5.4 verkligen ska ha pol av ordning N i z_0 krävs dessutom att $g(z_0) \neq 0$, men som synes fungerar beviset lika bra utan detta krav. Exempelvis har funktionen

$$f(z) = \frac{\sin z}{(z - \pi)^4}$$

trippelpol i punkten π , trots exponenten 4 i nämnaren, eftersom $\sin z$ har enkelt nollställe i π . Lika fullt är, med $g(z) = \sin z$, $N = 4$ och $z_0 = \pi$,

$$\operatorname{Res}_{z=\pi} f(z) = \frac{g'''(\pi)}{3!} = \frac{-\cos \pi}{6} = \frac{1}{6}.$$

På samma sätt fungerar det i Följdsats 5.5: Om p har nollställe i z_0 så har f hävbar singularitet där och residyn är följaktligen noll, i enlighet med formeln $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = p(z_0)/q'(z_0)$. ▲

5.7. Exempel. Vi ska beräkna alla residyer till

$$f(z) = \frac{1}{z^3 \cos z}.$$

Vi ser först att f är singulär i punkten $z = 0$ (där $z^3 = 0$) och i punkterna $z = \pi/2 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ (där $\cos z = 0$, se s. 33), men ingen annanstans.

I punkten $z = 0$ kan vi skriva

$$f(z) = \frac{1/\cos z}{z^3} = \frac{g(z)}{z^3},$$

där $g(z) = 1/\cos z$ är analytisk i 0. En kort Maclaurinutveckling av g ger därför att

$$f(z) = \frac{g(0) + g'(0)z + g''(0)z^2/2! + \mathcal{O}(z^3)}{z^3} = \frac{g(0)}{z^3} + \frac{g'(0)}{z^2} + \frac{g''(0)/2!}{z} + \mathcal{O}(1),$$

vilket alltså är Laurentserien för f i någon punkterad omgivning till 0; $\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(z^0)$ står för en konvergent potensserie med termer av grad ≥ 0 i z , se s. 79 (Avsnitt 4.4). Alltså är

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{g''(0)}{2!} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos z} + \frac{2 \sin^2 z}{\cos^3 z} \right) \Big|_{z=0} = \frac{1}{2},$$

vilket också är vad man får i fallet $N = 3$ (och $z_0 = 0$) i den allmänna formeln i Proposition 5.4.

I övriga punkter, $z = z_n = \pi/2 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, kan vi i stället skriva

$$f(z) = \frac{1/z^3}{\cos z} = \frac{p(z)}{q(z)}$$

med $p(z) = 1/z^3$ och $q(z) = \cos z$; i z_n är p och q analytiska, och q har enkelt nollställe där. Vi får att

$$\operatorname{Res}_{z=z_n} f(z) = \frac{p(z_n)}{q'(z_n)} = \frac{1/z_n^3}{-\sin z|_{z=z_n}} = \frac{(-1)^{n+1}}{(\pi/2 + n\pi)^3}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

i enlighet med Följsats 5.5; notera att $\sin z_n = (-1)^n$. ▲

5.8. Exempel (Residyberäkning i pol på tre sätt). Vi studerar funktionen

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{z \sin z}$$

som är singulär bl.a. i origo. Vi ska beräkna residyn för f i origo på tre sätt.

1. *Ansats.* Eftersom nämnaren $z \sin z$ har dubbelt nollställe i $z = 0$ kan vi göra ansatsen

$$(*) \quad \frac{e^{2z}}{z \sin z} = \frac{a}{z^2} + \frac{b}{z} + \mathcal{O}(1),$$

där koefficienten b , enligt definitionen, är residyn i origo. Maclaurinutveckling ger att $e^{2z} = 1 + 2z + \mathcal{O}(z^2)$ och $z \sin z = z^2 + \mathcal{O}(z^4)$, och multiplikation av båda led i (*) med $z \sin z$ ger därför likheten

$$1 + 2z + \mathcal{O}(z^2) = \left(\frac{a}{z^2} + \frac{b}{z} + \mathcal{O}(1) \right) (z^2 + \mathcal{O}(z^4)) = a + bz + \mathcal{O}(z^2).$$

Entydighet hos koefficienterna (Proposition 4.34 på s. 80) ger att $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = b = 2$.

2. *Direkt utveckling.* Vi använder att $(1+s)^{-1} = 1 + \mathcal{O}(s)$, med $s = \mathcal{O}(z^2)$, och får att

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^{2z}}{z \sin z} = \frac{1 + 2z + \mathcal{O}(z^2)}{z^2 + \mathcal{O}(z^4)} = \frac{1}{z^2} (1 + 2z + \mathcal{O}(z^2)) (1 + \mathcal{O}(z^2))^{-1} \\ &= \frac{1}{z^2} (1 + 2z + \mathcal{O}(z^2)) (1 + \mathcal{O}(z^2)) = \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} + \mathcal{O}(1), \quad \text{så} \quad \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 2. \end{aligned}$$

3. *Derivataformel.* Residyn i en dubbelpol $z = z_0$ kan beräknas med formeln

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} ((z - z_0)^2 f(z)) = \{z_0 = 0\} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} (z^2 f(z)) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z e^{2z}}{\sin z} \right).$$

Om vi först utvecklar täljare och nämnare, och genast förkortar med z , får vi att

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{z e^{2z}}{\sin z} \right) = \frac{d}{dz} \left(\frac{1 + 2z + \mathcal{O}(z^2)}{1 + \mathcal{O}(z^2)} \right) = \frac{2 + \mathcal{O}(z)}{1 + \mathcal{O}(z^2)} - \frac{1 + 2z + \mathcal{O}(z^2)}{(1 + \mathcal{O}(z^2))^2} \cdot \mathcal{O}(z) \rightarrow 2$$

då $z \rightarrow 0$, så $\text{Res}_{z=0} f(z) = 2$. Vi har här använt deriveringsregeln $(\mathcal{O}(z^{n+1}))' = \mathcal{O}(z^n)$ för $n \in \mathbb{N}$, som är sann med vår definition av $\mathcal{O}(z^n)$, se Proposition 4.33 på s. 80.

Alla tre varianterna fungerar således bra i detta fall. ▲

5.9. Exempel (Residyberäkning genom variabelbyte). Vi undersöker singulariteterna, och beräknar residyerna, för

$$f(z) = \frac{1}{z \tan^2 z}.$$

Vi noterar först att $\tan z = \sin z / \cos z$ är odefinierat då $\cos z = 0$, d.v.s. då $z = \pi/2 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, men i punkterade omgivningarna till dessa punkter kan vi skriva

$$f(z) = \frac{\cos^2 z}{z \sin^2 z},$$

och högerledet här är analytiskt i dessa punkter (med värdet 0 där). Således är punkterna $z = \pi/2 + n\pi$ hävbara singulariteter till f , och residyn är därför 0 i de punkterna.

Övriga punkter där f är singulär är där $z \sin^2 z = 0$, d.v.s. där $z = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Residyn i punkten $n\pi$ är koefficienten för $(z - n\pi)^{-1}$ i Laurentserien för f i en punkterad skiva med centrum i $n\pi$, så om vi gör variabelbytet $w = z - n\pi$ blir residyn i punkten $n\pi$ för f samma som residyn i punkten 0 för funktionen

$$w \mapsto \frac{\cos^2(w + n\pi)}{(w + n\pi) \sin^2(w + n\pi)} = \frac{\cos^2 w}{(w + n\pi) \sin^2 w}.$$

Här är

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2 w}{\sin^2 w} &= \frac{(1 - w^2/2! + \mathcal{O}(w^4))^2}{(w - w^3/3! + \mathcal{O}(w^5))^2} = \frac{1 - w^2 + \mathcal{O}(w^4)}{w^2(1 - w^2/3 + \mathcal{O}(w^4))} \\ &\stackrel{*}{=} \frac{(1 - w^2 + \mathcal{O}(w^4))(1 + w^2/3 + \mathcal{O}(w^4))}{w^2} = \frac{1 - 2w^2/3 + \mathcal{O}(w^4)}{w^2}, \end{aligned}$$

där vi i steg $*$ använde att $(1 + s)^{-1} = 1 - s + \mathcal{O}(s^2)$, med $s = -w^2/3 + \mathcal{O}(w^4)$. Vidare,

$$\frac{1}{w + n\pi} = \frac{1}{n\pi} \cdot \frac{1}{1 + w/(n\pi)} = \frac{1}{n\pi} \left(1 - \frac{w}{n\pi} + \mathcal{O}(w^2) \right), \quad n \neq 0,$$

så

$$\text{Res}_{z=n\pi} f(z) = \text{Res}_{w=0} \frac{\cos^2 w}{(w + n\pi) \sin^2 w} = \begin{cases} \text{Res}_{w=0} \frac{1}{w} \cdot \frac{1 - 2w^2/3 + \mathcal{O}(w^4)}{w^2} = -\frac{2}{3}, & n = 0, \\ \text{Res}_{w=0} \frac{1}{n\pi} \left(1 - \frac{w}{n\pi} + \mathcal{O}(w^2) \right) \frac{1 + \mathcal{O}(w^2)}{w^2} = -\frac{1}{(n\pi)^2}, & n \neq 0, \end{cases}$$

som ju är koefficienten för w^{-1} i de respektive fallen. ▲

5.10. Exempel (Oändligt många singulariteter i ω). Residysatsen förutsätter att integranden f är analytisk i en omgivning till $\bar{\omega}$ utom möjligen i *ändligt* många punkter i ω . Integralen

$$\int_C \frac{dz}{\sin(1/z)},$$

där C är enhetscirkeln $|z| = 1$ tagen ett varv moturs, kan *inte* beräknas direkt med residysatsen eftersom integranden $f(z) = 1/\sin(1/z)$ har oändligt många singulariteter innanför C (dessutom är singulariteten $z = 0$ inte isolerad, så $\text{Res}_{z=0} f(z)$ är odefinierat). Integralen kan dock lösas på annat sätt, se Övning 5.8 på s. 106. $\blacktriangle$

★ ÖVNINGAR

★ **5.1** Beräkna (a) $\text{Res}_{z=0} z^3 e^{1/z}$ (b) $\text{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2}$ (c) $\text{Res}_{z=-2} \cos \frac{1}{z+2}$ (d) $\text{Res}_{z=1} \sin \frac{z}{z-1}$

★ **5.2** Om $\text{Res}_{z=z_0} f(z) = 0$, har då f hävbar singularitet i z_0 ? Bevis eller motexempel!

★ **5.3** Beräkna alla residyer till funktionen f om $f(z)$ ges av uttrycket

$$(a) \frac{1}{(z+1)^2 - 2i} \quad (b) \frac{\cos z}{z^4 + z^2} \quad (c) \frac{e^z}{z(z+1)^3} \quad (d) \frac{z}{e^{2z} - 1} \quad (e) \frac{1}{z^2 \sin z} \quad (f) \frac{1}{(e^z - 1)^2}$$

★ **5.4** Beräkna $\int_C f(z) dz$ om f ges av motsvarande deluppgift i Övning 5.3 och C är följande cirkel ett varv i positiv led: (a) $|z| = 2$ (c) $|z - 2i| = 3$ (d) $|z - 2\pi| = 1$ (f) $|z| = 8$

★ **5.5** Beräkna integralerna (ett varv moturs överallt)

$$(a) \int_{|z|=2} \frac{\sin \pi z dz}{1 + z + z^2 + z^3} \quad (b) \int_{|z|=3} \frac{\sin z dz}{\sinh^2 z} \quad (c) \int_{|z|=5} \frac{z^3 e^{1/z} dz}{1 + z}$$

★ **5.6** Beräkna koefficienten c_{-1} i Laurentserien $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ för $f(z) = 1/\sin z$ i området

$$(a) 0 < |z| < \pi \quad (b) \pi < |z| < 2\pi \quad (\text{använd integralformel (4.4) på s. 74})$$

5.2 Trigonometriska integraler över hel period

Integraler av typen

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos \theta, \sin \theta, \cos 2\theta, \sin 2\theta, \dots, \cos n\theta, \sin n\theta) d\theta, \quad n \in \mathbb{N},$$

där f är en funktion av $2n$ reella variabler, kan skrivas om till en komplex kurvintegral längs enhetscirkeln $C: |z| = 1$ tagen ett varv moturs (med start- och slutpunkt $z = -1$) via parametriseringen

$$z = e^{i\theta}, \quad \theta: -\pi \rightarrow \pi.$$

Då blir nämligen

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}$$

och, allmänt, $\cos k\theta = (e^{ik\theta} + e^{-ik\theta})/2 = (z^k + z^{-k})/2$ och $\sin k\theta = (e^{ik\theta} - e^{-ik\theta})/2i = (z^k - z^{-k})/2i$ för $k \in \mathbb{N}$. Dessutom blir

$$\frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta} = iz \quad \text{och därmed} \quad d\theta = \frac{dz}{iz}.$$

Vi illustrerar tekniken med ett exempel:

5.11. Exempel. Vi ska beräkna de reella trigonometriska integralerna

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \theta d\theta}{5 - 4 \cos \theta}, \quad I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta d\theta}{5 - 4 \cos \theta} \quad \text{och} \quad I_3 = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \theta d\theta}{5 - 4 \cos \theta}$$

med residykalkyl. (Notera att det enda som skiljer integralerna åt är integrationsintervallen.) Eftersom integralerna är reella har de naturligtvis också reella värden, och i detta fall är integranderna t.o.m. positiva, så integralerna måste ha positiva värden. Vidare, integranden $g(\theta) = (\sin^2 \theta)/(5 - 4 \cos \theta)$ har period 2π , så vi inser genast att $I_2 = I_1$, och eftersom g är en jämn funktion är $I_3 = I_1/2$; det räcker således att beräkna I_1 för att få alla tre integralerna eftersom, som sagt,

$$I_2 = I_1 \quad \text{och} \quad I_3 = \frac{I_1}{2}.$$

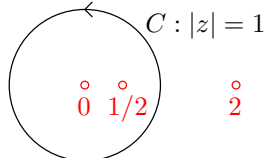
Vi skriver $z = e^{i\theta}$, $\theta : -\pi \rightarrow \pi$, som då blir en parametrisering av enhetscirkeln $C : |z| = 1$ tagen ett varv moturs. Då blir

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2} \quad \text{och} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i},$$

och dessutom blir $dz/d\theta = ie^{i\theta} = iz$ och därmed $d\theta = dz/iz$. Vi får därför att

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta = \int_C \frac{((z - z^{-1})/2i)^2}{5 - 4((z + z^{-1})/2)} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{8i} \int_C \frac{(z^2 - 1)^2}{z^2(z^2 - 5z/2 + 1)} dz.$$

Integranden – kalla den $f(z)$ – har singulariteterna $z = 0$, $z = 1/2$ och $z = 2$, av vilka $z = 0$ (dubbelpol) och $z = 1/2$ (enkelpol) ligger innanför C , så residysatsen medför att



$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{8i} \cdot 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname{Res}_{z=1/2} f(z) \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{dz} \left(\frac{(z^2 - 1)^2}{z^2 - 5z/2 + 1} \right) \Big|_{z=0} + \frac{(z^2 - 1)^2/z^2}{\frac{d}{dz}(z^2 - 5z/2 + 1)} \Big|_{z=1/2} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \left(\left(\frac{2(z^2 - 1) \cdot 2z}{z^2 - 5z/2 + 1} - \frac{(z^2 - 1)^2}{(z^2 - 5z/2 + 1)^2} (2z - 5/2) \right) \Big|_{z=0} + \frac{(z^2 - 1)^2/z^2}{2z - 5/2} \Big|_{z=1/2} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \right) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Till sist får vi också de andra två integralerna: $I_2 = I_1 = \pi/4$ och $I_3 = I_1/2 = \pi/8$. ▲

5.12. Exempel (Alternativ lösning till Exempel 5.3). Genom att som ovan parametrisera enhetscirkeln C med $z = e^{i\theta}$, $\theta : -\pi \rightarrow \pi$, sedan göra ett reellt variabelbyte $t = -\theta$, och slutligen gå tillbaka till en kurvintegral via $w = e^{it}$, får vi att

$$\begin{aligned} \int_C z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz &= \{z = e^{i\theta}\} = \int_{-\pi}^{\pi} (e^{i\theta})^2 \sin(e^{-i\theta}) ie^{i\theta} d\theta = \{t = -\theta\} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (e^{-it})^2 \sin(e^{it}) ie^{-it} dt = \{w = e^{it}\} = \int_C \frac{\sin w}{w^4} dw, \end{aligned}$$

faktiskt med samma kurva C som i början (enhetscirkeln tagen ett varv moturs). Den sista integralen är lätt att lösa eftersom integranden är singulär endast i origo:

$$\frac{\sin w}{w^4} = \frac{w - w^3/3! + \mathcal{O}(w^5)}{w^4} = \frac{1}{w^3} - \frac{1}{6w} + \mathcal{O}(w), \quad w \neq 0, \quad \text{så} \quad \operatorname{Res}_{w=0} \frac{\sin w}{w^4} = -\frac{1}{6},$$

varför integralens värde blir $2\pi i \cdot (-1/6) = -i\pi/3$. ▲

★ ÖVNINGAR

- ★ 5.7 Beräkna följande trigonometriska integraler: (a) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4 \sin \theta}$ (b) $\int_0^\pi \cos^3 \theta \cos 3\theta d\theta$
 (c) $\int_{-\pi}^\pi \frac{\cos^2 \theta d\theta}{5 - 4 \cos 2\theta}$ (d) $\int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta d\theta}{a + \cos \theta}$ ($a > 1$) (e) $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \theta d\theta$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

- ★ 5.8 Beräkna integralen i Exempel 5.10 m.h.a. tekniken i Exempel 5.12.

5.3 Integration av rationella funktioner

Vi ska nu studera integraler av typen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

där p och q är polynom och $q(x) \neq 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Detta är naturligtvis ett specialfall av den mera allmänna situationen där man undersöker $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ för kontinuerliga f . Eftersom denna integral är generaliserad både i $-\infty$ och i $+\infty$, och endast där, är den lika med gränsvärdet av $\int_{-M}^N f(x) dx$, om det existerar, när $M \rightarrow \infty$ och $N \rightarrow \infty$ oberoende av varandra, jfr dubbelsidiga serier i Avsnitt 4.1. Det vi med nedanstående teknik kommer att kunna beräkna är normalt $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$, eller i vårt specialfall

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{p(x)}{q(x)} dx,$$

det s.k. **principalvärdet** av $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$. Vi ser att följande implikation gäller:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \text{ är konvergent} \implies \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx.$$

Det finns dock divergenta integraler med ändliga principalvärden, och det kanske enklaste exemplet är $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$, se Övning 5.9. Ett annat exempel är följande:

5.13. Exempel (Divergent integral med ändligt principalvärde). Vi studerar integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x-i}.$$

Uppdelningen

$$\frac{1}{x-i} = \frac{x}{x^2+1} + i \frac{1}{x^2+1}$$

i real- och imaginärdelar – och reella standardprimitiver – ger att

$$\int_{-M}^N \frac{dx}{x-i} = \frac{\ln(N^2+1) - \ln(M^2+1)}{2} + i(\arctan N + \arctan M),$$

så imaginärdelen konvergerar (mot π) medan realdelen saknar gränsvärde när $M \rightarrow \infty$ och $N \rightarrow \infty$ oberoende av varandra. Vår integral är alltså divergent, medan däremot

$$\int_{-R}^R \frac{dx}{x-i} = 2i \arctan R \rightarrow i\pi, \quad R \rightarrow \infty,$$

så vår divergenta integral har ett ändligt principalvärde, nämligen $i\pi$. ▲

I Övning 5.10a visar man att

$$\text{grad } q \geq 2 + \text{grad } p \implies \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx \text{ är konvergent,}$$

och när detta gäller är således integralen lika med sitt principalvärde.

5.14. Exempel. Vi ska beräkna integralen

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)}$$

och sätter därför

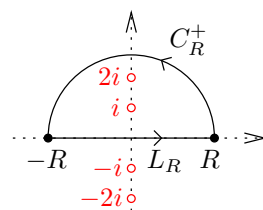
$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 4)} = \frac{1}{(z + i)^2(z - i)^2(z + 2i)(z - 2i)},$$

som är singulär i punkterna $z = \pm i$ och $z = \pm 2i$. Den sökta integralen

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{L_R} f(z) dz,$$

där L_R är sträckan från $z = -R$ till $z = R$, med parametrisering $z = t$, $t : -R \rightarrow R$.

För att kunna använda residysatsen behöver vi dock en sluten kurva. Studera därför konturen $\Gamma_R = L_R + C_R^+$ enligt figuren. Om $R > 2$ så är f analytisk på och innanför Γ_R utom i dubbelpolen $z = i$ och i enkelpolen $z = 2i$. Enligt residysatsen är därför



$$\begin{aligned} (*) \quad \int_{L_R + C_R^+} f(z) dz &= 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname{Res}_{z=2i} f(z) \right) \\ &= \int f(z) = \frac{(z+i)^{-2}(z^2+4)^{-1}}{(z-i)^2} = \frac{(z^2+1)^{-2}(z+2i)^{-1}}{z-2i} \\ &= 2\pi i \left(\frac{d}{dz} ((z+i)^{-2}(z^2+4)^{-1}) \Big|_{z=i} + (z^2+1)^{-2}(z+2i)^{-1} \Big|_{z=2i} \right) \\ &= 2\pi i \left((-2(z+i)^{-3}(z^2+4)^{-1} - (z+i)^{-2}(z^2+4)^{-2}2z) \Big|_{z=i} + \frac{1}{36i} \right) \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{36i} + \frac{1}{36i} \right) = \frac{\pi}{9}, \quad R > 2. \end{aligned}$$

Vidare, $\int_{L_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(t) dt \rightarrow I$ då $R \rightarrow \infty$, som sagt, och en ML-uppskattning (se Proposition 3.7 på s. 42) ger, eftersom $|z^2 + 1| \geq ||z|^2 - 1| = R^2 - 1 > 0$ och $|z^2 + 4| \geq R^2 - 4 > 0$ på C_R^+ om $R > 2$, att

$$\left| \int_{C_R^+} f(z) dz \right| \leq \frac{1}{(R^2 - 1)^2(R^2 - 4)} \cdot \pi R \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty,$$

av gradskäl, så $\int_{C_R^+} f(z) dz \rightarrow 0$ då $R \rightarrow \infty$.

Låt nu $R \rightarrow \infty$ i (*). Då får vi att $I + 0 = \pi/9$, d.v.s. att $I = \pi/9$. ▲

5.15. Anmärkning (Jämn integrand). Vi kan även få värdet på integralen

$$J = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)}$$

om vi bara observerar att integranden $f(x)$ är en jämn funktion: $f(-x) = f(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Av detta följer ju att

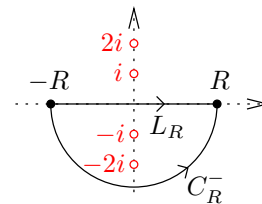
$$J = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)} = \frac{1}{2} \cdot I,$$

där I beräknas med tekniken i Exempel 5.14 ovan; $I = \pi/9$, så $J = \pi/18$. ▲

5.16. Exempel (Alternativ kontur till Exempel 5.14). Vi kan lika gärna sluta sträckan L_R med en halvcirkel i *undre* halvplanet, se figur, så att vi får konturen

$$\Gamma_R = C_R^- - L_R$$

(observera orienteringen) med polerna $-i$ och $-2i$ innanför. Vi får, helt analogt, att



$$\int_{C_R^-} f(z) dz - \int_{L_R} f(z) dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=-i} f(z) + \operatorname{Res}_{z=-2i} f(z) \right) = \dots = -\frac{\pi}{9}, \quad R > 2,$$

och ML-uppskattningen på C_R^- blir identisk med den på C_R^+ ovan. Gränsövergång ger därför att $0 - I = -\pi/9$ och därmed att $I = \pi/9$, ännu en gång. ▲

5.17. Exempel (Tårtbitskontur). Vi ska beräkna integralen

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^3 + 1}.$$

Här är ju integranden *inte* jämn (inte heller udda, för övrigt), så vi kan inte använda tekniken i Anmärkning 5.15. I stället ska vi integrera längs randen till en lämplig cirkelsektor, en s.k. tårtbitskontur, se figur nedan.

Sätt

$$f(z) = \frac{1}{z^3 + 1}$$

och låt L_R vara sträckan från $z = 0$ till $z = R$, som vi parametriserar med $z = t$, $t : 0 \rightarrow R$; notera att

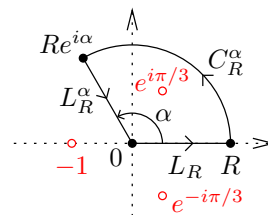
$$\int_{L_R} f(z) dz = \int_0^R \frac{dt}{t^3 + 1} \rightarrow I, \quad R \rightarrow \infty.$$

Vi ska nu skapa en kontur genom att lägga till en cirkelbåge C_R^α med radie R från $z = R$ till $z = R e^{i\alpha}$ och en sträcka L_R^α från $z = R e^{i\alpha}$ tillbaka till $z = 0$ för någon lämplig vinkel $\alpha > 0$. Med parametriseringen $z = t e^{i\alpha}$, $t : R \rightarrow 0$, av L_R^α får vi att

$$\int_{L_R^\alpha} f(z) dz = \int_R^0 \frac{e^{i\alpha} dt}{(t e^{i\alpha})^3 + 1} = -e^{i\alpha} \int_0^R \frac{dt}{t^3 e^{i3\alpha} + 1} \stackrel{*}{=} -e^{i2\pi/3} \int_0^R \frac{dt}{t^3 + 1} \rightarrow -e^{i2\pi/3} I, \quad R \rightarrow \infty,$$

där vi i steg * valde $\alpha = 2\pi/3$, och det av följande skäl: Vi vill få nämnaren $t^3 + 1$ även i denna integral, och det får vi om $e^{i3\alpha} = 1$. Minsta möjliga $\alpha > 0$ som uppfyller denna ekvation är just $\alpha = 2\pi/3$.

f har enkelpoler där $z^3 = -1$, som är en binomisk ekvation med rötterna $z = e^{i\pi/3 + in2\pi/3}$, $n = -1, 0, 1$, d.v.s. $z = e^{\pm i\pi/3}$ och $z = e^{i\pi} = -1$, jfr Exempel 1.5 på s. 4. Innanför konturen finns enkelpolen $z = e^{i\pi/3}$, så för stora R får vi att



$$\begin{aligned} (*) \quad \int_{L_R + C_R^\alpha + L_R^\alpha} f(z) dz &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=e^{i\pi/3}} \frac{1}{z^3 + 1} = 2\pi i \cdot \frac{1}{\frac{d}{dz}(z^3 + 1)} \Big|_{z=e^{i\pi/3}} \\ &= 2\pi i \cdot \frac{1}{3z^2} \Big|_{z=e^{i\pi/3}} = 2\pi i \cdot \frac{z}{3z^3} \Big|_{z=e^{i\pi/3}} = 2\pi i \cdot \frac{e^{i\pi/3}}{3(-1)}. \end{aligned}$$

ML-uppskattning ger att

$$\left| \int_{C_R^\alpha} f(z) dz \right| \leq \frac{1}{R^3 - 1} \cdot \frac{2\pi R}{3} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty.$$

Genom att låta $R \rightarrow \infty$ i (*) får vi till sist att

$$I + 0 - e^{i2\pi/3} I = -\frac{2\pi i e^{i\pi/3}}{3}, \quad \text{så} \quad I = \frac{2\pi i e^{i\pi/3}}{3(e^{i2\pi/3} - 1)} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{2i}{e^{i\pi/3} - e^{-i\pi/3}} = \frac{\pi/3}{\sin(\pi/3)} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Se även Övning 5.16. ▲

★ ÖVNINGAR

★ 5.9 Visa att $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$ är divergent, men att PV $\int_{-\infty}^{\infty} x dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R x dx = 0$.

★ 5.10 Låt p och q vara polynom och antag att q saknar reella nollställen. Visa att

(a) $\text{grad } q \geq 2 + \text{grad } p \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx$ är absolutkonvergent

(b) $\text{grad } q \geq 1 + \text{grad } p$ och $a \neq 0$ reell konstant $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} e^{iax} dx$ är konvergent

I båda fallen är därmed $\int_{-\infty}^{\infty} = \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R$.

★ 5.11 Beräkna (a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^4 + 1} dx$ (b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 9)^2}$ (c) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}$

★ 5.12 Beräkna principalvärdet av den divergenta integralen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$.

5.4 Fourierintegraler

Med **Fourierintegraler** menar vi integraler av typen

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{iax} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cos ax dx \quad \text{och} \quad \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \sin ax dx, \quad \text{där } a \in \mathbb{R},$$

ibland med gränser $\int_0^{\infty}$ i stället för $\int_{-\infty}^{\infty}$; integraler av denna typ är viktiga i den s.k. Fourieranalysen, se kursen TATA77 Fourieranalys. Här ska vi endast studera hur man kan beräkna vissa sådana integraler.

Vi ska närmast studera Fourierintegraler där $h = p/q$, en rationell funktion, som i föregående avsnitt. I Övning 5.10b visar man att

$$a \neq 0, \text{ reellt} \quad \text{och} \quad \text{grad } q \geq 1 + \text{grad } p \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} e^{iax} dx \quad \text{är konvergent,}$$

och när detta gäller är således integralen lika med sitt principalvärde.

5.18. Exempel. Vi ska, för $a \in \mathbb{R}$, beräkna integralerna

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iat} dt}{t^2 + 2t + 2}, \quad I_1(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos at dt}{t^2 + 2t + 2} \quad \text{och} \quad I_2(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin at dt}{t^2 + 2t + 2}.$$

Eulers identitet $e^{iat} = \cos at + i \sin at$ ger omedelbart att

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iat} dt}{t^2 + 2t + 2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos at dt}{t^2 + 2t + 2} + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin at dt}{t^2 + 2t + 2} = I_1(a) + i I_2(a),$$

och eftersom både $I_1(a)$ och $I_2(a)$ är *reella* integraler är detta en uppdelning i real- och imaginär-delar av $I(a)$,

$$I_1(a) = \text{Re } I(a) \quad \text{och} \quad I_2(a) = \text{Im } I(a),$$

så det räcker att beräkna $I(a)$ för att få alla tre integralerna.

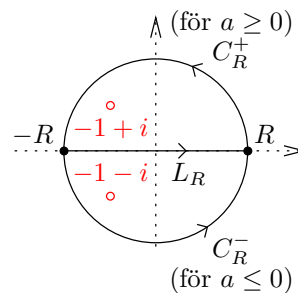
Vi sätter

$$f_a(z) = \frac{e^{iaz}}{z^2 + 2z + 2}$$

för fixt $a \in \mathbb{R}$. Funktionen f_a är analytisk utom i enkelpolerna $z = -1 \pm i$. Eftersom

$$|e^{iaz}| = e^{-ay} \leq 1 \quad \text{om } ay \geq 0$$

sluter vi sträckan $[-R, R]$ på två olika sätt beroende på tecknet på a : med halvcirkeln C_R^+ i övre halvplanet (där ju $y \geq 0$) om $a \geq 0$, men med halvcirkeln C_R^- i undre halvplanet (där $y \leq 0$) om $a \leq 0$, se figur.



- Om $a \geq 0$ studerar vi alltså konturen $C_R^+ + L_R$ i övre halvplanet och får att

$$(1) \quad \int_{C_R^+} f_a(z) dz + \int_{-R}^R f_a(t) dt = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-1+i} f_a(z) = 2\pi i \cdot \frac{e^{iaz}}{2z+2} \Big|_{z=-1+i} = \pi e^{-a-ia}$$

då R är stort nog. En ML-uppskattning ger, eftersom $|e^{iaz}| = e^{-ay} \leq 1$ på C_R^+ och $|z^2 + 2z + 2| \geq |z|^2 - 2|z| - 2 = R^2 - 2R - 2 > 0$ då $|z| = R$ och R är stort nog, att

$$\left| \int_{C_R^+} f_a(z) dz \right| \leq \frac{1}{R^2 - 2R - 2} \cdot \pi R \rightarrow 0 \quad \text{då } R \rightarrow \infty,$$

så genom att låta $R \rightarrow \infty$ i (1) får vi att $0 + I(a) = \pi e^{-a-ia}$, så $I(a) = \pi e^{-a-ia}$.

- Om $a \leq 0$ studerar vi i stället konturen $C_R^- - L_R$ (observera orienteringen) och får att

$$(2) \quad \int_{C_R^-} f_a(z) dz - \int_{-R}^R f_a(t) dt = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-1-i} f_a(z) = 2\pi i \cdot \frac{e^{iaz}}{2z+2} \Big|_{z=-1-i} = -\pi e^{a-ia}$$

då R är stort nog. ML-uppskattningen blir identisk med den i fallet $a \geq 0$:

$$\left| \int_{C_R^-} f_a(z) dz \right| \leq \frac{1}{R^2 - 2R - 2} \cdot \pi R \rightarrow 0 \quad \text{då } R \rightarrow \infty,$$

så genom att låta $R \rightarrow \infty$ i (2) får vi att $0 - I(a) = -\pi e^{a-ia}$, så $I(a) = \pi e^{a-ia}$.

Sammantaget blir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iat}}{t^2 + 2t + 2} dt = I(a) = \begin{cases} \pi e^{-a-ia}, & a \geq 0, \\ \pi e^{a-ia}, & a \leq 0, \end{cases} = \pi e^{-|a|-ia}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Uppdelning i real- och imaginärdelar ger sedan att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos at}{t^2 + 2t + 2} dt = \operatorname{Re} I(a) = \pi e^{-|a|} \cos(-a) = \pi e^{-|a|} \cos a, \quad a \in \mathbb{R},$$

och

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin at}{t^2 + 2t + 2} dt = \operatorname{Im} I(a) = \pi e^{-|a|} \sin(-a) = -\pi e^{-|a|} \sin a, \quad a \in \mathbb{R}.$$

▲

5.19. Anmärkning (Real- och imaginärdelar kontra Eulers formler). I exemplet ovan utnyttjade vi att funktionen $h(x) = 1/(x^2 + 2x + 2)$ i integralen $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{iax} dx$ är reellvärd för $x \in \mathbb{R}$ för att på ett enkelt sätt få integralerna $\int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cos ax dx$ och $\int_{-\infty}^{\infty} h(x) \sin ax dx$.

Om $h(x)$ inte är reellvärd kan vi i stället använda oss av Eulers formler

$$\cos ax = \frac{e^{iax} + e^{-iax}}{2} \quad \text{och} \quad \sin ax = \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i},$$

jfr Exempel 5.25 (slutet) och Övning 5.13a. Detta fungerar naturligtvis även när $h(x)$ är reellvärd, men då är det ofta enklare att direkt ta real- och imaginärdelar. ▲

5.20. Anmärkning (*Genväg via konjugering). Eftersom $\overline{e^{iat}} = e^{-iat}$ då $a \in \mathbb{R}$ och $t \in \mathbb{R}$ får vi följande samband när h är reellvärd (används i steg * nedan):

$$I(-a) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-iat} dt \stackrel{*}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{h(t)} \cdot \overline{e^{iat}} dt = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{iat} dt} = \overline{I(a)}, \quad h \text{ reellvärd}, a \in \mathbb{R},$$

vilket också kan skrivas $I(a) = \overline{I(-a)}$. Om vi här redan har räknat ut $I(a)$ för $a \geq 0$ kan vi alltså direkt få $I(a)$ för $a \leq 0$ via detta samband. I Exempel 5.18 är $I(a) = \pi e^{-a-ia}$ för $a \geq 0$, och $h(t) = 1/(t^2 + 2t + 2)$ är reellvärd. Om $a \leq 0$ blir således $I(a) = \overline{I(-a)} = \overline{\pi e^{-(-a)-i(-a)}} = \overline{\pi e^{a+ia}} = \pi e^{a-ia}$, vilket vi också fick – men på ett annat sätt – i exemplet. ▲

5.21. Anmärkning ($\cos z$ och $\sin z$ är obegränsade i $\mathbb{C}$). Om man vill beräkna integralen

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

kan man *inte* utan vidare integrera

$$\frac{z \sin z}{(z^2 + 1)^2}$$

eftersom $\sin z$ är obegränsad både på C_R^+ och C_R^- : $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$, se Övning 2.22 på s. 37. ML-uppskattningen på både C_R^+ och C_R^- ger ingenting, och man kan t.o.m. visa att

$$\int_{C_R^\pm} \left| \frac{z \sin z}{(z^2 + 1)^2} \right| |dz| \rightarrow +\infty, \quad R \rightarrow \infty.$$

(Jfr dock Övning 5.15.)

För att beräkna I använder man i stället lämpligen att

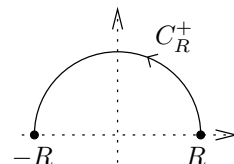
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + 1)^2} dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{(x^2 + 1)^2} dx = \operatorname{Im} J \quad \text{och sätter} \quad f(z) = \frac{z e^{iz}}{(z^2 + 1)^2};$$

notera att $h(x) = x/(x^2 + 1)^2$ är reellvärd. Eftersom $|e^{iz}| = e^{-y} \leq 1$ på C_R^+ integrerar vi sedan $f(z)$ längs konturen $L_R + C_R^+$ för att få J , på samma sätt som i fallet $a \geq 0$ i Exempel 5.18, och sedan får vi alltså I via $I = \operatorname{Im} J$. ▲

En annan sak vi utnyttjade i Exempel 5.18 var att gradskillnaden mellan täljare och nämnare var minst två, så att ML-uppskattningen gav önskat resultat: integralerna längs halvcirkeln gick mot noll. Nu räcker det ju att gradskillnaden är ett för att $\int_{-\infty}^{\infty} (p(x)/q(x)) e^{iax} dx$ ska konvergera för reella $a \neq 0$, men i det fallet behöver vi någonting bättre för att lyckas med ML-uppskattningen, nämligen följande:

5.22. Hjälpssats (Jordans lemma). Om C_R^+ är (en del av) halvcirkeln $z = Re^{i\theta}$, $\theta : 0 \rightarrow \pi$, i övre halvplanet, så är

$$\int_{C_R^+} |e^{iaz}| |dz| \leq \frac{\pi}{a}, \quad R > 0, \quad a > 0.$$



Bevis. Med $z = Re^{i\theta} = R \cos \theta + iR \sin \theta$ får vi att $|e^{iaz}| = e^{-aR \sin \theta} = \exp(-aR \sin \theta)$ och att $dz = iRe^{i\theta} d\theta$, så $|dz| = R d\theta$ (eftersom θ växer, jfr Definition 3.3 på s. 40), och därmed blir

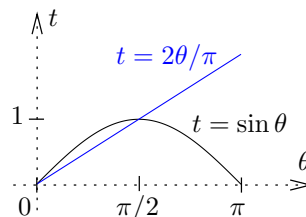
$$\begin{aligned} \int_{C_R^+} |e^{iaz}| |dz| &= \int_0^\pi \exp(-aR \sin \theta) R d\theta \stackrel{(1)}{=} 2 \int_0^{\pi/2} \exp(-aR \sin \theta) R d\theta \\ &\stackrel{(2)}{\leq} 2 \int_0^{\pi/2} \exp\left(-aR \cdot \frac{2\theta}{\pi}\right) R d\theta = -\frac{\pi}{a} \left[\exp\left(-aR \cdot \frac{2\theta}{\pi}\right) \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{a} (1 - e^{-aR}) \leq \frac{\pi}{a}, \quad R > 0, \quad a > 0, \end{aligned}$$

där (1) beror på att $\sin \theta$ är symmetrisk kring $\theta = \pi/2$, d.v.s. på att

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta,$$

och (2) på att

$$\sin \theta \geq 2\theta/\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2,$$



vilket visas med en enkel funktionsundersökning av $f(\theta) = \sin \theta - 2\theta/\pi$ på $[0, \pi/2]$. ■

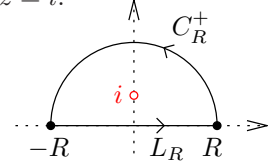
5.23. Exempel (Användning av Jordans lemma). Vi ska beräkna

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2x}}{2x - 2i} dx,$$

och sätter därför $f(z) = e^{i2z}/(2z - 2i)$, som är singulär endast i punkten $z = i$.

Vi studerar konturen $C_R^+ + L_R$ i figuren och får, för stora R , att

$$(*) \quad \int_{C_R^+} f(z) dz + \int_{-R}^R f(t) dt = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{e^{i2z}}{2} \Big|_{z=i} = \frac{i\pi}{e^2}.$$



Här ser vi att $\int_{-R}^R f(t) dt \rightarrow I$, vår sökta integral, då $R \rightarrow \infty$, medan

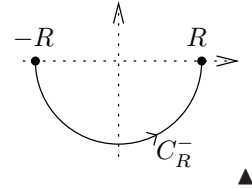
$$\left| \int_{C_R^+} f(z) dz \right| \leq \int_{C_R^+} |f(z)| |dz| = \int_{C_R^+} \frac{|e^{i2z}|}{|2z - 2i|} |dz| \leq \frac{1}{2R - 2} \int_{C_R^+} |e^{i2z}| |dz| \leq \frac{1}{2R - 2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

där vi i sista steget har använt Jordans lemma med $a = 2$; således ser vi att $\int_{C_R^+} f(z) dz \rightarrow 0$ då $R \rightarrow \infty$. Genom att låta $R \rightarrow \infty$ i (*) får vi därför att $0 + I = i\pi/e^2$, d.v.s. att $I = i\pi/e^2$. $\blacktriangle$

5.24. Anmärkning (Jordans lemma i undre halvplanet). Det finns en variant av Jordans lemma som fungerar om $a < 0$, men då på (en del av) C_R^- , som är halvcirkeln $z = Re^{i\theta}$, $\theta : -\pi \rightarrow 0$, i *undre* halvplanet:

$$\int_{C_R^-} |e^{iaz}| |dz| \leq \frac{\pi}{|a|}, \quad R > 0, \quad a < 0.$$

Detta kan bevisas på samma sätt som vanliga Jordans lemma, lämpligen genom att byta variabler $t = -\theta$ före det steg som motsvarar (1) i beviset ovan.

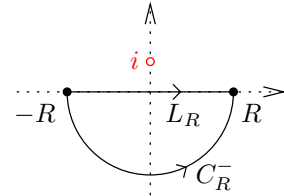


5.25. Exempel. M.h.a. denna senare variant av Jordans lemma kan vi beräkna

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i2x}}{2x - 2i} dx$$

genom att integrera $g(z) = e^{-i2z}/(2z - 2i)$, som är singulär endast i punkten $z = i$, längs konturen $C_R^- - L_R$ i figuren. Cauchys integralsats ger, för alla $R > 0$, att

$$(*) \quad \int_{C_R^-} g(z) dz - \int_{-R}^R g(t) dt = 0.$$



Vi får denna gång, med $a = -2$ och halvcirkeln C_R^- i *undre* halvplanet, att

$$\left| \int_{C_R^-} g(z) dz \right| \leq \int_{C_R^-} |g(z)| |dz| = \int_{C_R^-} \frac{|e^{-i2z}|}{|2z - 2i|} |dz| \leq \frac{1}{2R - 2} \int_{C_R^-} |e^{-i2z}| |dz| \leq \frac{1}{2R - 2} \cdot \frac{\pi}{|-2|},$$

så $\int_{C_R^-} g(z) dz \rightarrow 0$ då $R \rightarrow \infty$, och genom att låta $R \rightarrow \infty$ i (*) får vi därför att $0 - J = 0$, d.v.s. att $J = 0$.

M.h.a. J och integralen I i Exempel 5.23 får vi avslutningsvis också integralerna

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{2x - 2i} dx = \frac{I + J}{2} = \frac{i\pi}{2e^2} \quad \text{och} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{2x - 2i} dx = \frac{I - J}{2i} = \frac{\pi}{2e^2},$$

tack vare Eulers formler: $\cos 2x = (e^{i2x} + e^{-i2x})/2$ respektive $\sin 2x = (e^{i2x} - e^{-i2x})/2i$. $\blacktriangle$

5.26. Exempel (Fouriertransform). Vi ska här beräkna integralen

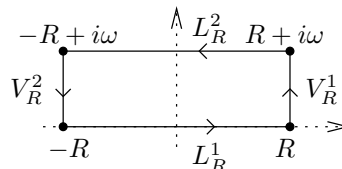
$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

den s.k. Fouriertransformen $\mathcal{F}f$ av f , i fallet då $f(t) = e^{-t^2/2}$.

Fixera $\omega \in \mathbb{R}$ och studera konturen

$$\Gamma_R = L_R^1 + V_R^1 + L_R^2 + V_R^2$$

i figuren (som är ritad för $\omega \geq 0$, men resonemanget blir detsamma om $\omega \leq 0$). Eftersom $f(z) = e^{-z^2/2}$ är hel är $\int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0$, så parametriseringarna $z = t$, $t : -R \rightarrow R$, av L_R^1 och $z = t + i\omega$, $t : R \rightarrow -R$, av L_R^2 ger att



$$(*) \quad \int_{-R}^R e^{-t^2/2} dt + \int_{V_R^1} f(z) dz - e^{\omega^2/2} \int_{-R}^R e^{-t^2/2} e^{-i\omega t} dt + \int_{V_R^2} f(z) dz = 0.$$

På $V_R^{1,2}$ är $|e^{-z^2/2}| = e^{\operatorname{Re}(-z^2/2)} = e^{(y^2-x^2)/2} = e^{(y^2-R^2)/2} \leq e^{(\omega^2-R^2)/2}$, så ML-uppskattning ger att

$$\left| \int_{V_R^{1,2}} f(z) dz \right| \leq e^{(\omega^2-R^2)/2} \cdot |\omega| \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty.$$

Gränsövergång i (*) ger därför att

$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} e^{-i\omega t} dt = e^{-\omega^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

där vi i sista steget har använt att $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, se t.ex. Persson-Böiers avsnitt 6.6.

Alltså är $\mathcal{F}f = \sqrt{2\pi} f$, så f är (nästan) sin egen Fouriertransform. (Man säger att f är en egenfunktion till operatoren $\mathcal{F}$ hörande till egenvärdet $\sqrt{2\pi}$.) ▲

★ ÖVNINGAR

★ 5.13 (a) Beräkna $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} dx}{(x-i)^2(x+i)}$ och $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix} dx}{(x-i)^2(x+i)}$,

samt därefter blixtnabbt $I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x-i)^2(x+i)}$ och $I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x dx}{(x-i)^2(x+i)}$.

(b) Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax} dx}{4x^2+1}$, där $a \in \mathbb{R}$ är en konstant.

★ 5.14 Beräkna (a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x dx}{x^2-2x+5}$ (b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2+2x+2}$

★ 5.15 Låt C_R^+ och C_R^- vara halvcirkelarna $z = Re^{i\theta}$ där $\theta : 0 \rightarrow \pi$ respektive $\theta : -\pi \rightarrow 0$.

(a) Använd att $f(z) = (\sin z)/z$ är hel analytisk (med $f(0) = 1$) för att visa att

$$\int_{-R}^R \frac{\sin x}{x} dx + \int_{C_R^+} \frac{e^{iz}}{2iz} dz + \int_{C_R^-} \frac{e^{-iz}}{2iz} dz - \int_{C_R^+ + C_R^-} \frac{e^{-iz}}{2iz} dz = 0, \quad R > 0.$$

Beräkna sedan $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

(b) Beräkna $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\sin x}{x} e^{-i\omega x} dx$ för $\omega \in \mathbb{R}$.

5.5 Indragna konturer och nyckelhålskonturer

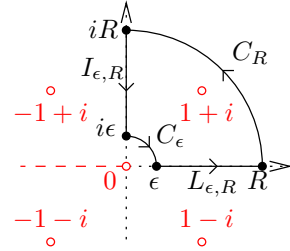
5.27. Exempel (Indragen kontur). Vi ska beräkna

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^4 + 4} dx \quad \text{och, på köpet,} \quad J = \int_0^\infty \frac{dx}{x^4 + 4}$$

och integrerar därför

$$f(z) = \frac{\operatorname{Log} z}{z^4 + 4},$$

där $\operatorname{Log} z$ som vanligt är principallogaritmen. f är analytisk utom på negativa realaxeln $]-\infty, 0]$ och i de fyra punkterna $\pm 1 \pm i$. Eftersom $(te^{i\alpha})^4 = t^4 e^{i4\alpha} = t^4$ om $\alpha = \pi/2$ kan vi välja en tårtbitskontur med denna öppningsvinkel (jfr Exempel 5.17) förutom att vi inte får dra konturen genom origo; i stället gör vi en kringgående rörelse längs en kvartscirkel C_ϵ från $i\epsilon$ till ϵ , och får en s.k. **indragna kontur**.



För små $\epsilon > 0$ och stora R ger residysatsen att

$$(*) \quad \int_{L_{\epsilon,R} + C_R + I_{\epsilon,R} + C_\epsilon} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=1+i} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{\operatorname{Log} z}{4z^3} \Big|_{z=1+i} = 2\pi i \cdot \frac{1+i}{4(-4)} \cdot \operatorname{Log}(1+i).$$

Vi parametriserar $L_{\epsilon,R}$ med $z = t$, $t : \epsilon \rightarrow R$, och $I_{\epsilon,R}$ med $z = it$, $t : R \rightarrow \epsilon$, och får att

$$\begin{aligned} \int_{L_{\epsilon,R}} f(z) dz + \int_{I_{\epsilon,R}} f(z) dz &= \int_\epsilon^R \frac{\ln t}{t^4 + 4} dt + \int_R^\epsilon \frac{\ln t + i\pi/2}{(it)^4 + 4} i dt \\ &= (1-i) \int_\epsilon^R \frac{\ln t}{t^4 + 4} dt + \frac{\pi}{2} \int_\epsilon^R \frac{dt}{t^4 + 4} \rightarrow (1-i)I + \frac{\pi}{2}J \end{aligned}$$

då $\epsilon \rightarrow 0^+$ och $R \rightarrow \infty$. Eftersom

$$|\operatorname{Log} z| = |\ln |z| + i \operatorname{Arg} z| \leq |\ln |z|| + |\operatorname{Arg} z| \leq \begin{cases} \ln R + \pi/2, & z \in C_R, \\ |\ln \epsilon| + \pi/2, & z \in C_\epsilon, \end{cases}$$

får vi ML-uppskattningarna

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \frac{\ln R + \pi/2}{R^4 - 4} \cdot \frac{\pi R}{2} \rightarrow 0 \quad \text{och} \quad \left| \int_{C_\epsilon} f(z) dz \right| \leq \frac{|\ln \epsilon| + \pi/2}{4 - \epsilon^4} \cdot \frac{\pi \epsilon}{2} \rightarrow 0$$

då $R \rightarrow \infty$ respektive $\epsilon \rightarrow 0^+$, enligt standardgränsvärden i reell envariabelanalys; notera att $|z^4 + 4| \geq ||z|^4 - 4| = 4 - \epsilon^4 > 0$ på C_ϵ för små $\epsilon > 0$. Genom att låta $\epsilon \rightarrow 0^+$ och $R \rightarrow \infty$ i (*) får vi därför att

$$(1-i)I + \frac{\pi}{2}J = 2\pi i \cdot \frac{1+i}{4(-4)} \cdot \left(\ln \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} \right) = \frac{(\pi^2 + 2\pi \ln 2) + i(\pi^2 - 2\pi \ln 2)}{32}.$$

Eftersom både I och J är *reella* tal – de är ju värden på reella integraler – är denna sista ekvation ekvivalent med de två reella ekvationer vi får genom att ta real- och imaginärdelar:

$$I + \frac{\pi}{2}J = \frac{\pi^2 + 2\pi \ln 2}{32} \quad \text{och} \quad -I = \frac{\pi^2 - 2\pi \ln 2}{32},$$

så

$$I = -\frac{\pi^2 - 2\pi \ln 2}{32} \quad \text{och} \quad J = \frac{\pi}{8}.$$

▲

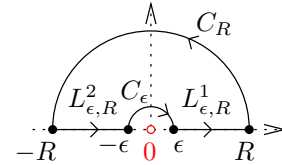
I föregående exempel gick integralen längs den lilla kringgående cirkelbågen mot noll då radien gick mot noll. I andra situationer behöver det inte vara så, utan man kan få ett annat ändligt gränsvärde, eller inget ändligt gränsvärde alls, då radien går mot noll, jfr Övning 5.23. Vi ser på ett exempel:

5.28. Exempel (Indragen kontur vid enkelpol). Vi ska visa att

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

genom att integrera

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z},$$



som är singular i origo, längs konturen $\Gamma_{\epsilon,R} = L_{\epsilon,R}^1 + C_R + L_{\epsilon,R}^2 + C_\epsilon$ i figuren för små $\epsilon > 0$ och stora R .

Till att börja med medför Cauchys integralsats att

$$(*) \quad \int_{L_{\epsilon,R}^1} f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz + \int_{L_{\epsilon,R}^2} f(z) dz + \int_{C_\epsilon} f(z) dz = 0, \quad 0 < \epsilon < R.$$

Parametriseringarna $z = t$, $t: \epsilon \rightarrow R$, av $L_{\epsilon,R}^1$, och $z = -t$, $t: R \rightarrow \epsilon$, av $L_{\epsilon,R}^2$, ger att

$$\int_{L_{\epsilon,R}^1} f(z) dz + \int_{L_{\epsilon,R}^2} f(z) dz = \int_\epsilon^R \frac{e^{it}}{t} dt + \int_R^\epsilon \frac{e^{-it}}{-t} (-dt) = 2i \int_\epsilon^R \frac{\sin t}{t} dt.$$

Vidare ger Jordans lemma (Hjälpsats 5.22), med $a = 1$, att

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \int_{C_R} |f(z)| |dz| = \int_{C_R} \frac{|e^{iz}|}{|z|} |dz| = \frac{1}{R} \int_{C_R} |e^{iz}| |dz| \leq \frac{\pi}{R},$$

så integralen längs den stora halvcirkeln C_R går mot noll då $R \rightarrow \infty$.

Det återstår att se vad som händer med integralen längs den lilla halvcirkeln C_ϵ då $\epsilon \rightarrow 0^+$. Eftersom f har enkelpol med residy $c_{-1} = 1$ i punkten $z_0 = 0$ kan vi skriva

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + g(z) = \frac{1}{z} + g(z)$$

i en punkterad omgivning till $z_0 = 0$ med någon funktion g som är analytisk i $z_0 = 0$. Om vi integrerar längs cirkelbågen C_ϵ , som kan parametriseras med $z = \epsilon e^{i\theta}$, $\theta: \pi \rightarrow 0$, får vi att

$$\int_{C_\epsilon} f(z) dz = \int_{C_\epsilon} \frac{dz}{z} + \int_{C_\epsilon} g(z) dz = \int_\pi^0 \frac{i\epsilon e^{i\theta} d\theta}{\epsilon e^{i\theta}} + \int_{C_\epsilon} g(z) dz = -i\pi + \int_{C_\epsilon} g(z) dz,$$

och här går $\int_{C_\epsilon} g(z) dz$ mot noll då $\epsilon \rightarrow 0^+$ eftersom g är kontinuerlig i $z_0 = 0$ och längden av C_ϵ går mot noll då $\epsilon \rightarrow 0^+$.

Genom att till sist låta $\epsilon \rightarrow 0^+$ och $R \rightarrow \infty$ i (*) får vi att $2iI - i\pi = 0$, d.v.s. att $I = \pi/2$. ▲

5.29. Exempel. Vi ska beräkna

$$I = \int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx$$

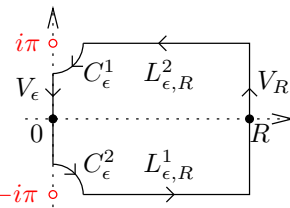
genom att integrera

$$f(z) = \frac{z^2}{e^z + 1},$$

vilket kanske är lite överraskande. Denna funktion är singular precis där $e^z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \log(-1) = i\pi + i2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Vi studerar konturen

$$\Gamma_{\epsilon,R} = L_{\epsilon,R}^1 + V_R + L_{\epsilon,R}^2 + C_\epsilon^1 + V_\epsilon + C_\epsilon^2$$

i figuren, som alltså är indragen med små kvartscirklar med radie ϵ kring singulariteterna $\pm i\pi$. f är analytisk på och innanför $\Gamma_{\epsilon,R}$, och därmed är $\int_{\Gamma_{\epsilon,R}} f(z) dz = 0$.



Vi parametriserar $L_{\epsilon,R}^1$ med $z = t - i\pi$, $t : \epsilon \rightarrow R$, och $L_{\epsilon,R}^2$ med $z = t + i\pi$, $t : R \rightarrow \epsilon$, och får, eftersom $e^{t \pm i\pi} = -e^t$, att

$$\int_{L_{\epsilon,R}^1} f(z) dz + \int_{L_{\epsilon,R}^2} f(z) dz = \int_{\epsilon}^R \frac{(t - i\pi)^2}{-e^t + 1} dt + \int_R^{\epsilon} \frac{(t + i\pi)^2}{-e^t + 1} dt = 4\pi i \int_{\epsilon}^R \frac{t}{e^t - 1} dt.$$

Vidare ger parametreringen $z = it$, $t : \pi - \epsilon \rightarrow -\pi + \epsilon$ av V_{ϵ} och det faktum att

$$f(it) = \frac{(it)^2}{e^{it} + 1} = \frac{(-t^2)e^{-it/2}}{e^{it/2} + e^{-it/2}} = -\frac{t^2(\cos(t/2) - i\sin(t/2))}{2\cos(t/2)} = -\frac{t^2}{2} + i\frac{t^2}{2}\tan\left(\frac{t}{2}\right)$$

att

$$\int_{V_{\epsilon}} f(z) dz = \int_{\pi-\epsilon}^{-\pi+\epsilon} f(it) i dt = \int_{-\pi+\epsilon}^{\pi-\epsilon} \frac{t^2}{2} \tan\left(\frac{t}{2}\right) dt + i \int_{-\pi+\epsilon}^{\pi-\epsilon} \frac{t^2}{2} dt.$$

På V_R är $|z^2| \leq R^2 + \pi^2$ och $|e^z + 1| \geq |e^z| - 1 = e^x - 1 = e^R - 1 > 0$, så ML-uppskattning ger att

$$\left| \int_{V_R} f(z) dz \right| \leq \frac{R^2 + \pi^2}{e^R - 1} \cdot 2\pi \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty.$$

Det återstår att undersöka vad som händer med $\int_{C_{\epsilon}^{1,2}} f(z) dz$ när $\epsilon \rightarrow 0^+$. Eftersom $e^z + 1$ har enkla nollställen i $z = \pm i\pi$ och $z^2 = -\pi^2 \neq 0$ i dessa punkter har f enkelpoler där, och

$$\operatorname{Res}_{z=\pm i\pi} f(z) = \frac{z^2}{\frac{d}{dz}(e^z + 1)} \Big|_{z=\pm i\pi} = \frac{z^2}{e^z} \Big|_{z=\pm i\pi} = \pi^2.$$

I en punkterad omgivning till $z = i\pi$ kan vi därför skriva $f(z) = \pi^2/(z - i\pi) + g_1(z)$, där g_1 är analytisk, så, med parametreringen $z = i\pi + \epsilon e^{i\theta}$, $\theta : 0 \rightarrow -\pi/2$, får vi att (jfr Exempel 5.28)

$$\int_{C_{\epsilon}^1} f(z) dz = \int_{C_{\epsilon}^1} \frac{\pi^2}{z - i\pi} dz + \int_{C_{\epsilon}^1} g_1(z) dz = -\frac{i\pi^3}{2} + \int_{C_{\epsilon}^1} g_1(z) dz,$$

där $\int_{C_{\epsilon}^1} g_1(z) dz \rightarrow 0$ då $\epsilon \rightarrow 0^+$. Helt analogt får vi att $\int_{C_{\epsilon}^2} f(z) dz = -i\pi^3/2 + \int_{C_{\epsilon}^2} g_2(z) dz$, där $\int_{C_{\epsilon}^2} g_2(z) dz \rightarrow 0$ då $\epsilon \rightarrow 0^+$.

Vi tar nu imaginärdelar i ekvationen $\int_{\Gamma_{\epsilon,R}} f(z) dz = 0$ och får då att

$$4\pi \int_{\epsilon}^R \frac{t}{e^t - 1} dt + \operatorname{Im} \int_{V_R} f(z) dz + \operatorname{Im} \int_{C_{\epsilon}^1} g_1(z) dz + \operatorname{Im} \int_{C_{\epsilon}^2} g_2(z) dz + \int_{-\pi+\epsilon}^{\pi-\epsilon} \frac{t^2}{2} dt - \pi^3 = 0.$$

Genom att låta $\epsilon \rightarrow 0^+$ och $R \rightarrow \infty$ i denna likhet får vi sambandet

$$4\pi I + 0 + 0 + 0 + 0 + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t^2}{2} dt - \pi^3 = 0, \quad \text{så} \quad I = \frac{\pi^3 - \pi^3/3}{4\pi} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Observera att vi på detta sätt inte behövde undersöka integralen $\int_{-\pi+\epsilon}^{\pi-\epsilon} (t^2/2) \tan(t/2) dt$ eller dess eventuella gränsvärde då $\epsilon \rightarrow 0^+$ över huvud taget, eftersom den helt enkelt försvann när vi tog imaginärdelar, och det gjorde vi innan vi lät $\epsilon \rightarrow 0^+$ och $R \rightarrow \infty$. (Det är dock lätt att se att just denna integral är noll eftersom integranden är udda.)

I Övning 5.18 studeras en närbesläktad integral, $\int_0^{\infty} (x^3/(e^x - 1)) dx$, som dyker upp i fysiken i samband med Plancks strålningslag. ▲

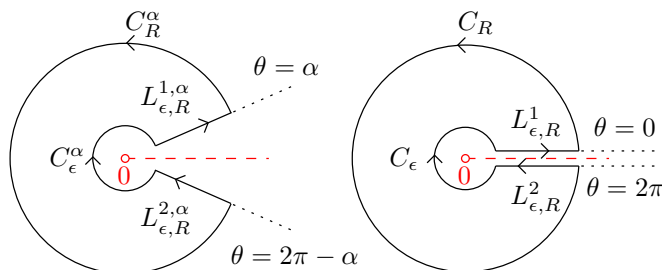
I Exempel 5.27 använde vi en gren till en flervärd funktion, nämligen grenen $\operatorname{Log} z$ till den flervärda funktionen $\log z$. I fallet med grenar till $\log z$ och $z^{\beta} = \exp(\beta \log z)$ måste vi typiskt undanta en stråle från origo för att få ett område där grenen är analytisk, jfr Exempel 2.6 på s. 22 (även om andra kurvor från origo också fungerar, jfr Exempel 2.7). Vår integrationskontur får inte nudda denna stråle – eller någon annan singularitet – för att vi ska kunna använda residysatsen.

I Exempel 5.27 kunde vi använda en indragen tårtbitskontur som höll sig undan från den borttagna strålen, tack vare att vi kunde utnyttja att $(e^{i\pi/2}t)^4 = t^4$. Om vi i stället försöker använda residykalkyl på t.ex. integralen $\int_0^\infty ((\ln x)/(x^2 + 2x + 2)) dx$, där vi inte kan utnyttja någon sådan symmetri, måste vi använda oss av en s.k. **nyckelhålskontur**, en teknik som vi nu ska beskriva.

Fixera ϵ och R . Antag att g är kontinuerlig på de båda cirklarna C_R och C_ϵ med radie R respektive ϵ och på en stympad cirkelsektor $\epsilon \leq |z| \leq R$, $|\operatorname{Arg} z| \leq \delta$ för något $\delta > 0$. Vi väljer grenen

$$\widetilde{\log z} = \ln |z| + i\theta(z), \quad 0 < \theta(z) < 2\pi,$$

till $\log z$, och kan integrera $g(z)\widetilde{\log z}$ längs konturen



$$\Gamma_{\epsilon,R}^\alpha = L_{\epsilon,R}^{1,\alpha} + C_R^\alpha + L_{\epsilon,R}^{2,\alpha} + C_\epsilon^\alpha,$$

den vänstra av de två i figuren ovan, för små $\alpha > 0$. Om g dessutom är analytisk på och innanför denna kontur förutom möjligen i ändligt många punkter kan vi använda oss av residysatsen.

Eftersom g är *likformigt* kontinuerlig på cirklarna C_R och C_ϵ och på den stympade cirkelsektorn kan man visa att $\int_{C_R^\alpha} g(z)\widetilde{\log z} dz \rightarrow \int_{C_R} g(z)\widetilde{\log z} dz$, att $\int_{C_\epsilon^\alpha} g(z)\widetilde{\log z} dz \rightarrow \int_{C_\epsilon} g(z)\widetilde{\log z} dz$, att

$$\int_{L_{\epsilon,R}^{1,\alpha}} g(z)\widetilde{\log z} dz = \int_\epsilon^R g(te^{i\alpha})(\ln t + i\alpha)e^{i\alpha} dt \rightarrow \int_\epsilon^R g(t)(\ln t + i0) dt$$

och att

$$\int_{L_{\epsilon,R}^{2,\alpha}} g(z)\widetilde{\log z} dz = \int_R^\epsilon g(te^{i(2\pi-\alpha)})(\ln t + i(2\pi-\alpha))e^{i(2\pi-\alpha)} dt \rightarrow \int_R^\epsilon g(t)(\ln t + i2\pi) dt$$

då $\alpha \rightarrow 0^+$. Integralerna i de två sista högerleden är precis vad man får om man parametriserar

$$\int_{L_{\epsilon,R}^1} g(z)\widetilde{\log z} dz \quad \text{respektive} \quad \int_{L_{\epsilon,R}^2} g(z)\widetilde{\log z} dz$$

och, formellt, låter $\theta(z) = 0$ på ovansidan $L_{\epsilon,R}^1$ och $\theta(z) = 2\pi$ på undersidan $L_{\epsilon,R}^2$.

Vi kommer i fortsättningen därför att integrera direkt på den s.k. nyckelhålskonturen

$$\Gamma_{\epsilon,R} = L_{\epsilon,R}^1 + C_R + L_{\epsilon,R}^2 + C_\epsilon,$$

den högra av de två i figuren ovan, och tänka oss denna kontur som ett gränsfall av konturerna $\Gamma_{\epsilon,R}^\alpha$ då $\alpha \rightarrow 0^+$.

Man kan alternativt, och utan hänvisning till likformig kontinuitet, bevisa det giltiga i att använda nyckelhålskonturen $\Gamma_{\epsilon,R}$ genom att studera *två* konturer och välja två olika grenar till $\log z$, se Övning 5.24.

5.30. Exempel (Nyckelhålskontur). Vi ska beräkna

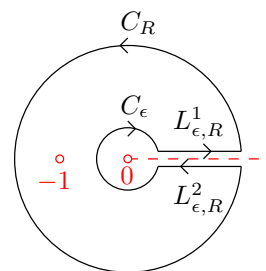
$$I(a) = \int_0^\infty \frac{x^a dx}{(x+1)^2}, \quad -1 < a < 1.$$

Vi definierar därför logaritmgrenen

$$\widetilde{\log z} = \ln |z| + i\theta(z), \quad 0 < \theta(z) < 2\pi,$$

och studerar motsvarande gren till $z^a/(z+1)^2$, alltså

$$f(z) = \frac{\widetilde{z^a}}{(z+1)^2} = \frac{\exp(a \widetilde{\log z})}{(z+1)^2} = \frac{|z|^a e^{ia\theta(z)}}{(z+1)^2},$$



som är analytisk förutom längs positiva realaxeln $[0, +\infty[$ och i punkten $z = -1$. Vi använder här nyckelhålskonturen

$$\Gamma_{\epsilon, R} = L_{\epsilon, R}^1 + C_R + L_{\epsilon, R}^2 + C_\epsilon, \quad 0 < \epsilon < 1 < R,$$

och låter $\theta(z) = 0$ på $L_{\epsilon, R}^1$ och $\theta(z) = 2\pi$ på $L_{\epsilon, R}^2$. Residysatsen (tillämpad på en modifierad kontur $\Gamma_{\epsilon, R}^\alpha$ med öppningsvinkel 2α , följt av gränsövergången $\alpha \rightarrow 0^+$) ger att

$$\begin{aligned} (*) \quad \int_{\Gamma_{\epsilon, R}} f(z) dz &= \int_{L_{\epsilon, R}^1 + C_R + L_{\epsilon, R}^2 + C_\epsilon} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-1} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{d}{dz} \exp(a \log z) \Big|_{z=-1} \\ &= 2\pi i \cdot \frac{a}{z} \cdot \exp(a \log z) \Big|_{z=-1} = 2\pi i \cdot \frac{a}{-1} \cdot |-1|^a e^{ia\theta(-1)} = -2\pi i a e^{ia\pi}. \end{aligned}$$

Vi parametriserar $L_{\epsilon, R}^1$ (där vi låter $\theta = 0$) med $z = t$, $t : \epsilon \rightarrow R$, och $L_{\epsilon, R}^2$ (där $\theta = 2\pi$) med $z = t$, $t : R \rightarrow \epsilon$, och får att

$$\int_{L_{\epsilon, R}^1} f(z) dz = \int_\epsilon^R \frac{t^a dt}{(t+1)^2} \quad \text{och} \quad \int_{L_{\epsilon, R}^2} f(z) dz = \int_R^\epsilon \frac{t^a e^{i2\pi a} dt}{(t+1)^2} = -e^{i2\pi a} \int_\epsilon^R \frac{t^a dt}{(t+1)^2}.$$

ML-uppskattningar ger, eftersom $-1 < a < 1$, att

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \frac{R^a}{(R-1)^2} \cdot 2\pi R \rightarrow 0 \quad \text{och} \quad \left| \int_{C_\epsilon} f(z) dz \right| \leq \frac{\epsilon^a}{(1-\epsilon)^2} \cdot 2\pi \epsilon \rightarrow 0$$

då $R \rightarrow \infty$ respektive $\epsilon \rightarrow 0^+$. Genom att låta $\epsilon \rightarrow 0^+$ och $R \rightarrow \infty$ i (*) får vi därför att

$$I(a) + 0 - e^{i2\pi a} I(a) + 0 = -2\pi i a e^{i\pi a}, \quad \text{så} \quad I(a) = \frac{2\pi i a e^{i\pi a}}{e^{i2\pi a} - 1} = \frac{\pi a}{\sin \pi a}$$

då $-1 < a < 1$ och $a \neq 0$; i det triviala fallet $a = 0$ blir $I(0) = \int_0^\infty dx/(x+1)^2 = 1$. ▲

★ ÖVNINGAR

- ★ **5.16** (a) Bestäm minsta möjliga vinkel $\alpha > 0$ som är sådan att $(te^{i\alpha})^5 = t^5$ för alla $t \geq 0$.
 (b) Använd en lämplig tårbitskontur med öppningsvinkel α från (a) för att visa att

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^5} = \frac{\pi/5}{\sin(\pi/5)} \quad (\text{jfr Exempel 5.17}).$$

- (c) Generalisera resultatet i (b) till $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^a} = \frac{\pi/a}{\sin(\pi/a)}$, $a > 1$.

Observera att du måste använda en *indragen* tårbitskontur i detta fall.

- ★ **5.17** Beräkna: (a) $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x} dx}{(x+1)^4}$ (med nyckelhålskontur) (b) $\int_0^\infty \frac{x^a dx}{x^2+1}$, $-1 < a < 1$

- ★ **5.18** Beräkna $\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$, t.ex. genom att göra som i Exempel 5.29 men med $f(z) = \frac{z^4}{e^z + 1}$.

Att $\int_0^\infty \frac{x dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}$, vilket visades där, får användas utan bevis.

(Integralen dyker upp i samband med *Plancks strålningslag* i fysiken.)

- ★ **5.19** Visa att

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1} dx = 0 \quad \text{och} \quad \int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{x^2+1} dx = \frac{\pi^3}{8}$$

genom att integrera en gren till $(\log z)^2/(z^2+1)$ längs randen till området $\epsilon < |z| < R$, $\operatorname{Im} z > 0$.

★ 5.20 Beräkna

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx \quad \text{och} \quad \int_0^\infty \sin(x^2) dx$$

genom att integrera $\exp(iz^2)$ över en tårtbit med öppningsvinkel $\pi/4$.

(Integralerna kallas *Fresnels integraler* och förekommer i optik.)

★ 5.21 Beräkna $\int_0^\infty \frac{x}{\sinh x} dx$ genom att integrera $\frac{z}{\sinh z}$ längs rektangeln med hörn $\pm R$ och $\pm R + i\pi$, men med små kringgående halvcirklar med radie ϵ vid 0 och $i\pi$.

★ 5.22 Beräkna $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ genom att integrera $\frac{\pi \cot \pi z}{z^2}$ över kvadrater med hörn $(N + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$.

★ 5.23 Antag att f har pol av ordning $N \geq 2$ i origo, och låt C_ϵ^v vara cirkelbågen $z = \epsilon e^{i\theta}$, där θ växer från 0 till v och där $\epsilon > 0$ och $0 < v < 2\pi$. Sätt vidare $I_\epsilon(v) = \int_{C_\epsilon^v} f(z) dz$ för tillräckligt små $\epsilon > 0$.

(a) Visa att $|I_\epsilon(v)| \rightarrow +\infty$ då $\epsilon \rightarrow 0^+$ om $N = 2$.

(b) Kan något liknande sägas, oberoende av v , om $N = 3$?

★ 5.24 Låt $\Gamma_{\epsilon,R}^+$ vara randen till området $\epsilon < |z| < R$, $\operatorname{Im} z > 0$, och låt $\Gamma_{\epsilon,R}^-$ vara randen till området $\epsilon < |z| < R$, $\operatorname{Im} z < 0$, båda orienterade moturs. Antag att g är analytisk på och innanför $\Gamma_{\epsilon,R}^+$ och $\Gamma_{\epsilon,R}^-$ förutom möjligen i ändligt många punkter innanför dessa konturer. Välj två lämpliga grenar till $\log z$, där vi undantar strålar som inte nuddar $\Gamma_{\epsilon,R}^+$ respektive $\Gamma_{\epsilon,R}^-$ i definitionsmängderna, och rättfärdiga att vi får integrera direkt på nyckelhålskonturen $\Gamma_{\epsilon,R}$ och där låta $\theta = 0$ på ovansidan av positiva realaxeln och $\theta = 2\pi$ på undersidan. (Om g skulle råka ha en singularitet på negativa realaxeln, hur kan man då modifiera resonemanget?)

5.6 *Beräkning av vissa summor

Vi ska i detta avsnitt se hur man kan beräkna en del summor m.h.a. residykalkyl, närmare bestämt vissa summor av typen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$$

där f är en funktion som är analytisk i $\mathbb{C}$ förutom att den får ha isolerade singulariteter. Det vi med nedanstående teknik kommer att kunna beräkna är normalt det symmetriska gränsvärdet

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N f(n),$$

det s.k. principalvärdet av $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$, och som för integraler gäller följande implikation:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \text{ är konvergent} \quad \implies \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N f(n).$$

Ett enkelt exempel på en divergent serie med ändligt principalvärde är $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n$.

Precis som i Avsnitt 5.3 om integration av rationella funktioner och i Avsnitt 5.4 om Fourierintegraler kan man visa att om $f = p/q$, där p och q är polynom och $q(n) \neq 0$ för alla $n \in \mathbb{Z}$, så är det sant att

$$\operatorname{grad} q \geq 2 + \operatorname{grad} p \quad \implies \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{p(n)}{q(n)} \text{ är konvergent,}$$

och, när vi i stället summerar termer av typen $e^{ian} f(n)$ för fixt $a \in \mathbb{R}$, att

$$e^{ia} \neq 1, a \text{ reellt} \quad \text{och} \quad \text{grad } q \geq 1 + \text{grad } p \quad \implies \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{p(n)}{q(n)} e^{ian} \quad \text{är konvergent,}$$

se Övning 5.25; i dessa fall är summorna således lika med sina principalvärden. Notera att $e^{ia} = 1$ precis då a är en heltalsmultipel av 2π .

Låt i fortsättningen K_N vara kvadraterna – alltså själva kurvorna – med hörn $(N+1/2)(\pm 1 \pm i)$, $N = 0, 1, 2, \dots$, orienterade moturs, se figur nedan. För att beräkna $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$ är idén att integrera funktionen

$$g := f \cdot C, \quad \text{där} \quad C(z) = \pi \cot \pi z = \frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z},$$

längs kvadraterna K_N och låta $N \rightarrow \infty$. Att detta är användbart beror på följande resultat:

5.31. Hjälpssats. Låt C och K_N vara som ovan. Då gäller följande:

- (a) C är analytisk förutom i alla heltalspunkter $0, \pm 1, \pm 2, \dots$, och där har C enkelpoler.
- (b) Om $n \in \mathbb{Z}$ och f är analytisk i n , så är $\text{Res}_{z=n} f(z)C(z) = f(n)$.
- (c) $|C(z)| \leq \frac{\pi}{\tanh(\pi/2)}$ då $z \in K_N$, $N \in \mathbb{N}$.

Bevis. Vi ser att C är singulär precis där $\sin \pi z = 0$, d.v.s. där $z = n \in \mathbb{Z}$; i dessa punkter är $\cos \pi z = \cos \pi n = (-1)^n \neq 0$, och eftersom $\sin \pi z$ har enkla nollställen där har C enkelpoler där. Vidare, om f är analytisk i n får vi att

$$\text{Res}_{z=n} f(z)C(z) = \frac{f(z) \cdot \pi \cos \pi z}{\frac{d}{dz}(\sin \pi z)} \Big|_{z=n} = \frac{f(n) \cdot \pi \cos \pi n}{\pi \cos \pi n} = f(n).$$

Vad gäller olikheten noterar vi först att C är en udda funktion, så det räcker att undersöka $|C|$ på den högra delen L_N^1 och den övre delen L_N^2 av kvadraten K_N , se figur. På L_N^1 är

$$\cos \pi z = \cos(N\pi + \pi/2 + i\pi y) = -i(-1)^N \sinh \pi y$$

och

$$\sin \pi z = \sin(N\pi + \pi/2 + i\pi y) = (-1)^N \cosh \pi y,$$

varför

$$|C(z)| = \pi |\tanh \pi y| < \pi, \quad z \in L_N^1.$$

På L_N^2 kan vi utnyttja de samband som härleddes i Övning 2.22 på s. 37 och få att

$$|\cos \pi z|^2 = \cos^2 \pi x + \sinh^2 \pi y \leq 1 + \sinh^2 \pi y = \cosh^2 \pi y$$

och

$$|\sin \pi z|^2 = \sin^2 \pi x + \sinh^2 \pi y \geq \sinh^2 \pi y,$$

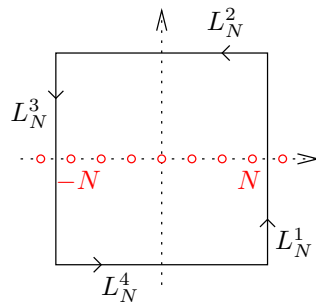
varför

$$|C(z)| \leq \frac{\pi}{\tanh \pi y} = \frac{\pi}{\tanh(N\pi + \pi/2)} \leq \frac{\pi}{\tanh(\pi/2)}, \quad z \in L_N^2,$$

då ju $\tanh$ är växande och positiv på $]0, +\infty[$. Påståendet följer nu av att $\tanh(\pi/2) < 1$. ■

5.32. Exempel. Vi ska beräkna summan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n), \quad \text{där} \quad f(z) = \frac{1}{1+z^2},$$

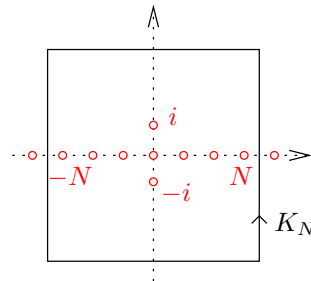


och integrerar därför funktionen $g(z) = f(z)C(z)$ längs K_N . På och innanför K_N är g analytisk förutom i punkterna $0, \pm 1, \dots, \pm N$ (där C är singulär) och i punkterna $\pm i$ (där f är singulär) om $N \geq 1$. Elementär residyberäkning ger att

$$\operatorname{Res}_{z=\pm i} g(z) = \frac{C(z)}{\frac{d}{dz}(1+z^2)} \Big|_{z=\pm i} = \frac{C(\pm i)}{\pm 2i} = -\frac{\pi \coth \pi}{2},$$

så residysatsen och Hjälpssats 5.31 (b) medför att

$$\begin{aligned} (*) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{K_N} g(z) dz &= \sum_{n=-N}^N \operatorname{Res}_{z=n} g(z) + \operatorname{Res}_{z=i} g(z) + \operatorname{Res}_{z=-i} g(z) \\ &= \sum_{n=-N}^N f(n) - \pi \coth \pi, \quad N \geq 1. \end{aligned}$$



Eftersom $|z| \geq N + 1/2$ och därmed $|z^2 + 1| \geq |z|^2 - 1 \geq (N + 1/2)^2 - 1 > 0$ på K_N om $N \geq 1$, och längden av K_N är $4(2N + 1)$, ger ML-uppskattning m.h.a. Hjälpssats 5.31 (c) nu att

$$\left| \int_{K_N} g(z) dz \right| = \left| \int_{K_N} \frac{C(z)}{1+z^2} dz \right| \leq \frac{\pi/\tanh(\pi/2)}{(N+1/2)^2 - 1} \cdot 4(2N+1) \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Genom att låta $N \rightarrow \infty$ i (*) får vi därför att

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \pi \coth \pi = \pi \frac{e^{2\pi} + 1}{e^{2\pi} - 1}.$$

▲

5.33. Exempel. Vi ska också beräkna den populära summan

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n), \quad \text{där } f(z) = \frac{1}{z^2},$$

och integrerar återigen $g(z) = C(z)f(z)$ längs K_N . Innanför K_N är g singulär i origo (trippelpol, ty C har enkelpol och f dubbelpol där) och i punkterna $\pm 1, \dots, \pm N$ (enkelpoler); figuren i beviset av Hjälpssats 5.31 visar således singulariteterna även för g i detta fall. Residysatsen ger nu att

$$(*) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{K_N} g(z) dz = \sum_{n=-N}^{-1} f(n) + \operatorname{Res}_{z=0} g(z) + \sum_{n=1}^N f(n), \quad N \in \mathbb{N},$$

där residyn i origo kan beräknas m.h.a. ansatsen

$$g(z) = \frac{\pi \cos \pi z}{z^2 \sin \pi z} = \frac{a}{z^3} + \frac{b}{z} + \mathcal{O}(z), \quad \text{där } b = \operatorname{Res}_{z=0} g(z),$$

jfr Exempel 5.8; notera att g är udda, så endast termer med udda gradtal behövs i ansatsen. Standardutvecklingarna $\cos \pi z = 1 - (\pi z)^2/2 + \mathcal{O}(z^4)$ och $\sin \pi z = \pi z - (\pi z)^3/6 + \mathcal{O}(z^5)$ ger nu, efter multiplikation med $\sin \pi z$ och identifiering av koefficienterna, att $a = 1$ och $b = -\pi^2/3$.

Eftersom $f(n) = 1/n^2 = f(-n)$ kan sambandet (*) ovan nu skrivas

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{K_N} g(z) dz = 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} - \frac{\pi^2}{3}, \quad \text{varför} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

ty ML-uppskattning ger att

$$\left| \int_{K_N} g(z) dz \right| = \left| \int_{K_N} \frac{C(z)}{z^2} dz \right| \leq \frac{\pi/\tanh(\pi/2)}{(N+1/2)^2} \cdot 4(2N+1) \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

▲

Idén ovan kan generaliseras till summor av typen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ian} f(n), \quad a \in \mathbb{R}, \quad \text{speciellt till} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n),$$

genom att i stället för funktionen C ovan använda C_a , där

$$C_a(z) = \frac{\pi e^{i(a-\pi)z}}{\sin \pi z}, \quad 0 \leq a \leq 2\pi;$$

summan $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n)$ fås när $a = \pi$. Med ett bevis som starkt påminner om beviset av Hjälpssats 5.31 kan man visa att C_a har enkelpoler i heltalspunkterna, att $\text{Res}_{z=n} f(z)C_a(z) = e^{ian} f(n)$ om f är analytisk i $n \in \mathbb{Z}$, och att C_a uppfyller olikheten

$$|C_a(z)| \leq \frac{2\pi}{1 - e^{-\pi}}, \quad z \in K_N, \quad N \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq a \leq 2\pi.$$

Vi integrerar sedan $g := f \cdot C_a$ längs kvadraterna K_N .

Via Eulers formler – eller rent av genom tagande av real- och imaginärdelar om $f(n) \in \mathbb{R}$ för alla $n \in \mathbb{Z}$ – kan vi med denna metod även beräkna summor av typen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \cos na \quad \text{och} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \sin na, \quad a \in \mathbb{R}.$$

5.34. Exempel. Låt

$$h(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos na}{n^2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Eftersom $|\cos na| \leq 1$ då $a \in \mathbb{R}$ och $n \in \mathbb{Z}$, och $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ är konvergent, ser vi att serien ovan är absolutkonvergent. Vidare, eftersom cosinus har period 2π ser vi också att $h(a+2\pi) = h(a)$, d.v.s. att h har period 2π ; det räcker således att beräkna $h(a)$ för $0 \leq a \leq 2\pi$ för att bestämma $h(a)$ för alla reella a .

M.h.a. Eulers formel och det faktum att $(-n)^2 = n^2$ får vi att

$$h(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{ian} + e^{-ian}}{2n^2} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{ian}}{2n^2} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} e^{ian} f(n), \quad \text{där} \quad f(z) = \frac{1}{z^2}.$$

Fixera $a \in [0, 2\pi]$, låt

$$g(z) = f(z) \cdot C_a(z) = \frac{\pi e^{i(a-\pi)z}}{z^2 \sin \pi z},$$

och integrera g längs kvadraterna K_N . Residysatsen ger att

$$(*) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{K_N} g(z) dz = \sum_{n=-N}^{-1} e^{ian} f(n) + \text{Res}_{z=0} g(z) + \sum_{n=1}^N e^{ian} f(n), \quad N \in \mathbb{N},$$

och, t.ex. med en kort ansats $g(z) = A/z^3 + B/z^2 + C/z + \mathcal{O}(1)$, standardutvecklingar och identifiering av koefficienter, får vi att $\text{Res}_{z=0} g(z) = \pi^2/6 - (a-\pi)^2/2$. Sambandet (*) ovan kan således skrivas

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{K_N} g(z) dz = 2 \sum_{n=1}^N \frac{\cos na}{n^2} + \frac{\pi^2}{6} - \frac{(a-\pi)^2}{2}, \quad N \in \mathbb{N},$$

och ML-uppskattning ger nu, eftersom $0 \leq a \leq 2\pi$, att

$$\left| \int_{K_N} g(z) dz \right| = \left| \int_{K_N} \frac{C_a(z)}{z^2} dz \right| \leq \frac{2\pi/(1-e^{-\pi})}{(N+1/2)^2} \cdot 4(2N+1) \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Genom att låta $N \rightarrow \infty$ får vi således att

$$h(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos na}{n^2} = \frac{(a-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}, \quad 0 \leq a \leq 2\pi,$$

och eftersom vänsterledet alltså har period 2π har vi därmed beräknat $h(a)$ för alla reella a . Vi ser t.ex. att $h(0) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$, en summa vi redan har räknat ut, men också t.ex. att

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = -h(\pi) = \frac{\pi^2}{12}.$$

(Alternativ: Den sista summan $= \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} 1/(2n)^2 = (1/2) \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/12$.) ▲

5.35. Anmärkning (Fourierserier). Med variabelbytet från a till t via $a = \pi + 2\pi t$ kan formeln för $h(a)$ i föregående exempel skrivas i formen

$$t^2 = \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n\pi)^2} \cos 2n\pi t = \frac{1}{12} - \frac{\cos 2\pi t}{\pi^2} + \frac{\cos 4\pi t}{(2\pi)^2} - \frac{\cos 6\pi t}{(3\pi)^2} + \dots, \quad -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}.$$

Funktionen $t \mapsto t^2$ kan således i intervallet $[-1/2, 1/2]$ skrivas som en konvergent serie i vilken termerna är cosinussvängningar med allt högre frekvenser och allt mindre amplituder.

Serien är ett exempel på en s.k. Fourierserie, och sådana studeras i detalj i kursen TATA77 Fourieranalys. ▲

I ovanstående exempel har vi studerat serier av typen $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (p(n)/q(n)) e^{ian}$ där gradskillnaden mellan täljare och nämnare var (minst) två, och då har våra ML-uppskattningar fungerat bra. Precis som för Fourierintegraler behöver vi något bättre – en motsvarighet till Jordans lemma (Hjälpsats 5.22) – för att kunna tackla sådana serier när gradskillnaden endast är ett.

5.36. Hjälpsats (En Jordanliknande uppskattning). Det finns en konstant A , oberoende av N och a , sådan att

$$\int_{K_N} |C_a(z)| |dz| \leq \frac{A}{\pi - |a - \pi|}, \quad N \in \mathbb{N}, \quad 0 < a < 2\pi.$$

Beviskiss. Sätt $b = a - \pi$; då är $-\pi < b < \pi$, och

$$|C_a(z)| = \left| \frac{\pi e^{ibz}}{\sin \pi z} \right| = \frac{\pi e^{-by}}{\sqrt{\sin^2 \pi x + \sinh^2 \pi y}}.$$

Låt L_N^1 , L_N^2 , L_N^3 och L_N^4 vara den högra, övre, vänstra respektive undre sidan i kvadraten K_N , se figuren i beviset av Hjälpsats 5.31. Sätt $d_N = N + 1/2$. Parametriseringar och enkla uppskattningar ger att

$$\int_{L_N^1} |C_a(z)| |dz| + \int_{L_N^3} |C_a(z)| |dz| = \int_{-d_N}^{d_N} \frac{2\pi e^{-bt}}{\cosh \pi t} dt \leq \int_0^{d_N} 8\pi e^{(|b|-\pi)t} dt \leq \frac{8\pi}{\pi - |b|}$$

och

$$\begin{aligned} \int_{L_N^2} |C_a(z)| |dz| + \int_{L_N^4} |C_a(z)| |dz| &= \int_{-d_N}^{d_N} \frac{2\pi \cosh bd_N}{\sqrt{\sin^2 \pi t + \sinh^2 \pi d_N}} dt \leq \frac{2\pi \cosh bd_N}{\sinh \pi d_N} \cdot 2d_N \\ &\leq \frac{8\pi d_N}{1 - e^{-\pi}} \cdot e^{(|b|-\pi)d_N} \leq \frac{8\pi/(e(1 - e^{-\pi}))}{\pi - |b|}, \end{aligned}$$

så $A = 8\pi + 8\pi/(e(1 - e^{-\pi}))$ är en konstant som duger. ■

5.37. Exempel. M.h.a. Hjälpssats 5.36 kan man med sedvanlig teknik visa att

$$h(a) := \sum_{n \neq 0} \frac{e^{ina}}{n} = i(\pi - a), \quad 0 < a < 2\pi.$$

Eftersom vänsterledet har period 2π har vi därmed beräknat $h(a)$ för alla reella a förutom heltalsmultiplerna av 2π ; i dessa undantagspunkter får vi serien $\sum_{n \neq 0} 1/n$ som är divergent men har principalvärdet 0.

Om vi tar imaginärdelar och använder att sinus är udda får vi följande samband:

$$\varphi(a) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n} = \frac{\pi - a}{2}, \quad 0 < a < 2\pi,$$

och om vi t.ex. stoppar in $a = \pi/2$ här får vi att

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Notera att serien för $\varphi(a)$ faktiskt är konvergent, med summa 0, om $a = 0$ eller $a = 2\pi$, men att $\varphi(a) \neq (\pi - a)/2$ för dessa a . ▲

5.38. Anmärkning (En Fourierserie till). Med samma variabelbyte som i Anmärkning 5.35 kan formeln för $\varphi(a)$ i föregående exempel skrivas i formen

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin 2n\pi t = \frac{\sin 2\pi t}{\pi} - \frac{\sin 4\pi t}{2\pi} + \frac{\sin 6\pi t}{3\pi} - \frac{\sin 8\pi t}{4\pi} + \dots, \quad -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2},$$

och detta är ytterligare ett exempel på en Fourierserie. ▲

Vi avslutar med serieutvecklingar för några intressanta periodiska funktioner, nämligen de tidigare diskuterade $C(z) = \pi \cot \pi z$ och $C_\pi(z) = \pi/\sin \pi z$, samt $-C'(z) = (\pi/\sin \pi z)^2$:

5.39. Följsats (Några periodiska funktioner). Om $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gäller följande samband:

$$\pi \cot \pi z = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{1}{z-n}, \quad \frac{\pi}{\sin \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z-n}, \quad \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

Dessa identiteter kan bevisas genom att, för fixt $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, använda $f(s) := 1/(z-s) + 1/(z+s)$ och $C(s)$ i vår metod ovan för den första identiteten; $f(s) := 1/(z-s)$ och $C_\pi(s)$ för den andra; respektive $f(s) := 1/(z-s)^2$ och $C(s)$ för den tredje.

Högerledet i sambandet för $\pi \cot \pi z$ kan faktiskt inte skrivas $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 1/(z-n)$, eftersom denna dubbelsidiga serie är divergent; serien $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n/(z-n)$ för $\pi/\sin \pi z$ är däremot konvergent, men inte absolutkonvergent; och serien $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 1/(z-n)^2$ för $(\pi/\sin \pi z)^2$ är absolutkonvergent. Vi kan emellertid skriva om de två första sambanden till

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \quad \text{respektive} \quad \frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2},$$

och dessa båda serier är absolutkonvergenta (för fixt $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$).

5.40. Anmärkning (En lömsk likhet). I normalfallet är ju $(\sum a_n)^2 \neq \sum a_n^2$, och som ett enkelt exempel på det kan vi ta $a_n = (1/2)^n$ för $n = 0, 1, 2, \dots$ och få, med geometriska serier, att

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right)^2 = \left(\frac{1}{1-1/2}\right)^2 = 4 \neq \frac{4}{3} = \frac{1}{1-(1/2)^2} = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \dots$$

Dock ser vi med våra utvecklingar i Följsats 5.39 att med $a_n = (-1)^n/(z-n)$ för fixt $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ är det faktiskt sant att $(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n)^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^2$, vilket är synnerligen anmärkningsvärt. Om vi t.ex. stoppar in $z = 1/4$ och skriver om lite – med försiktighet, eftersom $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ som sagt inte är absolutkonvergent – får vi att

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots = \frac{\pi}{\sqrt{8}}$$

samtidigt som

$$1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{7}\right)^2 + \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \left(\frac{1}{11}\right)^2 + \left(\frac{1}{13}\right)^2 + \left(\frac{1}{15}\right)^2 + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Detta bör man nog inte visa för nybörjare på serier! ▲

★ ÖVNINGAR

★ 5.25 Låt p och q vara polynom och antag att $q(n) \neq 0$ för alla $n \in \mathbb{Z}$. Visa att

(a) $\text{grad } q \geq 2 + \text{grad } p \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{p(n)}{q(n)}$ är absolutkonvergent

(b) $\text{grad } q \geq 1 + \text{grad } p$ och $|z| = 1, z \neq 1 \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{p(n)}{q(n)} z^n$ är konvergent

Ledning: Det räcker att visa påståendena för summor $\sum_{n=1}^{\infty}$ och, genom utbrytning av konstanter, för polynom p och q med högstgradskoefficienter 1.

P.g.a. (a) räcker det att bevisa (b) i specialfallet när $\text{grad } q = 1 + \text{grad } p$. Man kan använda att $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ är konvergent för aktuella z (se Övning 4.12 på s. 70 eller diskussionen efter Sats 4.67 på s. 95) och att $p(n)/q(n) - 1/n = \tilde{p}(n)/\tilde{q}(n)$ för polynom $\tilde{p}$ och $\tilde{q}$ för vilka $\text{grad } \tilde{q} \geq 2 + \text{grad } \tilde{p}$.

I båda fallen är därmed $\sum_{n=-\infty}^{\infty} = \text{PV } \sum_{n=-\infty}^{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N$.

★ 5.26 Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

★ 5.27 Beräkna (a) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ina}}{n^2 - 2i}, 0 \leq a \leq 2\pi$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^4 + 4}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^4 + 4}$

5.7 *Något om Γ - och ζ -funktionerna

I detta avsnitt låter vi

$$t^z = \exp(z \ln t), \quad z \in \mathbb{C}, t > 0,$$

och t^z är nu därför en *envärd* funktion (normalt är ju symbolen t^z flervärd, se Avsnitt 2.3). Det är lätt att se att för godtyckliga $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ och $t, t_1, t_2 > 0$ är, med denna definition av t^z ,

$$|t^z| = t^x, \quad \left(\frac{1}{t}\right)^z = t^{-z}, \quad t^{z_1+z_2} = t^{z_1} t^{z_2}, \quad (t_1 t_2)^z = t_1^z t_2^z, \quad \frac{d}{dt}(t^z) = z t^{z-1}, \quad \frac{d}{dz}(t^z) = t^z \ln t.$$

5.41. Definition.

$$\Pi(z) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt, \quad \text{Re } z > -1,$$

$$\Gamma(z) = \Pi(z-1) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \text{Re } z > 0,$$

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \quad \text{Re } z > 1.$$

Med metoder från reell envariabelanalys kan man visa att integralen $\int_0^\infty t^x e^{-t} dt$ är konvergent om $x > -1$ och att serien $\sum_{n=1}^\infty 1/n^x$ är konvergent om $x > 1$. Integralerna som definierar $\Pi(z)$ och $\Gamma(z)$, och serien som definierar $\zeta(z)$, är alltså absolutkonvergenta för aktuella z , så funktionerna ovan är väldefinierade i sina respektive områden.

5.42. Proposition (Elementära egenskaper).

- (a) $\Pi(0) = 1$; $\Pi(z+1) = (z+1)\Pi(z)$ då $\operatorname{Re} z > -1$; $\Pi(n) = n!$ då $n \in \mathbb{N}$.
- (b) $\Gamma(1) = 1$; $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ då $\operatorname{Re} z > 0$; $\Gamma(n+1) = n!$ då $n \in \mathbb{N}$.
- (c) Π , Γ och ζ är analytiska i sina respektive definitionsområden.

Π kan man alltså se som en analytisk version av fakultetsfunktionen (även om man kan tänka sig andra, se Anmärkning 5.53). Normalt är det Γ man studerar – en av de viktigaste s.k. speciella funktionerna – men vi kommer här att ta upp Π och Γ parallellt eftersom Π ibland är något enklare eller naturligare att hantera.

ζ är av stort intresse i talteorin, och Sats 5.45 nedan är en försmak av detta.

5.43. Exempel. Direkt från definitionen får vi, med variabelbytet $r = t^{1/2}$, att

$$\Gamma(1/2) = \Pi(-1/2) = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt = \int_0^\infty 2e^{-r^2} dr = \sqrt{\pi},$$

där vi, som i Exempel 5.26, har använt att $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. ▲

För att bevisa att funktionerna är analytiska använder vi följande uppskattning:

5.44. Hjälpsats. Om $\delta > 0$, så är

$$\left| \frac{t^{\Delta z} - 1}{\Delta z} - \ln t \right| \leq \frac{|\Delta z|}{2} \cdot (\ln t)^2 \cdot (t^\delta + t^{-\delta}), \quad t > 0, \quad 0 < |\Delta z| < \delta.$$

Bevis. Fixera $t > 0$ och sätt $f(z) = t^z$. Då är f hel analytisk, och Maclaurinutveckling av f till ordning 1 ger, eftersom $f'(z) = t^z \ln t$ och $f''(z) = t^z (\ln t)^2$ och därmed $f(0) = 1$ och $f'(0) = \ln t$, att

$$t^z = f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{\varphi_2(z)}{2!} z^2 = 1 + (\ln t)z + \frac{\varphi_2(z)}{2} z^2,$$

se Anmärkning 4.23 på s. 73, där $\varphi_2(z)$ är given som en integral. Det viktiga här är att

$$|\varphi_2(z)| \leq \max_{[0,z]} |f''| = (\ln t)^2 \max_{s \in [0,z]} |t^s|,$$

och när s ligger på sträckan $[0, z]$ får vi att

$$|t^s| = t^{\operatorname{Re} s} = \exp((\operatorname{Re} s) \ln t) \leq \exp(|(\operatorname{Re} s) \ln t|) \leq \exp(|s| |\ln t|) \leq \exp(|z| |\ln t|)$$

och därmed att

$$|t^z - (1 + z \ln t)| \leq \frac{|z|^2}{2} (\ln t)^2 \exp(|z| |\ln t|).$$

Om $0 < |\Delta z| < \delta$ får vi därför, med Δz i stället för z i uttrycket ovan, att

$$\left| \frac{t^{\Delta z} - 1}{\Delta z} - \ln t \right| \leq \frac{|\Delta z|}{2} (\ln t)^2 \exp(\delta |\ln t|) \leq \frac{|\Delta z|}{2} \cdot (\ln t)^2 \cdot (t^\delta + t^{-\delta}),$$

där den sista olikheten beror på att $\exp(\delta |\ln t|) = t^\delta$ om $t \geq 1$ men $= t^{-\delta}$ om $0 < t \leq 1$. ■

Bevis av Proposition 5.42. (a) Trivialt är $\Pi(0) = \int_0^\infty e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^\infty = 1$. Om $\operatorname{Re} z > -1$ ger partialintegration att

$$\Pi(z+1) = \int_0^\infty t^{z+1} e^{-t} dt = [t^{z+1}(-e^{-t})]_0^\infty - \int_0^\infty (z+1)t^z(-e^{-t}) dt = (z+1)\Pi(z);$$

notera att de inblandade integralerna är absolutkonvergenta och att den utintegrerade biten är 0 eftersom $\operatorname{Re}(z+1) > 0$. Upprepad användning av denna identitet ger nu att $\Pi(n) = n!$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) är samma sak som (a).

(c) återstår. Vi noterar först att även integralerna $\int_0^\infty t^x e^{-t} |\ln t| dt$ och $\int_0^\infty t^x e^{-t} (\ln t)^2 dt$ är konvergenta om $x > -1$, liksom serierna $\sum_{n=1}^\infty (\ln n)/n^x$ och $\sum_{n=1}^\infty (\ln n)^2/n^x$ om $x > 1$.

Sätt $\pi(z) = \int_0^\infty t^z e^{-t} \ln t dt$ då $\operatorname{Re} z > -1$ och $\sigma(z) = \sum_{n=1}^\infty (\ln(1/n))/n^z$ då $\operatorname{Re} z > 1$; även dessa är alltså (absolut)konvergenta i sina respektive områden.

Vi börjar med att visa att $\Pi'(z) = \pi(z)$. Fixera z med $x = \operatorname{Re} z > -1$, och välj sedan $\delta > 0$ så litet att $x - \delta > -1$. Hjälpsats 5.44 medför att

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Pi(z + \Delta z) - \Pi(z)}{\Delta z} - \pi(z) \right| &= \left| \int_0^\infty \left(\frac{t^{\Delta z} - 1}{\Delta z} - \ln t \right) t^z e^{-t} dt \right| \leq \int_0^\infty \left| \frac{t^{\Delta z} - 1}{\Delta z} - \ln t \right| t^x e^{-t} dt \\ &\leq \frac{|\Delta z|}{2} \int_0^\infty (t^{x+\delta} + t^{x-\delta}) e^{-t} (\ln t)^2 dt, \quad 0 < |\Delta z| < \delta. \end{aligned}$$

Eftersom $x \pm \delta > -1$ är den sista integralen konvergent och oberoende av Δz , så vi får likheten $\Pi'(z) = \pi(z)$ när $\Delta z \rightarrow 0$.

Beviset för att $\zeta'(z) = \sigma(z)$ är snarlikt: Fixera z med $x = \operatorname{Re} z > 1$, och välj sedan $\delta > 0$ så litet att $x - \delta > 1$. Hjälpsats 5.44 med $1/n$ i stället för t ger att

$$\begin{aligned} \left| \frac{\zeta(z + \Delta z) - \zeta(z)}{\Delta z} - \sigma(z) \right| &= \left| \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{(1/n)^{\Delta z} - 1}{\Delta z} - \ln \frac{1}{n} \right) \frac{1}{n^z} \right| \leq \sum_{n=1}^\infty \left| \frac{(1/n)^{\Delta z} - 1}{\Delta z} - \ln \frac{1}{n} \right| \frac{1}{n^x} \\ &\leq \frac{|\Delta z|}{2} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n^{x+\delta}} + \frac{1}{n^{x-\delta}} \right) (\ln n)^2, \quad 0 < |\Delta z| < \delta. \end{aligned}$$

Eftersom $x \pm \delta > 1$ är den sista serien konvergent och oberoende av Δz , så vi får likheten $\zeta'(z) = \sigma(z)$ när $\Delta z \rightarrow 0$. ■

Det stora intresset för ζ -funktionen kommer sig av att den kopplar ihop teorin för primtal med teorin för analytiska funktioner. Grunden är följande enkla men viktiga resultat:

5.45. Sats. Låt $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, \dots\} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ vara mängden av primtal. Då är

$$\zeta(z) \cdot \lim_{K \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^K \left(1 - \frac{1}{p_k^z} \right) = 1, \quad \operatorname{Re} z > 1.$$

Bevis. Fixera z med $\operatorname{Re} z > 1$. Vi noterar först att det faktum att

$$\zeta(z) = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \frac{1}{5^z} + \frac{1}{6^z} + \frac{1}{7^z} + \frac{1}{8^z} + \frac{1}{9^z} + \dots$$

och att $2^z \cdot n^z = (2n)^z$ för $n = 1, 2, 3, \dots$ medför att

$$\begin{aligned} \zeta(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{2^z} \right) &= \left(1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \dots \right) - \left(\frac{1}{2^z} + \frac{1}{4^z} + \frac{1}{6^z} + \frac{1}{8^z} + \dots \right) \\ &= 1 + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{5^z} + \frac{1}{7^z} + \frac{1}{9^z} + \frac{1}{11^z} + \frac{1}{13^z} + \frac{1}{15^z} + \frac{1}{17^z} + \dots, \end{aligned}$$

d.v.s. summan av alla $1/n^z$ sådana att 2 inte är en faktor i n . I nästa steg får vi att

$$\begin{aligned}\zeta(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{2^z}\right) \left(1 - \frac{1}{3^z}\right) &= \left(1 + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{5^z} + \frac{1}{7^z} + \dots\right) - \left(\frac{1}{3^z} + \frac{1}{9^z} + \frac{1}{15^z} + \frac{1}{21^z} + \dots\right) \\ &= 1 + \frac{1}{5^z} + \frac{1}{7^z} + \frac{1}{11^z} + \frac{1}{13^z} + \frac{1}{17^z} + \frac{1}{19^z} + \frac{1}{23^z} + \frac{1}{25^z} + \dots,\end{aligned}$$

d.v.s. summan av alla $1/n^z$ sådana att varken 2 eller 3 är en faktor i n . Efter K steg får vi att

$$\zeta(z) \cdot \prod_{k=1}^K \left(1 - \frac{1}{p_k^z}\right) = 1 + \sum_{n \in I_K} \frac{1}{n^z},$$

där I_K är mängden av alla positiva heltal ≥ 2 som inte är delbara med något enda av de K första primtalen $p_1, \dots, p_K$. Eftersom $I_K \subseteq \{K+1, K+2, K+3, \dots\}$ och $x = \operatorname{Re} z > 1$ får vi att

$$\left| \sum_{n \in I_K} \frac{1}{n^z} \right| \leq \sum_{n \in I_K} \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n=K+1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \leq \int_K^{\infty} \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{(x-1)K^{x-1}} \rightarrow 0, \quad K \rightarrow \infty.$$

Påståendet följer. ■

Vi ska nu visa att vi kan utvidga Π , Γ och ζ till funktioner $\tilde{\Pi}$, $\tilde{\Gamma}$ respektive $\tilde{\zeta}$ som är analytiska i hela planet förutom att de kommer att ha vissa enkelpoler.

5.46. Anmärkning (Om beteckningar). Man brukar oftast beteckna även utvidgningarna med Π , Γ respektive ζ . I denna introduktion väljer vi dock, för tydlighets skull, att hålla isär ursprungsfunktionerna – som ges av de konvergenta integralerna/serierna i Definition 5.41 – och deras utvidgningar – som inte gör det i de respektive områdenas nya delar. ▲

Vi börjar med att hitta utvidgningarna till Π och Γ . Definiera

$$\tilde{\Pi}(z) = \begin{cases} \Pi(z), & \text{om } \operatorname{Re} z > -1, \\ \frac{\tilde{\Pi}(z+1)}{z+1}, & \text{annars,} \end{cases} \quad \text{samtidigt därefter} \quad \tilde{\Gamma}(z) = \tilde{\Pi}(z-1),$$

en s.k. rekursiv definition; t.ex. blir, eftersom $\Pi(-1/2) = \sqrt{\pi}$ enligt Exempel 5.43,

$$\tilde{\Gamma}(-5/2) = \tilde{\Pi}(-7/2) = \frac{\tilde{\Pi}(-5/2)}{-5/2} = \frac{\tilde{\Pi}(-3/2)}{(-5/2)(-3/2)} = \frac{\Pi(-1/2)}{(-5/2)(-3/2)(-1/2)} = -\frac{8\sqrt{\pi}}{15},$$

medan däremot integralen $\int_0^{\infty} t^{-7/2} e^{-t} dt$ är divergent (se också Anmärkning 5.52).

Till att börja med noterar vi att om $-2 < \operatorname{Re} z \leq -1$ så är trivialt $\operatorname{Re}(z+1) > -1$ och därmed är $\tilde{\Pi}(z+1) = \Pi(z+1)$ enligt ovan, så $\tilde{\Pi}(z)$ är väldefinierat om dessutom $z \neq -1$. I själva verket är

$$\tilde{\Pi}(z) = \frac{\Pi(z+1)}{z+1}, \quad \operatorname{Re} z > -2, \quad z \neq -1,$$

alltså inte bara för $-2 < \operatorname{Re} z \leq -1$, $z \neq -1$, eftersom $\Pi(z+1)/(z+1) = \Pi(z)$ för $\operatorname{Re} z > -1$ enligt Proposition 5.42. Vi noterar att $\tilde{\Pi}$ har en enkelpol i punkten -1 eftersom Π är analytisk i 0 och $\Pi(0) = 1 \neq 0$; dessutom är

$$\operatorname{Res}_{z=-1} \tilde{\Pi}(z) = \Pi(0) = 1.$$

Om vi fortsätter till nästa remsa, $-3 < \operatorname{Re} z \leq -2$, får vi analogt

$$\tilde{\Pi}(z) = \frac{\tilde{\Pi}(z+1)}{z+1} = \frac{\Pi(z+2)}{(z+1)(z+2)}, \quad \operatorname{Re} z > -3, \quad z \neq -1, -2,$$

och en ny enkelpol för $\tilde{\Pi}$ i punkten -2 med residy

$$\operatorname{Res}_{z=-2} \tilde{\Pi}(z) = \frac{\Pi(0)}{-2+1} = -1.$$

Allmänt är

$$\tilde{\Pi}(z) = \frac{\Pi(z+n)}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)(z+n)}, \quad \operatorname{Re} z > -(n+1), \quad z \neq -1, -2, \dots, -n.$$

Vi inser att $\tilde{\Pi}$ blir väldefinierad och analytisk i området $\Omega_{\tilde{\Pi}} = \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, -3, \dots\}$ och $\tilde{\Gamma}$ i området $\Omega_{\tilde{\Gamma}} = \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$, samt att $\tilde{\Pi}$ har enkelpoler i punkterna $-1, -2, -3, \dots$ och att $\tilde{\Gamma}$ har enkelpoler i punkterna $0, -1, -2, \dots$ med residyer

$$\operatorname{Res}_{z=-n} \tilde{\Pi}(z) = \frac{\Pi(0)}{(-n+1)(-n+2)\cdots(-n+n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

respektive

$$\operatorname{Res}_{z=-n} \tilde{\Gamma}(z) = \operatorname{Res}_{w=-(n+1)} \tilde{\Pi}(w) = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vi noterar också att

$$\tilde{\Pi}(z+1) = (z+1)\tilde{\Pi}(z), \quad z \in \Omega_{\tilde{\Pi}}, \quad \text{och} \quad \tilde{\Gamma}(z+1) = z\tilde{\Gamma}(z), \quad z \in \Omega_{\tilde{\Gamma}}.$$

Att hitta ett bra uttryck för utvidgningen av ζ är mera komplicerat, och vi ska göra det i flera steg där vi drar nytta av de utvidgningar vi redan hittat.

Först ett "speglingsresultat" för $\tilde{\Pi}$ och $\tilde{\Gamma}$:

5.47. Proposition.

$$\tilde{\Pi}(z)\tilde{\Pi}(-z) = \frac{\pi z}{\sin \pi z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1, \pm 2, \dots\} \quad \text{och} \quad \tilde{\Gamma}(z)\tilde{\Gamma}(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

Speciellt saknar $\tilde{\Pi}$ och $\tilde{\Gamma}$ nollställen.

Bevis. Vi bevisar den första likheten; den andra följer sedan omedelbart av att $\tilde{\Gamma}(z)\tilde{\Gamma}(1-z) = \tilde{\Pi}(z-1)\tilde{\Pi}(-z) = (\tilde{\Pi}(z)/z)\tilde{\Pi}(-z)$ då $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Vi noterar att funktionerna $\tilde{\Pi}(z)\tilde{\Pi}(-z)$ och $\pi z/(\sin \pi z)$ båda är analytiska i området $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1, \pm 2, \dots\}$ om vi ger $\pi z/(\sin \pi z)$ värdet 1 i origo (hävbar singularitet). P.g.a. entydighetssatsen (Sats 4.44 på s. 85) räcker det därför att bevisa likheten för alla $z = \alpha$ sådana att $0 < \alpha < 1$, t.ex.

Låt D vara första kvadranten nedan, både i xy - och uv -integralerna. Om $0 < \alpha < 1$ är

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}(\alpha)\tilde{\Pi}(-\alpha) &= \Pi(\alpha)\Pi(-\alpha) = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx \cdot \int_0^\infty y^{-\alpha} e^{-y} dy = \iint_D (x/y)^\alpha e^{-(x+y)} dx dy \\ &\stackrel{(1)}{=} \iint_D v^\alpha e^{-u} \frac{u dv}{(v+1)^2} = \int_0^\infty u e^{-u} du \cdot \int_0^\infty \frac{v^\alpha dv}{(v+1)^2} \stackrel{(2)}{=} 1 \cdot \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\alpha}, \end{aligned}$$

där vi i (1) har gjort variabelbytet $u = x + y$, $v = x/y$ i dubbelintegralen och i (2) har använt resultatet i Exempel 5.30; observera att alla integrander är positiva, så upprepad integration och variabelbyte är tillåtet.

$\pi z/(\sin \pi z) \neq 0$ då $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1, \pm 2, \dots\} = \Omega_{\tilde{\Pi}} \setminus \{1, 2, \dots\}$, så $\tilde{\Pi}(z) \neq 0$ för dessa z . Men $\tilde{\Pi}(n) = \Pi(n) = n! \neq 0$ även då $n = 1, 2, \dots$; således saknar $\tilde{\Pi}$, och därmed även $\tilde{\Gamma}$, nollställen. ■

5.48. Anmärkning. Med $z = 1/2$ i Proposition 5.47 får vi att $\Gamma(1/2)^2 = \tilde{\Gamma}(1/2)^2 = \pi/\sin(\pi/2) = \pi$, och eftersom $\Gamma(1/2) > 0$ får vi att $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, men på ett annat sätt än i Exempel 5.43. ▲

Nu ett resultat som direkt kopplar ihop ζ och Γ :

5.49. Proposition.

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 1.$$

Speciellt är integralen i högerledet en analytisk funktion av z då $\operatorname{Re} z > 1$.

Bevis. Vi noterar först att integralen är absolutkonvergent om $x = \operatorname{Re} z > 1$. Om dessutom $n = 1, 2, 3, \dots$ är, med bytet $u = nt$,

$$\int_0^\infty t^{z-1} e^{-nt} dt = \int_0^\infty \left(\frac{u}{n}\right)^{z-1} e^{-u} \frac{du}{n} = \frac{1}{n^z} \int_0^\infty u^{z-1} e^{-u} du = \frac{\Gamma(z)}{n^z},$$

och eftersom $\sum_{n=1}^N e^{-nt} = (1 - e^{-Nt})/(e^t - 1)$ om $N = 1, 2, 3, \dots$ (geometrisk summa) får vi att

$$\left| \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt - \Gamma(z) \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^z} \right| = \left| \int_0^\infty \left(\frac{t^{z-1}}{e^t - 1} - \sum_{n=1}^N t^{z-1} e^{-nt} \right) dt \right| \leq \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} e^{-Nt} dt.$$

Från definitionen av $\zeta(z)$ följer det att $\sum_{n=1}^N (1/n^z) \rightarrow \zeta(z)$ då $N \rightarrow \infty$ om $\operatorname{Re} z > 1$, så det återstår att visa att den sista integralen ovan går mot noll då $N \rightarrow \infty$.

Låt $\epsilon > 0$ vara godtyckligt. Eftersom $I := \int_0^\infty (t^{x-1}/(e^t - 1)) dt$ är konvergent finns det ett $\delta > 0$ sådant att $\int_0^\delta (t^{x-1}/(e^t - 1)) dt < \epsilon$. Vi får att

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} e^{-Nt} dt = \int_0^\delta \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} e^{-Nt} dt + \int_\delta^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} e^{-Nt} dt \\ &\leq \int_0^\delta \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt + e^{-N\delta} \int_\delta^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt < \epsilon + e^{-N\delta} I < 2\epsilon \end{aligned}$$

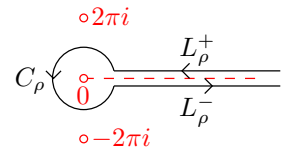
om bara N är så stort att $e^{-N\delta} < \epsilon/I$. Påståendet följer. ■

Integralen i Proposition 5.49 är inte absolutkonvergent då $\operatorname{Re} z \leq 1$ (speciellt ser man lätt att den är divergent då $z = x \leq 1$), så även om Γ har analytisk och nollskild utvidgning $\tilde{\Gamma}$ till $\Omega_{\tilde{\Gamma}} = \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ kan vi inte använda sambandet där, som det står, för att hitta en utvidgning $\tilde{\zeta}$ av ζ . Problemet är att integrationen sker hela vägen ner till $t = 0$, och vi ska nu beskriva ett sätt att komma runt det.

Låt γ_ρ för varje fixt ρ med $0 < \rho < 2\pi$ vara kurvan till höger:

$$\gamma_\rho = L_\rho^+ + C_\rho + L_\rho^-,$$

där $L_\rho^+ =]+\infty, \rho]$ (d.v.s. positiva realaxeln fr.o.m. ρ , riktad åt vänster), C_ρ är cirkeln $|z| = \rho$ ett varv moturs, och $L_\rho^- = [\rho, +\infty[$, jfr nyckelhålskonturerna i Avsnitt 5.5.



Låt vidare $L(s) = \ln |s| + i\theta(s)$, $0 < \theta(s) < 2\pi$, vara en gren till $\log s$ i området $\Omega = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$. Vi låter också $\theta = 0$ på L_ρ^+ och $\theta = 2\pi$ på L_ρ^- , precis som för nyckelhålskonturerna, och sätter, för fixt ρ , $0 < \rho < 2\pi$,

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{\widetilde{s^{z-1}}}{e^s - 1} ds, \quad z \in \mathbb{C},$$

där

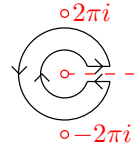
$$\widetilde{s^{z-1}} = \exp((z-1)L(s)) = \exp((x-1+iy)(\ln |s| + i\theta(s))), \quad s \in \Omega, \quad z \in \mathbb{C},$$

som för varje fixt $z \in \mathbb{C}$ är en gren till den flervärda funktionen $s \mapsto s^{z-1}$ i Ω . Funktionen I är väldefinierad och hel analytisk, med derivata

$$I'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{\widetilde{s^{z-1}L(s)}}{e^s - 1} ds, \quad z \in \mathbb{C},$$

vilket kan bevisas på ett sätt som starkt påminner om bevisen i Proposition 5.42, och beviset utelämnas därför.

Eftersom de enda singulariteter integranden i integralen som definierar $I(z)$ har i Ω är $s = 2n\pi i$, $n \in \mathbb{Z}^*$, medför Cauchys integralsats (tillämpad på en modifierad variant av konturen till höger, med öppningsvinkel 2α , följt av gränsövergången $\alpha \rightarrow 0^+$) att $I(z)$ är oberoende av ρ så länge som $0 < \rho < 2\pi$; t.ex. kan vi låta $\rho = 1$.



Parametriseringar av L_ρ^+ och L_ρ^- (jfr Exempel 5.30) medför nu att

$$I(z) = \frac{e^{i2\pi z} - 1}{2\pi i} \int_\rho^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{\widetilde{s^{z-1}}}{e^s - 1} ds, \quad z \in \mathbb{C}, \quad 0 < \rho < 2\pi, \quad (5.1)$$

och vi ska strax se att när $\operatorname{Re} z > 1$ kommer integralen längs C_ρ att gå mot noll då $\rho \rightarrow 0^+$, varför vi för dessa z kan uttrycka $I(z)$ m.h.a. enbart integralen i Proposition 5.49; kom dock ihåg att I är hel analytisk.

Först ska vi emellertid undersöka specialfallet då $z = n \in \mathbb{Z}$; då är ju $e^{i2\pi z} = e^{i2\pi n} = 1$, så

$$I(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{s^{n-1}}{e^s - 1} ds = \operatorname{Res}_{s=0} \frac{s^{n-1}}{e^s - 1} = \operatorname{Res}_{s=0} \left(\frac{s}{e^s - 1} \cdot s^{n-2} \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

5.50. Anmärkning (Bernoullitalen). Funktionen $f(z) = z/(e^z - 1)$ är viktig i klassisk analys. Med det naturliga värdet $f(0) = 1$ är f analytisk i skivan $|z| < 2\pi$, och dess Maclaurinutveckling skriver man ofta

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n, \quad |z| < 2\pi,$$

där talen B_n , $n \in \mathbb{N}$, är de s.k. Bernoullitalen ($B_n = f^{(n)}(0)$). Ett sätt att räkna ut dem är att multiplicera $f(z)$ med $(e^z - 1)/z$ och identifiera koefficienter, och på så sätt härleda rekursionsformeln

$$B_0 = 1, \quad B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Vidare, eftersom

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z(e^z + 1)}{2(e^z - 1)} = \frac{z}{2} \coth\left(\frac{z}{2}\right),$$

som är en jämn funktion och vars udda Maclaurinkoefficienter därmed är noll, inser vi att

$$B_1 = -1/2, \quad B_3 = B_5 = B_7 = B_9 = \dots = 0.$$

Enkla uträkningar i rekursionsformeln ger dessutom successivt att

$$B_0 = 1, \quad B_2 = 1/6, \quad B_4 = -1/30, \quad B_6 = 1/42, \quad B_8 = -1/30, \quad \dots$$

(Man skulle kunna förledas att tro att Bernoullitalen utgör en begränsad talföljd, men så är inte fallet eftersom Maclaurinserien för f i så fall skulle ha oändlig konvergensradie.)

Bernoulli tog fram talen som nu bär hans namn i samband med att han härledde formeln

$$1^N + 2^N + \dots + n^N = \frac{n^{N+1}}{N+1} + \frac{n^N}{2} + \sum_{k=2}^N \frac{B_k}{k} \binom{N}{k-1} n^{N+1-k}, \quad N, n \in \{1, 2, 3, \dots\},$$

för potenssummorna, även om han endast gjorde detta för $N = 1, \dots, 10$; t.ex. blir

$$\begin{aligned} 1^5 + 2^5 + \dots + n^5 &= \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{B_2}{2} \binom{5}{1} n^4 + \frac{B_3}{3} \binom{5}{2} n^3 + \frac{B_4}{4} \binom{5}{3} n^2 + \frac{B_5}{5} \binom{5}{4} n \\ &= \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Avslutningsvis ser vi att talen $I(n)$ precis före denna anmärkning kan skrivas

$$I(n) = \begin{cases} 0, & n = 2, 3, 4, \dots, \\ B_{1-n}/(1-n)!, & n = \dots, -1, 0, 1, \end{cases}$$

som ju är koefficienten för s^{-1} i Laurentserien $\sum_{k=0}^{\infty} (B_k/k!) s^{k+n-2}$ i $0 < |s| < 2\pi$. ▲

Direkta uträkningar av några $I(n)$ ger att

$$I(-3) = -\frac{1}{720}, \quad I(-2) = 0, \quad I(-1) = \frac{1}{12}, \quad I(0) = -\frac{1}{2}, \quad I(1) = 1,$$

och

$$I(2) = I(3) = I(4) = I(5) = \dots = 0, \quad I(-2) = I(-4) = I(-6) = I(-8) = \dots = 0,$$

jfr Övning 4.30 på s. 90 och Anmärkning 5.50.

Nu tillbaka till (5.1). Om $\operatorname{Re} z > 1$ och $0 < \rho < 2\pi$ medför ML-uppskattning att

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{\widetilde{s^{z-1}}}{e^s - 1} ds \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{s}{e^s - 1} \widetilde{s^{z-2}} ds \right| \leq \max_{|s|=\rho} \left| \frac{s}{e^s - 1} \right| \cdot \rho^{x-2} e^{2\pi|y|} \cdot \rho,$$

där den sista olikheten följer av att $|\widetilde{s^{z-2}}| = \exp((x-2)\ln\rho - y\theta(s)) \leq \rho^{x-2} e^{2\pi|y|}$. Eftersom $x > 1$ och $s/(e^s - 1) \rightarrow 1$ då $s \rightarrow 0$ får vi därför, när vi låter $\rho \rightarrow 0^+$ i (5.1), att

$$I(z) = \frac{e^{i2\pi z} - 1}{2\pi i} \cdot \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt = e^{i\pi z} \cdot \frac{\sin \pi z}{\pi} \cdot \zeta(z) \Gamma(z), \quad \operatorname{Re} z > 1,$$

där vi i sista steget har använt Proposition 5.49. Genom att avslutningsvis använda sambandet $\Gamma(z)(\sin \pi z)/\pi = 1/\tilde{\Gamma}(1-z)$ då $\operatorname{Re} z > 1$, $z \neq 2, 3, 4, \dots$, i Proposition 5.47 har vi således bevisat följande:

5.51. Sats.

$$\zeta(z) = e^{-i\pi z} \tilde{\Gamma}(1-z) I(z), \quad \operatorname{Re} z > 1, \quad z \neq 2, 3, 4, \dots$$

Nu är vi – äntligen! – redo att utvidga ζ . Högerledet i Sats 5.51 är nämligen en analytisk funktion i det större området $\mathbb{C} \setminus \{1, 2, 3, \dots\}$. Dessutom har $I(z)$ nollställen i punkterna $2, 3, 4, \dots$, och där har $\tilde{\Gamma}(1-z)$ enkelpoler, så singulariteterna i dessa punkter är hävbara (se Övning 4.29 på s. 90). Genom att definiera

$$\tilde{\zeta}(z) = \begin{cases} \zeta(z), & \text{om } \operatorname{Re} z > 1, \\ e^{-i\pi z} \tilde{\Gamma}(1-z) I(z), & \text{annars,} \end{cases}$$

inser vi att $\tilde{\zeta}$ blir analytisk i området $\Omega_{\tilde{\zeta}} = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ och att

$$\tilde{\zeta}(z) = e^{-i\pi z} \tilde{\Gamma}(1-z) I(z)$$

i hela detta område, med hävda singulariteter i punkterna $2, 3, 4, \dots$. I den återstående punkten 1 har $\tilde{\Gamma}(1-z)$ enkelpol och eftersom $I(1) = 1 \neq 0$ har även $\tilde{\zeta}$ enkelpol där, med residy

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=1} \tilde{\zeta}(z) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \tilde{\zeta}(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) e^{-i\pi z} \tilde{\Gamma}(1-z) I(z) = - \lim_{z \rightarrow 1} e^{-i\pi z} (1-z) \tilde{\Gamma}(1-z) I(z) \\ &= - \lim_{z \rightarrow 1} e^{-i\pi z} \Gamma(2-z) I(z) = -(e^{-i\pi}) \Gamma(1) I(1) = -(-1) \cdot 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Dessutom kan vi räkna ut

$$\tilde{\zeta}(-n) = e^{i\pi n} \Gamma(n+1) I(-n) = (-1)^n n! \cdot I(-n) = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

där B_k är Bernoullitalen i Anmärkning 5.50, och t.ex. är

$$\tilde{\zeta}(0) = -\frac{1}{2}, \quad \tilde{\zeta}(-1) = -\frac{1}{12}, \quad \tilde{\zeta}(-2) = 0, \quad \tilde{\zeta}(-3) = \frac{1}{120}, \quad \tilde{\zeta}(-4) = 0,$$

och

$$\tilde{\zeta}(-2) = \tilde{\zeta}(-4) = \tilde{\zeta}(-6) = \dots = 0.$$

Med metoderna i Avsnitt 5.6 kan man också beräkna $\zeta(2), \zeta(4), \zeta(6), \dots$; t.ex. är $\zeta(2) = \pi^2/6$ (se Exempel 5.33), och att $\zeta(4) = \pi^4/90$ är Övning 5.26. Allmänt kan man visa att

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2 \cdot (2n)!} B_{2n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(t.ex. är $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^6 = \pi^6/945$), men för $\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \dots$ finns inga bra uttryck.

5.52. Anmärkning (Om divergenta integraler och serier). Funktionerna Π, Γ och ζ är alltså definierade m.h.a. absolutkonvergenta integraler och serier, men vi kan naturligtvis inte använda utvidgningarna $\tilde{\Pi}, \tilde{\Gamma}$ och $\tilde{\zeta}$ för att få värden på integralerna eller serierna i punkter där dessa divergerar – där har de ju per definition inga värden.

Exempelvis är integralen

$$\int_0^{\infty} t^{-3/2} e^{-t} dt \quad \text{divergent;}$$

integranden är positiv, så det enda vettiga värde man skulle kunna ge integralen är $+\infty$. Att

$$\tilde{\Pi}(-3/2) = \tilde{\Gamma}(-1/2) = -2\Gamma(1/2) = -2\sqrt{\pi}$$

ändrar inte det faktum att integralen är divergent.

På liknande sätt är den positiva serien

$$1 + 2 + 3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-1}} \quad \text{divergent,}$$

och att

$$\tilde{\zeta}(-1) = -\frac{1}{12}$$

ändrar inte detta faktum; det enda vettiga värde man skulle kunna ge seriens summa är $+\infty$. Trots det kan man stöta på likheten $1 + 2 + 3 + \dots = -1/12$ i diverse sammanhang, men den likheten är alltså helt enkelt fel som den står. Det som *är* sant är att man kan *koppla* den divergenta serien $1 + 2 + 3 + \dots$ till talet $-1/12$, via $\tilde{\zeta}$ -funktionen, inte att den *är* $-1/12$. Ett annat sätt att se kopplingen till $-1/12$ är följande: Man kan visa att det till varje $\mathcal{C}^3$ -funktion $\psi \geq 0$ sådan att $\psi(0) = 1, \psi(t) = 0$ för $t \geq 1$ och $\psi'(1) = 0$ finns en konstant $C_\psi = \int_0^1 t \psi(t) dt > 0$ sådan att

$$\sum_{n=1}^N n \cdot \psi(n/N) = -\frac{1}{12} + C_\psi N^2 + \mathcal{O}(1/N),$$

$\tilde{\Pi}(z)$ (ej integralen)	$\tilde{\Pi}(z) = \Pi(z)$ (integralen)
○ -2	○ -1

$\tilde{\Gamma}(z)$ (ej integralen)	$\tilde{\Gamma}(z) = \Gamma(z)$ (integralen)
○ -2	○ -1
	○ 0

$\tilde{\zeta}(z)$ (ej serien)	$\tilde{\zeta}(z) = \zeta(z)$ (serien)
	○ 1

där vi nu använder beteckningen $\mathcal{O}$ som i reell analys. Vänsterledet ovan kan tolkas som en sorts regulariserad delsumma till den divergenta serien $\sum_{n=1}^{\infty} n$, och i högerledet dyker talet $-1/12$ upp som konstanten i den asymptotiska utvecklingen när $N \rightarrow \infty$, oberoende av val av ψ . Notera dock att högerledet $\rightarrow +\infty$ då $N \rightarrow \infty$, som sig bör. $\blacktriangle$

5.53. Anmärkning (Om analytiska utvidgningar av fakultetsfunktionen). Om vi vill hitta en analytisk funktion F som generaliserar fakultetsfunktionen $! : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, d.v.s. en funktion F som är analytisk i ett (största möjliga) område $\Omega \supseteq \mathbb{N}$ och som uppfyller att $F(n) = n!$ då $n \in \mathbb{N}$, finns det många möjligheter förutom $\tilde{\Pi}$, t.ex. $F(z) = \tilde{\Pi}(z) + \sin \pi z$. Med mera avancerade metoder kan man t.o.m. hitta sådana F som är analytiska i hela planet ($\Omega = \mathbb{C}$).

Om vi dessutom kräver att egenskapen $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$, $n \in \mathbb{N}$, generaliseras i meningen att $\Omega \supseteq [0, +\infty[$ och $F(x+1) = (x+1)F(x)$ då $x \geq 0$ sjunker antalet funktioner drastiskt, men vi ser i alla fall genast att en sådan funktion är $F(z) = e^{2\pi iz} \cdot \tilde{\Pi}(z)$. Man kan visa att i själva verket uppfyller F kraven om och endast om $F(z) = h(e^{2\pi iz}) \cdot \tilde{\Pi}(z)$, där $h \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^*)$ och $h(1) = 1$.

Om vi till sist kräver att även egenskapen $((n+k)!)/(k! \cdot k^n) \rightarrow 1$ då $k \rightarrow \infty$ och $n \in \mathbb{N}$ generaliseras i meningen att $\lim_{k \rightarrow \infty} F(x+k)/(k! \cdot k^x) = 1$ då $x \geq 0$ kan man dock visa att vi får entydighet: $F = \tilde{\Pi}$. $\blacktriangle$

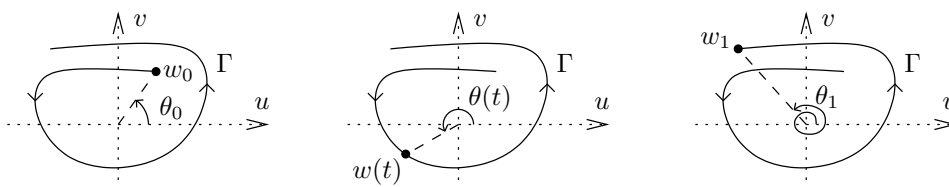
5.54. Anmärkning (Riemannhypotesen). Vi har sett ovan att $\tilde{\zeta}(-2) = \tilde{\zeta}(-4) = \tilde{\zeta}(-6) = \dots = 0$; dessa nollställen för $\tilde{\zeta}$ -funktionen kallas triviala. Riemannhypotesen är att alla andra nollställen till $\tilde{\zeta}$ -funktionen – de s.k. icke-triviala nollställena – finns på linjen $\operatorname{Re} z = 1/2$. Om den visar sig vara sann får det stor betydelse för vår kunskap om hur primtalen är fördelade. $\blacktriangle$

6 Argumentprincipen

Analytiska funktioner har många speciella egenskaper. En av dem är, som vi nu ska se, att man kan bestämma antalet nollställen som en analytisk funktion f har innanför en enkel sluten kurva bara genom att studera argumentet för f , $\arg f$, på själva kurvan, förutsatt att $f \neq 0$ på kurvan.

Denna egenskap är inte enbart av teoretiskt intresse. En viktig tillämpning är i reglerteknik, där man vill veta om alla poler till ett systems s.k. överföringsfunktion $H = p/q$, där p och q är polynom, finns i vänstra halvplanet, eftersom det är precis i så fall som systemet är stabilt.

6.1 Argumenttillskott längs kurvor



Låt Γ vara en styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva $w = w(t)$, $t : 0 \rightarrow 1$, i komplexa planet $\mathbb{C}$. Om $w(t) \neq 0$ för alla t och vi låter θ_0 vara ett av argumenten för kurvans startpunkt $w_0 = w(0)$, så kan vi för varje t välja ett argument $\theta(t)$ för $w(t)$ sådant att funktionen $\theta = \theta(t)$, $t : 0 \rightarrow 1$, blir kontinuerlig och $\theta(0) = \theta_0$, alltså ett kontinuerligt varierande argument θ för w längs kurvan Γ , jfr Exempel 2.7 på s. 22. Vi sätter $\theta_1 = \theta(1)$, som därmed är ett argument för kurvans slutpunkt $w_1 = w(1)$, och definierar **argumenttillskottet** för w längs Γ som

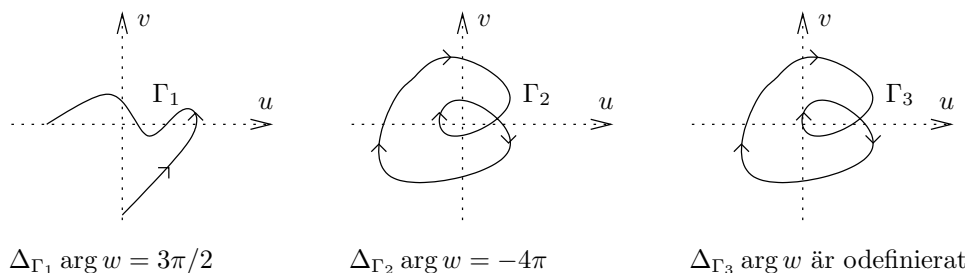
$$\Delta_{\Gamma} \arg w = \theta_1 - \theta_0.$$

Även om inte θ_0 är entydigt bestämt – det kan ju skilja på heltalsmultipler av 2π – är argumenttillskottet, alltså skillnaden $\theta_1 - \theta_0$, det.

6.1. Exempel. I vänstra figuren nedan kan vi ta $\theta_0 = -\pi/2$, och när vi vandrar längs Γ_1 ändras θ kontinuerligt till slutvärdet $\theta_1 = \pi$, så $\Delta_{\Gamma_1} \arg w = \theta_1 - \theta_0 = 3\pi/2$. (Om vi i stället tar $\theta_0 = 3\pi/2$, t.ex., vilket också är ett argument för w_0 , blir $\theta_1 = 3\pi$, så $\theta_1 - \theta_0 = 3\pi/2$ även då.)

I figuren i mitten har vi en sluten kurva, och om t.ex. w_0 är punkten på Γ_2 längst till vänster på negativa u -axeln kan vi ta $\theta_0 = \pi$, och när vi genomlöper Γ_2 varierar θ kontinuerligt och antar värdena $\pi/2, 0, -\pi/2, -\pi, -3\pi/2, -2\pi$ respektive $-5\pi/2$ just vid skärningarna med koordinat-axlarna, för att vid återkomsten till startpunkten bli $\theta_1 = -3\pi$, så $\Delta_{\Gamma_2} \arg w = -4\pi$.

I högra figuren, slutligen, går Γ_3 genom origo, vilket är samma sak som att $w(t) = 0$ för något t , och eftersom $\arg 0$ är odefinierat är också $\Delta_{\Gamma_3} \arg w$ odefinierat.



▲

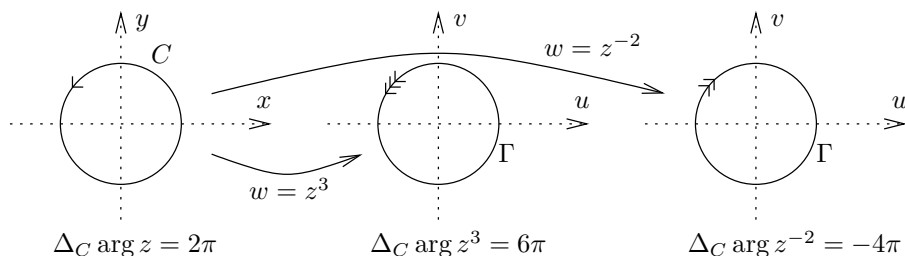
Eftersom $\log w = \ln |w| + i \arg w$ kan vi också definiera en kontinuerligt varierande logaritm $\ln |w(t)| + i \theta(t)$ längs Γ , och tillhörande logaritmtilskott $\Delta_{\Gamma} \log w = \ln |w_1| - \ln |w_0| + i \Delta_{\Gamma} \arg w$. Varje gren till $\log w$ har derivata $1/w$, så

$$\int_{\Gamma} \frac{dw}{w} = \Delta_{\Gamma} \log w = \ln |w_1| - \ln |w_0| + i \Delta_{\Gamma} \arg w, \quad 0 \notin \Gamma,$$

och om Γ dessutom är sluten är $w_1 = w_0$, och därmed är

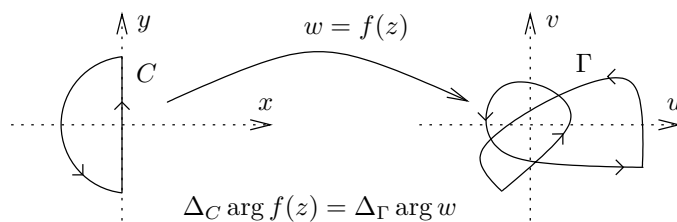
$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg w = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w}, \quad \Gamma \text{ sluten, } 0 \notin \Gamma.$$

Om C är en styckvis C^1 -kurva $z = z(t)$ i z -planet och $w = f(z)$ är en analytisk funktion definierad i en omgivning till C , så är sammansättningen $w(t) = f(z(t))$ en styckvis C^1 -kurva Γ i w -planet. Ett enkelt men viktigt specialfall är när $f(z) = z^m$, där m är ett heltal, och C är enhetscirkeln $z = e^{i2\pi t}$, $t: 0 \rightarrow 1$. Då blir Γ kurvan $w = e^{i2\pi mt}$, $t: 0 \rightarrow 1$, som ju är enhetscirkeln genomlöst m varv i positiv led om $m > 0$ och $-m$ varv i negativ led om $m < 0$, så $\Delta_{\Gamma} \arg w = 2\pi m$.

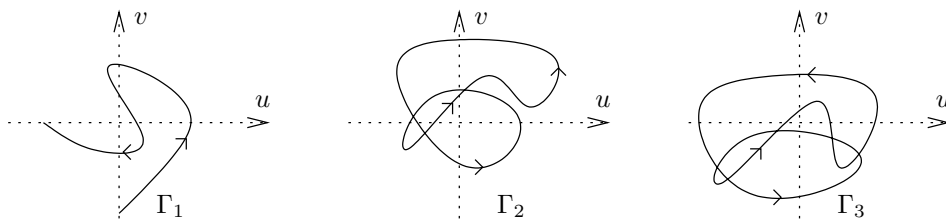


Allmänt, om $f(z) \neq 0$ för alla z på kurvan C kan vi definiera argumenttilskottet för f längs C som $\Delta_C \arg f(z) = \Delta_{\Gamma} \arg w$, och det kan uttryckas m.h.a. en integral av f'/f längs C :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z) &= \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg w = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{w'(t)}{w(t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f'(z(t))z'(t)}{f(z(t))} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz, \quad \Gamma \text{ sluten, } 0 \notin \Gamma. \end{aligned} \quad (6.1)$$



★ ÖVNINGAR



★ 6.1 Ange $\Delta_{\Gamma} \arg w$ för ovanstående tre kurvor.

★ **6.2** Bevisa följande samband för argumenttillskott, under lämpliga förutsättningar:

- (a) $\Delta_C \arg f(z)g(z) = \Delta_C \arg f(z) + \Delta_C \arg g(z)$
- (b) $\Delta_{-C} \arg f(z) = -\Delta_C \arg f(z)$
- (c) $\Delta_{C_1+C_2} \arg f(z) = \Delta_{C_1} \arg f(z) + \Delta_{C_2} \arg f(z)$

6.2 Argumentprincipen och Rouchés sats

6.2. Sats (Argumentprincipen). Låt C vara en kontur (en enkel sluten styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva, se s. 7) med positiv orientering. Om f är analytisk på och innanför C , förutom möjligen i *poler* innanför C , och $f(z) \neq 0$ för alla z på C , så är

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P,$$

där N och P är antalet nollställen respektive poler som f har innanför C , räknade med multiplicitet.

6.3. Anmärkning (*En mera allmän situation). Satsen gäller även om C ersätts med $\partial\omega$, randen till ett begränsat område ω , och f är analytisk – förutom möjligen i poler som inte ligger på $\partial\omega$ – i något område Ω som innehåller $\bar{\omega}$, och $f \neq 0$ på $\partial\omega$; jfr inledningen av Avsnitt 3.4 på s. 46. Vi noterar också att det faktum att $\bar{\omega}$ är kompakt och att f inte får vara konstant lika med noll medför att f endast kan ha *ändligt många* nollställen och poler i ω eftersom dessa är isolerade. ▲

Bevis av Sats 6.2. Låt Γ vara kurvan $w(t) = f(z(t))$ som i Avsnitt 6.1. Att C är sluten medför att Γ är sluten, och därmed gäller första likheten i satsen, enligt (6.1). Funktionen f'/f är analytisk på och innanför C förutom i de ändligt många punkter $c_1, \dots, c_n$ innanför C där antingen $f = 0$ eller f har en pol. Om c är en av dessa punkter kan vi skriva

$$f(z) = (z - c)^m g(z)$$

i en punkterad omgivning till c för något heltal m och någon funktion g som är analytisk i c och som uppfyller att $g(c) \neq 0$; m är nollställets multiplicitet om $m > 0$ medan $-m$ är polens ordning om $m < 0$ (se s. 87). Eftersom g'/g är analytisk i c får vi att

$$\operatorname{Res}_{z=c} \frac{f'(z)}{f(z)} = \operatorname{Res}_{z=c} \frac{m(z-c)^{m-1}g(z) + (z-c)^m g'(z)}{(z-c)^m g(z)} = \operatorname{Res}_{z=c} \left(\frac{m}{z-c} + \frac{g'(z)}{g(z)} \right) = m,$$

och eftersom C är en kontur med positiv orientering ger residysatsen (Sats 5.2 på s. 99) att

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=c_k} \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^n m_k = \sum_{k: m_k > 0} m_k - \sum_{k: m_k < 0} (-m_k) = N - P.$$

■

6.4. Exempel. Låt

$$f(z) = z^2 + z - 2 - \frac{1}{z} + \frac{3}{z^2}.$$

f har dubbelpol i origo och inga andra singulariteter, så om C är enhetscirkeln $|z| = 1$ tagen ett varv moturs är $P = 2$, där P är antalet poler som f har innanför C .

För att bestämma antalet nollställen N som f har innanför C parametriserar vi C med $z = e^{i\theta}$, $\theta : -\pi \rightarrow \pi$, och får, med Eulers identitet och sambandet $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$, att

$$\begin{aligned} w = f(e^{i\theta}) &= e^{2i\theta} + e^{i\theta} - 2 - e^{-i\theta} + 3e^{-2i\theta} = (4 \cos 2\theta - 2) + i(2 \sin \theta - 2 \sin 2\theta) \\ &= (4 \cos 2\theta - 2) + i(2 - 4 \cos \theta) \sin \theta = u(\theta) + i v(\theta). \end{aligned}$$

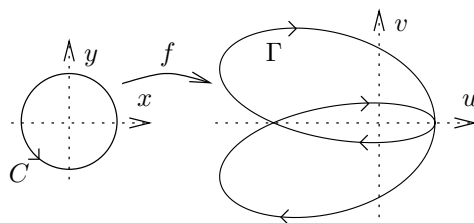
I parameterintervallet $-\pi \leq \theta \leq \pi$ har u nollställena $\theta = \pm\pi/6$ och $\theta = \pm 5\pi/6$ medan v har nollställena $\theta = 0$, $\theta = \pm\pi/3$ och $\theta = \pm\pi$. Vi får följande teckentabell för u och v och tillhörande kvadrantvandring i w -planet:

θ	$-\pi$	$<$	$-\frac{5\pi}{6}$	$<$	$-\frac{\pi}{3}$	$<$	$-\frac{\pi}{6}$	$<$	0	$<$	$\frac{\pi}{6}$	$<$	$\frac{\pi}{3}$	$<$	$\frac{5\pi}{6}$	$<$	π
u	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+
v	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0
kvadr.		4		3		2		1		4		3		2		1	

Till höger ser vi den kurva $\Gamma = f(C)$ som vi får i w -planet, och vi kan där avläsa att

$$\Delta_C \arg f(z) = \Delta_\Gamma \arg w = -4\pi.$$

Enligt argumentprincipen är således $N - P = -2$, och eftersom $P = 2$ inser vi att $N = 0$, d.v.s. att f saknar nollställen i enhetsskivan $|z| < 1$.

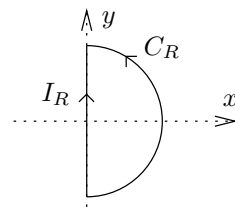


Observera speciellt att kurvan Γ i w -planet inte går *genom* origo, så f saknar nollställen *på* C , vilket ju är nödvändigt för att $\Delta_C \arg f(z)$ ska vara definierat över huvud taget. ▲

6.5. Exempel (Polynom i halvplan). Vi ska bestämma antalet nollställen som polynomet

$$p(z) = z^3 + iz^2 + (2+i)z - 3$$

har i högra halvplanet $\operatorname{Re} z > 0$, och vi studerar därför den positivt orienterade konturen $C_R - I_R$ till höger. För stora R kommer alla (högst 3) nollställen till p i högra halvplanet att finnas innanför konturen. Eventuellt har p något nollställe på imaginäraxeln, men det kommer i så fall att framgå av undersökningen nedan.



Argumenttillskottet längs C_R är lätt att undersöka eftersom z^3 dominerar då $|z|$ är stort:

$$\begin{aligned} \Delta_{C_R} \arg p(z) &= \Delta_{C_R} \arg (z^3 + iz^2 + (2+i)z - 3) = \Delta_{C_R} \arg \left(z^3 \left(1 + \frac{i}{z} + \frac{2+i}{z^2} - \frac{3}{z^3} \right) \right) \\ &= \underbrace{\Delta_{C_R} \arg z^3}_{3\Delta_{C_R} \arg z} + \underbrace{\Delta_{C_R} \arg \left(1 + \frac{i}{z} + \frac{2+i}{z^2} - \frac{3}{z^3} \right)}_{\rightarrow 1 \text{ då } |z| \rightarrow \infty} \rightarrow 3 \cdot \pi + 0 = 3\pi, \quad R \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

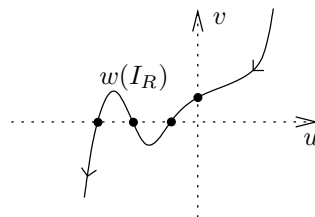
eftersom kurvan $\zeta = 1 + i/z + (2+i)/z^2 - 3/z^3$, $z \in C_R$, krymper ihop mot punkten 1 då $R \rightarrow \infty$.

Argumenttillskottet längs I_R undersöker vi m.h.a. parametriseringen $z = iy$ och får att

$$w = p(z) = p(iy) = (-y - 3) + i(-y^3 - y^2 + 2y) = u(y) + i v(y), \quad y : -R \rightarrow R.$$

Faktorisering ger att $u = -(y+3)$ och $v = -y(y-1)(y+2)$, och vi får nedanstående teckentabell för u och v och tillhörande kvadrantvandring i uv -planet:

y	$<$	-3	$<$	-2	$<$	0	$<$	1	$<$
u	+	0	-	-	-	-	-	-	-
v	+	+	+	0	-	0	+	0	-
kvadrant	1		2		3		2		3



Vidare, $u/v \rightarrow 0$ då $y \rightarrow \pm\infty$ av gradskäl (vi säger att **v drar mer än u**), och vi får bilden ovan till höger, där vi ser att

$$\Delta_{I_R} \arg p(z) \rightarrow \pi, \quad R \rightarrow \infty;$$

i figuren har vi också markerat skärningarna med koordinataxlarna, svarande mot $y = -3, -2, 0, 1$.

Eftersom p saknar poler ($P = 0$) ger argumentprincipen att antalet nollställen i $\operatorname{Re} z > 0$ är

$$N = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \Delta_{C_R - I_R} \arg p(z) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} (\Delta_{C_R} \arg p(z) - \Delta_{I_R} \arg p(z)) = \frac{1}{2\pi} (3\pi - \pi) = 1.$$

Inget nollställe finns på imaginäraxeln, ty kurvan i uv -planet går inte genom origo. ▲

6.6. Exempel (Polynom i kvadrant). Vi ska bestämma antalet nollställen som polynomet

$$p(z) = z^3 + (2 - 2i)z^2 + 2iz + 4$$

har i första kvadranten $\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0$. Vi studerar därför argumenttillskottet för p längs den positivt orienterade konturen $C_R + I_R + L_R$ i figuren nedan till vänster.

Undersökningen längs C_R är enkel (lägg dock märke till att nu är $\Delta_{C_R} \arg z = \pi/2$):

$$\Delta_{C_R} \arg p(z) = \Delta_{C_R} \arg z^3 + \Delta_{C_R} \arg \left(1 + \frac{2-2i}{z} + \frac{2i}{z^2} + \frac{4}{z^3} \right) \rightarrow 3 \cdot \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{3\pi}{2}, \quad R \rightarrow \infty.$$

På I_R är

$$p(z) = p(iy) = (-2y^2 - 2y + 4) + i(-y^3 + 2y^2) = -2(y+2)(y-1) + iy^2(2-y) = u + iv,$$

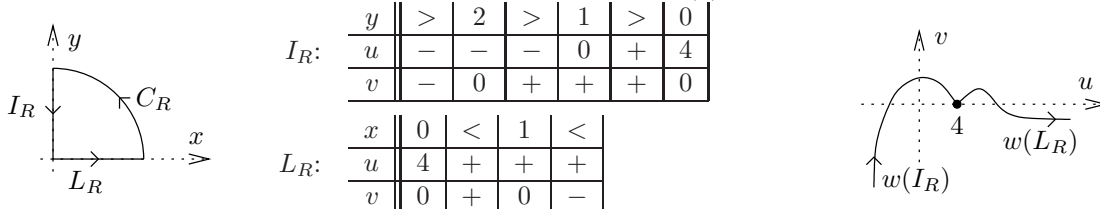
där $y : R \rightarrow 0$ (obs. orienteringen), och $u/v \rightarrow 0$ då $y \rightarrow +\infty$ av gradskäl, så v drar mer än u .

På L_R är

$$p(z) = p(x) = (x^3 + 2x^2 + 4) + i2x(1-x) = u + iv,$$

där $x : 0 \rightarrow R$; notera att $u \geq 4 > 0$ för aktuella x (så det finns ingen anledning att faktorisera u , vilket dessutom vore svårt) och att $v/u \rightarrow 0$ då $x \rightarrow +\infty$ av gradskäl, så här drar u mer än v .

Vi får därför nedanstående teckentabeller och kurva $w = p(z)$ när z genomlöper $I_R + L_R$:



Från figuren ovan till höger ser vi att $\Delta_{I_R + L_R} \arg p(z) \rightarrow -3\pi/2$ då $R \rightarrow \infty$, och eftersom poler saknas medför argumentprincipen att antalet nollställen för $p(z)$ i första kvadranten är

$$N = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} (\Delta_{C_R} \arg p(z) + \Delta_{I_R + L_R} \arg p(z)) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} \right) = 0. \quad \blacktriangle$$

6.7. Anmärkning (Det räcker att faktorisera en av u och v). I Exempel 6.4, 6.5 och 6.6 gjorde vi fullständiga teckenundersökningar av både u och v . Det finns dock en genväg.

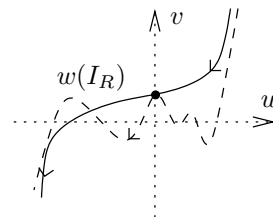
Antag att $w = w(t)$, $t : a \rightarrow b$, är en parametrisering av (en del av) en kurva i w -planet, att $v(a) = 0 = v(b)$ och att $v(t) > 0$ däremellan. Om då $u(a) < 0$ och $u(b) > 0$ betyder det att kurvan går från en punkt på negativa u -axeln till en punkt på positiva u -axeln och däremellan befinner sig i övre halvplanet $v > 0$. Argumenttillskottet är därmed $-\pi$, oavsett tecknet på $u(t)$ när $a < t < b$ (markeras med ? i tabellen nedan), och båda kurvorna nere till höger är förenliga med tabellen.



Det räcker därför att rita den (enklare) heldragna kurvan för att bestämma argumenttillskottet, även om den kanske inte återger teckenväxlingarna för u på ett korrekt sätt.

Om vi återvänder till Exempel 6.5 och endast faktoriserar u fullständigt – det är lättast här – och anger tecknet på v i de punkter där $u = 0$, samt tecknet på både u och v för stora positiva och negativa y (markeras med $\pm\infty$ i tabellen), får vi följande tabell och skiss:

y	$-\infty$	$<$	-3	$<$	$+\infty$
u	$+$	$+$	0	$-$	$-$
v	$+$	$?$	$+$	$?$	$-$
kvadrant/halvplan	1	högra		vänstra	3



Tillsammans med att $u/v \rightarrow 0$ då $y \rightarrow \pm\infty$, d.v.s. att v drar mer än u i båda oändligheterna, räcker detta för att inse att $\Delta_{I_R} \arg p(z) \rightarrow \pi$ då $R \rightarrow \infty$. Hur v växlar tecken i intervallen markerade med $?$ i tabellen spelar alltså ingen roll när vi undersöker argumenttillskottet, och båda kurvorna till höger – och kurvan i Exempel 6.5 – är förenliga med tabellen. ▲

6.8. Exempel. Vi söker, för alla $A \in \mathbb{R}$, antalet nollställen till polynomet

$$p(z) = z^4 - 2z^3 - 2z + A$$

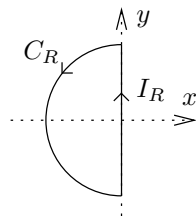
i vänstra halvplanet $\operatorname{Re} z < 0$, och studerar därför argumenttillskottet för $p(z)$ när z genomlöper konturen $C_R + I_R$, se figur nere till vänster. På C_R får vi att

$$\Delta_{C_R} \arg p(z) = \Delta_{C_R} \arg z^4 + \Delta_{C_R} \arg(1 - 2/z - 2/z^3 + A/z^4) \rightarrow 4\pi + 0 = 4\pi, \quad R \rightarrow \infty,$$

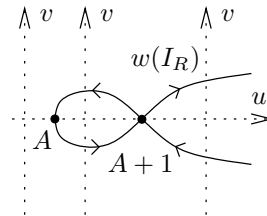
oavsett värdet på A . På I_R får vi att

$$p(z) = p(iy) = (y^4 + A) + i2y(y^2 - 1) = u + iv,$$

och vi ser att u är jämn och v är udda i detta fall. Tack vare denna symmetri räcker det att studera $y \geq 0$ i tabellen nedan, och sedan utnyttja att den del av kurvan som härrör från $y \leq 0$ fås genom att spegla den första delen av kurvan i u -axeln. (Om man vill kan man naturligtvis ta med alla $y \in \mathbb{R}$ i tabellen, precis som i tidigare exempel.)



y	0	$<$	1	$<$	$+\infty$
u (jämn)	A	$?$	$A+1$	$?$	$+$
v (udda)	0	$-$	0	$+$	$+$
kv./halvpl.		undre		övre	1



Dessutom ser vi att $v/u \rightarrow 0$ då $y \rightarrow \pm\infty$ av gradskäl, så u drar mer än v . Beroende på var punkterna A och $A+1$ befinner sig på u -axeln finns alltså v -axeln på olika ställen relativt dessa punkter, och vi får följande gränsvärden för argumenttillskottet längs I_R när $R \rightarrow \infty$:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_{I_R} \arg p(z) = \begin{cases} -2\pi, & A < -1, \\ 2\pi, & -1 < A < 0, \\ 0, & A > 0, \end{cases} \quad \text{så} \quad N = \begin{cases} (4\pi - 2\pi)/2\pi = 1, & A < -1, \\ (4\pi + 2\pi)/2\pi = 3, & -1 < A < 0, \\ (4\pi + 0)/2\pi = 2, & A > 0, \end{cases}$$

där N är antalet nollställen i $\operatorname{Re} z < 0$, eftersom poler saknas. Om $A = -1$ eller $A = 0$ går kurvan i uv -planet genom origo, och därför är argumenttillskottet längs kurvan odefinierat; i dessa fall har p minst ett nollställe på imaginäraxeln, och separata undersökningar krävs:

- Om $A = -1$ ser vi i tabellen att $p(iy) = 0$ då $y = \pm 1$, d.v.s. att $p(\pm i) = 0$, så $p(z)$ innehåller faktorn $(z - i)(z + i) = z^2 + 1$. Faktorisering ger att

$$p(z) = (z^2 + 1)(z^2 - 2z - 1),$$

och därmed är de återstående två nollställena $1 \pm \sqrt{2}$, varav det ena finns i $\operatorname{Re} z < 0$.

- Om $A = 0$ är $p(0) = 0$, och faktorisering ger denna gång att

$$p(z) = z(z^3 - 2z^2 - 2) = zq(z),$$

och eftersom nollställena till $q(z)$ inte är uppenbara får vi undersöka argumenttillskottet för $q(z)$ längs $C_R + I_R$. En undersökning som för $p(z)$ ovan ger vid handen att $\Delta_{C_R+I_R} \arg q(z) \rightarrow 3\pi + \pi = 4\pi$ då $R \rightarrow \infty$ (genomför detaljerna själv!) så q – och därmed p – har två nollställen i $\operatorname{Re} z < 0$ i detta fall.

Sammanfattningsvis har alltså polynomet p följande antal nollställen i vänstra halvplanet $\operatorname{Re} z < 0$ som funktion av parametern A : ett då $A \leq -1$, tre då $-1 < A < 0$ och två då $A \geq 0$. ▲

Lägg märke till att om p har *reella* koefficienter, som i Exempel 6.8, så blir u jämn och v udda om $p(iy) = u(y) + i v(y)$.

6.9. Exempel. Vi ska bestämma antalet nollställen som funktionen

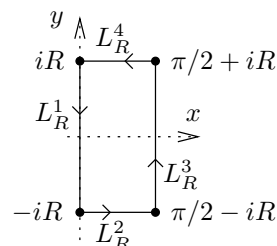
$$f(z) = \sin z - e^{-z}$$

har i remsan $0 < \operatorname{Re} z < \pi/2$, och betraktar därför rektangeln

$$\Gamma_R = L_R^1 + L_R^2 + L_R^3 + L_R^4$$

i figuren. Vi noterar först att med $z = x + iy$ blir

$$f(z) = (\sin x \cosh y - e^{-x} \cos y) + i(\cos x \sinh y + e^{-x} \sin y) = u + iv.$$



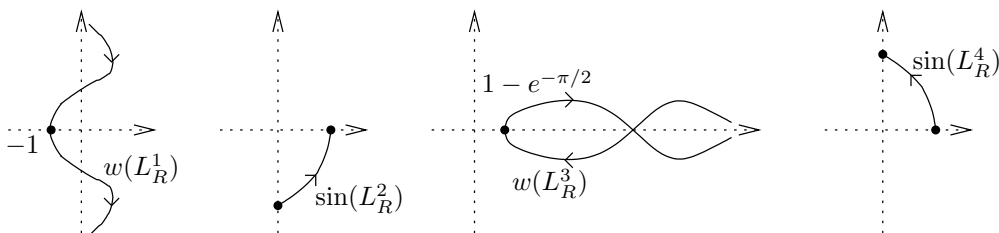
På sträckan L_R^1 , där $x = 0$, är $u(y) = -\cos y$ och $v(y) = \sinh y + \sin y$. Eftersom $v'(y) = \cosh y + \cos y$ och $\cosh y \geq 1$ för alla $y \in \mathbb{R}$, med likhet endast då $y = 0$ (se grafen på s. 33), ser vi att $v'(y) > 0$ för alla $y \in \mathbb{R}$, så $v(y)$ är strängt växande; $v(0) = 0$ är därmed det enda nollstället till v . Eftersom $u(0) = -1$ och dessutom $u/v \rightarrow 0$ då $y \rightarrow \pm\infty$ ger skissen nedan att $\Delta_{L_R^1} \arg f(z) \rightarrow \pi$ då $R \rightarrow \infty$; observera att y avtar längs L_R^1 .

På sträckan L_R^3 , där $x = \pi/2$, är i stället $u(y) = \cosh y - e^{-\pi/2} \cos y$ och $v(y) = e^{-\pi/2} \sin y$, så $u(y) \geq 1 - e^{-\pi/2} = u(0) > 0$ samtidigt som $v/u \rightarrow 0$ då $y \rightarrow \pm\infty$. Skissen nedan ger att $\Delta_{L_R^3} \arg f(z) \rightarrow 0$ då $R \rightarrow \infty$.

På de återstående två delarna, L_R^2 och L_R^4 , förenklas undersökningen något om vi observerar att $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y \geq \sinh^2 y$ medan $|e^{-z}| = e^{-x} \leq 1$, varför $|e^{-z}/\sin z| \leq 1/\sinh y \rightarrow 0$ och därmed $\Delta \arg(1 - e^{-z}/\sin z) \rightarrow 0$ då $R \rightarrow \infty$, på båda. Eftersom

$$\Delta \arg f(z) = \Delta \arg(\sin z - e^{-z}) = \Delta \arg(\sin z) + \Delta \arg\left(1 - \frac{e^{-z}}{\sin z}\right)$$

räcker det därför att undersöka argumenttillskottet för $\sin z$ längs dessa sträckor. När $y = \pm R$ får vi att $\sin z = \sin x \cosh R \pm i \cos x \sinh R$, vars värden går från $-i \sinh R$ till $\cosh R$ i fjärde kvadranten när vi genomlöper L_R^2 och från $\cosh R$ till $i \sinh R$ i första kvadranten när vi genomlöper L_R^4 . Skisserna nedan ger att $\Delta_{L_R^2} \arg(\sin z) = \pi/2 = \Delta_{L_R^4} \arg(\sin z)$, så $\Delta_{L_R^2} \arg f(z) \rightarrow \pi/2$ och $\Delta_{L_R^4} \arg f(z) \rightarrow \pi/2$ då $R \rightarrow \infty$.



Sammantaget får vi att $\Delta_{\Gamma_R} \arg f(z) \rightarrow \pi + \pi/2 + 0 + \pi/2 = 2\pi$ då $R \rightarrow \infty$, och eftersom singulariteter saknas har f ett nollställe i remsan. ▲

I vissa fall kan man klara sig utan de noggranna argumenttillskottsundersökningar som vi utförde i ovanstående exempel. Som en direkt konsekvens av argumentprincipen har vi nämligen följande användbara resultat:

6.10. Följsats (Rouchés sats). Låt C vara en kontur med positiv orientering. Om f och g är analytiska på och innanför C , och $|f(z)| > |g(z)|$ för alla z på C , så har f och $f + g$ lika många nollställen innanför C , räknade med multiplicitet, och inga nollställen på C .

Bevis. Sätt $h_t = f + tg$ för $0 \leq t \leq 1$; då är $h_0 = f$ och $h_1 = f + g$. Låt vidare

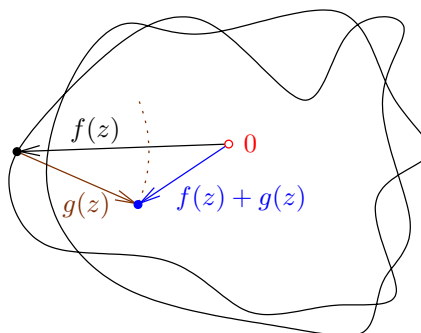
$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{h_t'(z)}{h_t(z)} dz, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

där ' i täljaren avser derivata m.a.p. z . Enligt omvända triangelolikheten och förutsättningen gäller olikheterna

$$|h_t(z)| \geq |f(z)| - t|g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$$

då $z \in C$ och $0 \leq t \leq 1$, så nämnaren $h_t(z) \neq 0$ då $z \in C$ och $0 \leq t \leq 1$; speciellt är både $h_0 \neq 0$ och $h_1 \neq 0$ på C , så f och $f + g$ saknar nollställen på C .

Funktionerna h_t , $0 \leq t \leq 1$, är analytiska på och innanför C , så argumentprincipen ger att $\varphi(t)$ är antalet nollställen som h_t har innanför C , och speciellt är φ heltalsvärd. Dessutom kan man visa att φ är kontinuerlig (se Övning 6.9), så φ är konstant, varför $\varphi(0) = \varphi(1)$; således har h_0 och h_1 , d.v.s. f och $f + g$, samma antal nollställen innanför C . ■



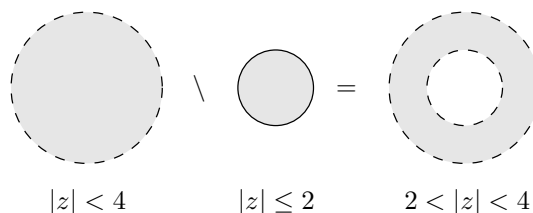
En illustration av Rouchés sats är följande hundpromenad: Tänk på 0 som ett träd, $f(z)$ som mattes (så klart!) position, och $f(z) + g(z)$ som hundens position; vektorn $g(z)$ är då själva kopplet (sträckt). Om matte går runt trädet N varv och kopplet hålls så kort ($|g(z)| < |f(z)|$) att hunden aldrig ges chans att nosa på trädet, så går hunden samma antal varv runt trädet, N , som matte.

6.11. Exempel (Rouchés sats i cirkelskiva och cirkelring). Vi ska bestämma antalet nollställen som polynomet

$$p(z) = z^3 + 3iz^2 - z + (1 + i)$$

har i (a) cirkelskivan $|z| < 4$ (b) cirkelringen $2 < |z| < 4$.

I (a) använder vi helt enkelt Rouchés sats direkt, se nedan, medan vi i (b) använder Rouchés sats två gånger: en för skivan $|z| < 4$ och en för (den slutna) skivan $|z| \leq 2$; på så sätt bestämmer vi antalet nollställen i ringen $2 < |z| < 4$.



(a) Vi delar upp p i två delar, $p = f + g$, enligt

$$f(z) = z^3 \quad \text{och} \quad g(z) = 3iz^2 - z + (1 + i).$$

På cirkeln $|z| = 4$ är $|f(z)| = |z|^3 = 64$ medan $|g(z)| \leq 3|z|^2 + |z| + |1 + i| = 48 + 4 + \sqrt{2} < 64$, så $|f(z)| > |g(z)|$ för alla z på denna cirkel. Enligt Rouchés sats har därmed $p(z) = f(z) + g(z) = z^3 + 3iz^2 - z + (1 + i)$ lika många nollställen i $|z| < 4$ som $f(z) = z^3$, alltså 3.

(b) Från (a) vet vi att det finns 3 nollställen i $|z| < 4$, och genom att dra bort det antal av dessa som finns i $|z| \leq 2$ får vi antalet nollställen i ringen $2 < |z| < 4$.

Denna gång delar vi upp p i två delar, $p = f + g$, på ett annat sätt:

$$f(z) = 3iz^2 \quad \text{och} \quad g(z) = z^3 - z + (1 + i).$$

På cirkeln $|z| = 2$ är då $|f(z)| = 3|z|^2 = 12$ medan $|g(z)| \leq |z|^3 + |z| + |1 + i| = 8 + 2 + \sqrt{2} < 12$, så $|f(z)| > |g(z)|$ för alla z på denna cirkel. Enligt Rouchés sats har därmed $p(z) = f(z) + g(z)$ lika många nollställen i $|z| \leq 2$ som $f(z) = 3iz^2$, alltså 2 (de har ju inga nollställen på cirkeln $|z| = 2$). Således har $p(z)$ totalt 2 nollställen i $|z| \leq 2$, och sammantaget har $p(z)$ därmed $3 - 2 = 1$ nollställe i $2 < |z| < 4$.

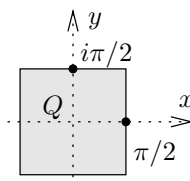
▲

6.12. Exempel. Vi ska bestämma antalet lösningar, räknade med multiplicitet, till ekvationen

$$e^z = 6z \sin z$$

i kvadraten $Q : |x| \leq \pi/2, |y| \leq \pi/2$.

Vi sätter $f(z) = 6z \sin z$ och $g(z) = -e^z$; vi vill bestämma antalet nollställen som $f + g$ har i Q . Vi får genast att $|g(z)| = |e^x e^{iy}| = e^x \leq e^{\pi/2} < 3^2 = 9$ på hela randen ∂Q . Vidare,



$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \quad \text{och} \quad |\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y,$$

så $|\sin z| \geq |\sin(\pi/2)| = 1$ då $x = \pm\pi/2$, medan $|\sin z| \geq |\sinh(\pi/2)| > \sinh 1 = (e - 1/e)/2 > (5/2 - 2/5)/2 > 1$ då $y = \pm\pi/2$, där vi använt att $e > 5/2$. Eftersom dessutom $|z| \geq \pi/2$ på hela randen ∂Q får vi att

$$|f(z)| \geq 6(\pi/2) \cdot 1 > 9 > |g(z)|, \quad z \in \partial Q,$$

och därför har $f(z) + g(z) = 6z \sin z - e^z$ samma antal nollställen i Q som $f(z) = 6z \sin z$. Nollställena till f finns i punkterna $z = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, och i Q finns endast nollstället $z = 0$, och detta har multiplicitet 2 eftersom $f(z) = 6z^2 + \mathcal{O}(z^4) = z^2(6 + \mathcal{O}(z^2))$.

Vår ekvation har således två lösningar i Q , räknade med multiplicitet.

▲

6.13. Exempel (*En mera allmän variant av Rouchés sats). I beviset av Rouchés sats används endast att

$$h_t(z) = f(z) + tg(z) \neq 0, \quad z \in C, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

och detta räcker således för att f och $f + g$ ska ha samma antal nollställen (på och) innanför C . Vi använder detta för att bestämma antalet nollställen som $z^2 + e^{z-1}$ har i cirkelskivan $|z| < 1$, och sätter $f(z) = z^2$ och $g(z) = e^{z-1}$. På cirkeln $|z| = 1$ är $|z^2| = 1$, medan $|e^{z-1}| = e^{x-1} \leq e^0 = 1$ med likhet precis då $z = 1$, så $h_t(z) \neq 0$ för alla z och t med $|z| = 1$ och $0 \leq t \leq 1$, utom möjligen för $z = 1$ och $t = 1$. Men trivialt är också $h_1(1) = 1^2 + 1 \cdot e^{1-1} = 2 \neq 0$, så enligt (den mera allmänna) Rouché har $z^2 + e^{z-1}$ lika många nollställen i $|z| < 1$ som z^2 , d.v.s. två.

▲

6.14. Anmärkning (*Rouchés sats och poler). Beviset för Rouchés sats fungerar även om f och g tillåts ha poler innanför C , men då är $\varphi(t)$ skillnaden mellan antalet nollställen och antalet poler som h_t har innanför C , och denna skillnad blir då densamma för f och $f + g$.

▲

* ÖVNINGAR

- * **6.3** Bestäm antalet nollställen som $p(z) = z^3 + z^2 + z + 2$ har i vänstra halvplanet.
- * **6.4** Hur många nollställen har $p(z) = z^5 + iz^2 - (1 + i)z + (1 - 6i)$ i undre halvplanet?
- * **6.5** Bestäm, för alla reella värden på parametern A , hur många av de totalt fyra nollställena till polynomet $p(z) = z^4 + 3z^3 + 5z^2 + 6z + A$ som finns i vänstra halvplanet $\operatorname{Re} z < 0$, på imaginäraxeln $\operatorname{Re} z = 0$ respektive i högra halvplanet $\operatorname{Re} z > 0$.
- * **6.6** Undersök för alla $A \in \mathbb{R}$ hur många nollställen polynomet $p(z) = z^3 + Az + 1$ har i cirkelskivan $|z| < 1$ genom att först studera argumenttillskottet för $f(z) = z^2 + A + 1/z$ när $z = e^{i\theta}$ genomlöper enhetscirkeln ett varv i positiv led.

- ★ **6.7** Bestäm antalet nollställen som polynomet p har i mängden D då $p(z)$ är
- (a) $z^4 + 5z^3 - 3z - 13$ och D ges av $|z| < 2$
 - (b) $z^3 - iz^2 + (2+i)z + (3-4i)$ och D är den slutna cirkelskivan $|z| \leq 1$
 - (c) $z^5 + 10z - 1$ och D är cirkelringen $1 < |z| < 2$
 - (d) $z^4 + iz^2 + 3z + 1$ och D bestäms av $|z| > 1$
 - (e) $z^4 + z^2 + 3z + 1$ och D är enhetsskivan $|z| < 1$
- ★ **6.8** Bestäm antalet nollställen till f i mängden D om $f(z)$ ges av
- (a) $z^4 - z^3 + 13z^2 - z + 36$ och D är första kvadranten
 - (b) $z^4 + z + 3$ och D är remsan $0 \leq \operatorname{Re} z < 1$
 - (c) $\sin z - 2z^2$ och D ges av $|z| < 3$
 - (d) $z \operatorname{Log} z + z^2 + 1$ och D bestäms av $\operatorname{Re} z > 0$
 - (e) $e^z(z^2 - 3z + 2) - 1$ och D är halvbandet $\operatorname{Re} z > 0, |\operatorname{Im} z| < 1$
- ★ **6.9** Låt φ vara som i beviset av Rouchés sats. Visa att det finns ett tal A , oberoende av t och s , sådant att $|\varphi(t) - \varphi(s)| \leq A|t - s|$, och därmed att φ är kontinuerlig.

6.3 *Routh-Hurwitz metod

Ett viktigt problem i reglerteknik är, som vi tidigare nämnt, att avgöra om ett givet polynom p har alla sina nollställen i vänstra halvplanet $\operatorname{Re} z < 0$. I föregående avsnitt använde vi metoder som bygger på att vi kunde faktorisera minst en av u och v , där $u + iv = p(iy)$, och detta går naturligtvis bra när det är lätt att hitta de reella nollställena till dessa polynom. Vi ska nu presentera en metod som löser detta problem genom att utföra upprepade polynomdivision, vilket är en synnerligen enkel operation som endast kräver ”de fyra räknesätten”.

Låt

$$p(z) = z^d + c_{d-1}z^{d-1} + \dots + c_1z + c_0$$

vara ett givet polynom med godtyckliga komplexa koefficienter, men med högstgradskoefficient 1. (I reglerteknik är koefficienterna vanligen reella, men det utgör ingen större komplikation att tillåta allmänna komplexa koefficienter.) I fortsättningen låter vi också I stå för hela imaginäraxeln, och vi definierar

$$\Delta_I \arg p(z) := \lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_{I_R} \arg p(z),$$

där, som vanligt i detta kapitel, I_R är sträckan från $-iR$ till iR . Om p saknar nollställen på I ger argumentprincipen att p har N nollställen i vänstra halvplanet, där

$$2\pi(N - 0) = \lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_{C_R + I_R} \arg p(z) = \pi d + \Delta_I \arg p(z) \quad (6.2)$$

och där C_R är halvcirkeln från iR till $-iR$ i vänstra halvplanet, som i Exempel 6.8. Återstoden av detta avsnitt handlar om hur man beräknar $\Delta_I \arg p(z)$ på ett enkelt och systematiskt sätt.

För att kunna hantera polynom med jämna och udda gradtal d på ett likartat sätt multiplicerar vi p med en potens av i och sätter

$$\tilde{p}(z) = i^{1-d} p(z)$$

så att

$$\tilde{p}(iy) = i^{1-d} p(iy) = iy^d + \{\text{termer av lägre gradtal i } y\} = \xi(y) + i\eta(y),$$

där ξ och η är så kallade **reella polynom**, alltså polynom med reella koefficienter, för vilka $\deg \xi < \deg \eta = d$ och $\eta(y) = y^d + \{\text{termer av lägre gradtal}\}$; här kan ξ vara nollpolynomet. Trivialt har $\tilde{p}$ och p samma nollställen, och de har samma argumenttillskott längs kurvor.

6.15. Definition (Cauchyindex). Låt $R(y)$ vara en kvot av reella polynom. Med Cauchy-indexet för R , $\text{ind } R$, menas heltalet

$$\text{ind } R = (\text{antalet gånger } R(y) \text{ hoppar från } -\infty \text{ till } +\infty) \\ - (\text{antalet gånger } R(y) \text{ hoppar från } +\infty \text{ till } -\infty)$$

då y genomlöper $]-\infty, +\infty[$ i växande riktning.

6.16. Exempel. Om

$$R(y) = \frac{y^4 - 2y - 1}{y^2(y^2 + 1)(y - 1)(y - 2)^3}$$

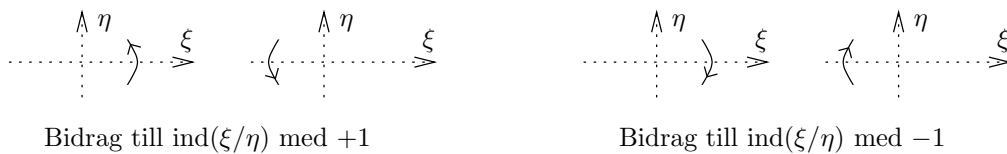
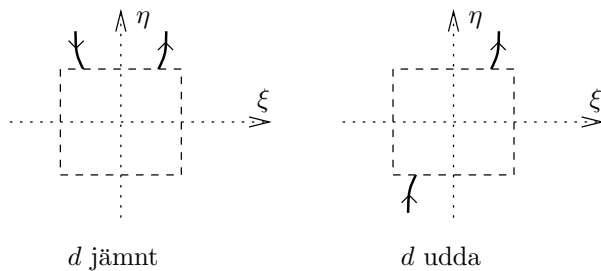
är nämnaren noll vid $y = 0$, där $R(y)$ inte hoppar alls; vid $y = 1$, där $R(y)$ hoppar från $-\infty$ till $+\infty$; och vid $y = 2$, där $R(y)$ hoppar från $-\infty$ till $+\infty$; således är $\text{ind } R = 2 - 0 = 2$. ▲

6.17. Hjälpsats. Om p saknar nollställen på imaginäraxeln, så är

$$\Delta_I \arg p(z) = \Delta_I \arg \tilde{p}(z) = \pi \text{ind}(\xi/\eta).$$

Bevis. Eftersom $\text{grad } \xi < \text{grad } \eta$ får vi att $\xi/\eta \rightarrow 0$ då $y \rightarrow \pm\infty$, d.v.s. att η drar mer än ξ .

Då $|y|$ är stort får vi vidstående principiella skisser för jämnt respektive udda d ; tecknet på ξ kan vara annat än i skisserna, men det påverkar inte resonemanget. Inuti den streckade fyrkanten passerar kurvan ξ -axeln ett jämnt respektive udda antal gånger, och det är precis vid sådana passager som vi får bidrag till $\text{ind}(\xi/\eta)$; observera att passagerna aldrig kan ske genom origo eftersom p saknar nollställen på imaginäraxeln. Nedan illustreras de fyra passagemöjligheter som finns:



Notera att $\Delta_I \arg \tilde{p}(z)$ ökar med π för varje förekomst av någon av de två vänstra passagerna, medan $\Delta_I \arg \tilde{p}(z)$ minskar med π för varje förekomst av någon av de två högra passagerna. Påståendet följer. ■

6.18. Definition (Sturmkedja). En ändlig följd av reella polynom $p_0, \dots, p_s$, $s \in \mathbb{N}$, sägs vara en Sturmkedja (på $\mathbb{R}$) om följande två villkor är uppfyllda:

1. $p_s(y) \neq 0$ för alla $y \in \mathbb{R}$.
2. Om $p_k(y_0) = 0$ för något $y_0 \in \mathbb{R}$ och något k , $0 < k < s$, så har $p_{k-1}(y_0)$ och $p_{k+1}(y_0)$ olika tecken, d.v.s. $p_{k-1}(y_0)p_{k+1}(y_0) < 0$.

Om $r_0, \dots, r_s$ är en följd av reella tal definierar vi också

$$T(r_0, \dots, r_s) := \text{antalet teckenväxlingar i följderna } r_0, \dots, r_s,$$

där vi bortser från eventuella nollor som förekommer i följderna. Exempelvis är $T(1, 0, 2) = 0$ och $T(-1, 2, 0, 5, 0, -1) = 2$; eftersom endast tecknen spelar roll skriver vi också $T(+, 0, +) = 0$ respektive $T(-, +, 0, +, 0, -) = 2$. Allmänt gäller olikheterna $0 \leq T(r_0, \dots, r_s) \leq s$.

6.19. Sats (Sturms sats). Om $p_0, \dots, p_s$ är en Sturmkedja och $\mathcal{T}(y) := T(p_0(y), \dots, p_s(y))$, så är

$$\text{ind}(p_1/p_0) = \mathcal{T}(-\infty) - \mathcal{T}(+\infty),$$

där $\mathcal{T}(-\infty) := \lim_{y \rightarrow -\infty} \mathcal{T}(y)$ och $\mathcal{T}(+\infty) := \lim_{y \rightarrow +\infty} \mathcal{T}(y)$.

Bevis. Vi visar först att $\mathcal{T}(y)$ är konstant i varje delintervall $]\alpha, \beta[$ där p_0 saknar nollställen. Om alla p_k saknar nollställen i $]\alpha, \beta[$ är påståendet trivialt, eftersom polynomen är kontinuerliga och därför inte växlar tecken i intervallet. Om å andra sidan $p_k(y_0) = 0$ för något y_0 , $\alpha < y_0 < \beta$, så måste $s > 1$ och $0 < k < s$, eftersom p_0 och p_s saknar nollställen i $]\alpha, \beta[$. Men $p_0, \dots, p_s$ är en Sturmkedja, och därmed är $p_{k-1}(y_0)p_{k+1}(y_0) < 0$, och, på grund av kontinuitet, $p_{k-1}(y)p_{k+1}(y) < 0$ i en hel omgivning $|y - y_0| < \delta$ till y_0 som ryms i $]\alpha, \beta[$, så oavsett tecknet på $p_k(y)$ i denna omgivning uppstår ingen ny teckenväxling i delföljderna $p_{k-1}(y), p_k(y), p_{k+1}(y)$ då $|y - y_0| < \delta$, så $\mathcal{T}(y)$ ändras inte vid y_0 på grund av att $p_k(y_0) = 0$.

Av det vi just visat följer att $\mathcal{T}(y)$ endast kan ändras i nollställena till p_0 . Om $]\alpha, \beta[$ är ett intervall som rymmer alla nollställen till p_0 får vi därför att $\mathcal{T}(-\infty) = \mathcal{T}(\alpha)$ och $\mathcal{T}(+\infty) = \mathcal{T}(\beta)$. Om $p_0(y_0) = 0$ måste $s > 0$ och $p_1(y_0) \neq 0$ (trivialt om $s = 1$ medan vi för $s > 1$ annars finge $p_0(y_0)p_2(y_0) < 0$, motsägelse), och av kontinuitet har p_1 samma tecken i en hel omgivning till y_0 . Av detta ser vi att om $p_1(y)/p_0(y)$ hoppar från $-\infty$ till $+\infty$ då y växer förbi y_0 så försvinner ett teckenbyte och $\mathcal{T}(y)$ minskar med ett, medan om $p_1(y)/p_0(y)$ hoppar från $+\infty$ till $-\infty$ så tillkommer ett teckenbyte och $\mathcal{T}(y)$ ökar med ett; i övriga fall sker inget hopp i $p_1(y)/p_0(y)$ och heller ingen förändring i $\mathcal{T}(y)$. Av detta kan vi därför dra slutsatsen att $\text{ind}(p_1/p_0) = \mathcal{T}(\alpha) - \mathcal{T}(\beta) = \mathcal{T}(-\infty) - \mathcal{T}(+\infty)$. ■

Vi konstruerar nu en följd av polynom $p_0, \dots, p_s$ utgående från η och ξ . Vi sätter först $p_0 = \eta$. Om ξ är nollpolynomet är vi klara, och vi sätter $s = 0$. I annat fall sätter vi $p_1 = \xi$ och utför polynomdivisionen p_0/p_1 . Om denna går jämnt upp, d.v.s. om $p_0 = q_1 p_1$ för något reellt polynom q_1 , är vi färdiga, och vi sätter $s = 1$. I annat fall bestämmer vi successivt nya reella polynom $p_2, \dots, p_s$, $s \geq 2$, genom upprepad polynomdivision:

$$\frac{p_{k-1}}{p_k} = q_k - \frac{p_{k+1}}{p_k}, \quad \text{d.v.s.} \quad p_{k-1} = q_k p_k - p_{k+1}, \quad k = 1, \dots, s-1, \quad (6.3)$$

där således q_k är kvoten och $-p_{k+1}$ resten vid divisionen p_{k-1}/p_k , och divisionen $p_{s-1}/p_s = q_s$ är den första som går jämnt upp. (Denna divisionsalgoritm brukar kallas **Euklides algoritm** med den lilla skillnaden att vi betecknar resten med $-p_{k+1}$ i stället för p_{k+1} .)

6.20. Exempel. Låt

$$p(z) = z^4 + 6z^3 + 15z^2 + 18z + 11.$$

Vi sätter $\xi + i\eta = \tilde{p}(iy) = ip(iy) = (6y^3 - 18y) + i(y^4 - 15y^2 + 11)$, $p_0 = \eta$ och $p_1 = \xi$. Upprepad

division enligt ovan ger att

$$\begin{aligned} p_0 &= y^4 - 15y^2 + 11; \\ p_1 &= 6y^3 - 18y; \\ y^4 - 15y^2 + 11 &= \frac{y}{6}(6y^3 - 18y) - (12y^2 - 11), & p_2 &= 12y^2 - 11; \\ 6y^3 - 18y &= \frac{y}{2}(12y^2 - 11) - \frac{25y}{2}, & p_3 &= \frac{25y}{2}; \\ 12y^2 - 11 &= \frac{24y}{25} \cdot \frac{25y}{2} - 11, & p_4 &= 11; \end{aligned}$$

och här upphör processen. ▲

6.21. Proposition. Låt $p_0, \dots, p_s$ vara den följd av reella polynom som konstruerats ur η och ξ ovan. Då är p_s gemensam faktor i alla p_k , och om $s > 0$ så är p_s största gemensamma faktorn i η och ξ ; speciellt är $p(iy_0) = 0$ för något $y_0 \in \mathbb{R}$ om och endast om $p_s(y_0) = 0$.

Vidare, följderna är en Sturmkedja om och endast om p saknar nollställen på imaginäraxeln, d.v.s. om och endast om p_s saknar reella nollställen.

Bevis. Av konstruktionen följer å ena sidan att p_s är gemensam faktor i alla p_k , $k = 0, \dots, s$, och speciellt i η och ξ om $s > 0$. Om $s > 0$ måste vi å andra sidan visa att varje polynom ν som är gemensam faktor i η och ξ måste vara en faktor i p_s . Divisionsalgoritmen tillämpad på polynomen η/ν och ξ/ν ger samma kvoter q_k men resterna $-r_k$, där entydigheten för polynomdivision ger att $-r_k\nu = -p_k$, så ν är en faktor i alla p_k och speciellt i p_s . Sammantaget visar detta att p_s är största gemensamma faktorn i η och ξ .

Om $p_s(y_0) = 0$ för något $y_0 \in \mathbb{R}$, så kan $p_0, \dots, p_s$ inte vara en Sturmkedja, enligt villkor 1 i Definition 6.18. För att bevisa den andra riktningen antar vi i fortsättningen att polynomet p_s saknar reella nollställen; då är villkor 1 automatiskt uppfyllt. Om $s < 2$ är villkor 1 det enda som behöver kontrolleras, och vi är klara. Om $s \geq 2$ återstår det att kontrollera villkor 2. Om $p_k(y_0) = 0$ för något $y_0 \in \mathbb{R}$ och något k , $0 < k < s$, så får vi från divisionsalgoritmen (6.3) att $p_{k-1}(y_0) = q_k(y_0)p_k(y_0) - p_{k+1}(y_0) = -p_{k+1}(y_0)$, och därmed gäller olikheten $p_{k-1}(y_0)p_{k+1}(y_0) < 0$, såvida inte $p_{k+1}(y_0) = 0$. Men om även $p_{k+1}(y_0) = 0$ så följer successivt $p_{k+1}(y_0) = 0, \dots, p_s(y_0) = 0$, och den sista likheten här motsäger antagandet att p_s saknar reella nollställen. Alltså gäller även villkor 2, och vi har en Sturmkedja. ■

6.22. Sats. Låt

$$p(z) = z^d + c_{d-1}z^{d-1} + \dots + c_1z + c_0$$

vara ett polynom av grad $d \geq 0$ med komplexa koefficienter, och låt $p_0, \dots, p_s$ vara den följd av reella polynom

$$p_k(y) = a_{k0}y^{d_k} + a_{k1}y^{d_k-1} + \dots + a_{kd_k}, \quad a_{k0} \neq 0, \quad k = 0, \dots, s,$$

som konstruerades ovan. Då saknar p nollställen på imaginäraxeln om och endast om $p_s(y) \neq 0$ för alla $y \in \mathbb{R}$, och i detta fall bestäms antalet nollställen N som p har i vänstra halvplanet $\operatorname{Re} z < 0$ av sambandet

$$2N = d + T((-1)^{d_0}a_{00}, \dots, (-1)^{d_s}a_{s0}) - T(a_{00}, \dots, a_{s0}). \quad (6.4)$$

Bevis. Att p saknar nollställen på imaginäraxeln om och endast om $p_s(y) \neq 0$ för alla $y \in \mathbb{R}$, och att detta är ekvivalent med att följderna $p_0, \dots, p_s$ är en Sturmkedja, är en del av Proposition 6.21.

Om p saknar nollställen på imaginäraxeln så ger (6.2), Hjälpssats 6.17 och Sats 6.19 därför att

$$2\pi(N - 0) = \pi d + \Delta_I \arg p(z) = \pi d + \pi \operatorname{ind}(p_1/p_0) = \pi d + \pi(\mathcal{T}(-\infty) - \mathcal{T}(+\infty)),$$

och eftersom tecknet för $p_k(y)$ är samma som tecknet för a_{k0} för stora positiva y men samma som tecknet för $(-1)^{d_k} a_{k0}$ för stora negativa y följer formel (6.4). ■

6.23. Exempel. Vi använder metoden på polynomet

$$p(z) = z^3 + iz^2 + (2 + i)z - 3$$

som vi studerade i Exempel 6.5. På imaginäraxeln är $p(iy) = (-y - 3) + i(-y^3 - y^2 + 2y)$, så

$$\xi + i\eta = \tilde{p}(iy) = -p(iy) = (y + 3) + i(y^3 + y^2 - 2y).$$

Vi sätter $p_0 = \eta = y^3 + y^2 - 2y$ och $p_1 = \xi = y + 3$. Divisionsalgoritmen stoppar redan efter ett steg:

$$\begin{aligned} p_0 &= y^3 + y^2 - 2y; \\ p_1 &= y + 3; \\ y^3 + y^2 - 2y &= (y^2 - 2y + 4)(y + 3) - 12, & p_2 &= 12. \end{aligned}$$

Eftersom p_2 saknar reella nollställen ger insättning i (6.4) att

$$2N = 3 + T(-1, -1, 12) - T(1, 1, 12) = 3 + T(-, -, +) - T(+, +, +) = 3 + 1 - 0 = 4,$$

så $N = 2$, och p har därmed två nollställen i vänstra halvplanet och inget på imaginäraxeln. ▲

6.24. Exempel (Nollställe på imaginäraxeln). Om

$$p(z) = z^5 + 2iz^4 + z^2 + (5 + 2i)z + 10i$$

blir $\tilde{p}(iy) = p(iy) = (-y^2 - 2y) + i(y^5 + 2y^4 + 5y + 10)$, och vi får polynomen

$$p_0 = y^5 + 2y^4 + 5y + 10, \quad p_1 = -y^2 - 2y \quad \text{och} \quad p_2 = -5y - 10,$$

som också är sista polynomet i följderna ($s = 2$) eftersom divisionen $p_1/p_2 = y/5$ går jämnt upp. Dock är $p_2(-2) = 0$, så följderna p_0, p_1, p_2 är ingen Sturmkedja, men vi vet i alla fall att $-2i$ är ett enkelt nollställe till p eftersom -2 är ett enkelt nollställe till p_s . Faktorisering ger att $p(z) = (z + 2i)(z^4 + z + 5)$, och vi får undersöka $z^4 + z + 5$, som visar sig ha två nollställen i vänstra halvplanet och inget på imaginäraxeln, så p har två nollställen i vänstra halvplanet och ett på imaginäraxeln. ▲

6.25. Följsats (Routh-Hurwitz kriterium). Alla nollställen till p finns i vänstra halvplanet $\operatorname{Re} z < 0$ om och endast om (i) gradtalen för p_k faller med ett i varje steg; (ii) det sista polynomet p_s är en konstant $\neq 0$; och (iii) alla högstgradskoefficienter $a_{k0} > 0$.

Bevis. Om p_s har ett reellt nollställe, så har p ett nollställe på imaginäraxeln, och p har därmed inte alla sina nollställen i $\operatorname{Re} z < 0$; i detta fall är villkor (ii) inte uppfyllt (än mindre (i), (ii) och (iii) samtidigt).

Om å andra sidan p_s saknar reella nollställen, så ges antalet nollställen N till p i $\operatorname{Re} z < 0$ av (6.4), och från detta samband får vi olikheterna

$$2N \stackrel{(1)}{\leq} d + s - 0 \stackrel{(2)}{\leq} d + d - 0 = 2d.$$

Eftersom $a_{00} = 1 > 0$ ser vi att likhet i olikhet (1) råder precis då alla $a_{k0} > 0$ och varannan d_k är jämn, varannan udda. Vidare, från divisionsalgoritmen följer att gradtalen $d_0, \dots, d_s$ för polynomen $p_0, \dots, p_s$ är strängt avtagande, och därmed att $s \leq d_0 = d$, d.v.s. olikhet (2), och likhet råder här precis då gradtalen d_k faller med ett i varje steg och p_s är en konstant $\neq 0$ (så att $d_s = 0$). Sammantaget ser vi därför att $N = d$ precis då (i), (ii) och (iii) gäller samtidigt. ■

6.26. Exempel. Vi återvänder till polynomet $p(z) = z^4 + 6z^3 + 15z^2 + 18z + 11$ i Exempel 6.20; där fick vi $p_0 = y^4 - 15y^2 + 11$, $p_1 = 6y^3 - 18y$, $p_2 = 12y^2 - 11$, $p_3 = 25y/2$ och $p_4 = 11$. Vi ser att alla krav i Följdsats 6.25 är uppfyllda, och alltså finns alla nollställen till p i vänstra halvplanet $\operatorname{Re} z < 0$. ▲

6.27. Anmärkning. I litteraturen är p oftast ett reellt polynom. Då är den ena av p_0 och p_1 jämn och den andra udda, och divisionsalgoritmen ger oss $p_0, p_2, p_4, \dots$ som är av det ena slaget och $p_1, p_3, p_5, \dots$ som är av det andra slaget. Vi kan därför skriva våra polynom p_k i formen

$$p_k(y) = a_{k0}y^{d-k} + a_{k2}y^{d-k-2} + a_{k4}y^{d-k-4} + \dots, \quad k = 0, \dots, s,$$

där $a_{00} = 1$. Låt dessa koefficienter för p_0 och p_1 utgöra de två översta raderna i en matris (om p_0 är jämn och p_1 udda fyller vi ut raden för p_1 med en avslutande nolla) och fyll sedan på med rader för övriga polynom, vilkas koefficienter ges av determinantformeln

$$a_{k+2,l} = \frac{1}{a_{k+1,0}} \begin{vmatrix} a_{k,0} & a_{k,l+2} \\ a_{k+1,0} & a_{k+1,l+2} \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, d-2, \quad l = 0, 2, 4, \dots;$$

de element som förekommer i denna formel är inramade i matrisen nedan:

$$\begin{pmatrix} \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \boxed{a_{k,0}} & \dots & a_{k,l} & \boxed{a_{k,l+2}} & \dots \\ \boxed{a_{k+1,0}} & \dots & a_{k+1,l} & \boxed{a_{k+1,l+2}} & \dots \\ & & \boxed{a_{k+2,l}} & & \end{pmatrix}.$$

Denna algoritm fungerar hela vägen – i meningen att elementen i matrisens första kolonn samtliga är skilda från noll – precis då gradtalen faller med ett i varje steg och $s = d$. Enligt Följdsats 6.25 finns alla nollställen i vänstra halvplanet $\operatorname{Re} z < 0$ precis då alla dessa element är positiva.

Metoden ovan tillämpad på polynomet i Exempel 6.26 ger matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & -15 & 11 \\ 6 & -18 & 0 \\ 12 & -11 & 0 \\ 25/2 & 0 & 0 \\ 11 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eftersom alla element i första kolonnen är positiva finns alla nollställen i vänstra halvplanet. ▲

★ ÖVNINGAR

- ★ **6.10** Bestäm följderna av reella polynom $p_0, \dots, p_s$ som hör till polynomet p enligt divisionsalgoritmen (6.3), avgör om följderna är en Sturmkedja, och bestäm antalet nollställen som p har i vänstra halvplanet $\operatorname{Re} z < 0$ och på imaginäraxeln $\operatorname{Re} z = 0$, om $p(z)$ är
- (a) $z^3 + z^2 - 1$ (b) $z^5 + 3z^2 + 6z + 2$ (c) $z^5 + z^4 + 10z^3 + 10z^2 + 25z + 25$
 - (d) $z^7 + 2z^6 + 3z^5 + 2z^4 + 4z^3 + z^2 + 5z + 6$ (e) $z^4 + (1+i)z^3 + (2-i)z^2 + 3z - i$
 - (f) $z^5 + (2+i)z^4 + (-1+2i)z^3 + (-5+2i)z^2 + (-3-i)z + (2-2i)$
 - (g) $z^6 + 2z^5 + (-3+3i)z^3 + (-1+4i)z^2 + (1+i)z + (-2-2i)$
 - (h) $z^8 + z^7 + (-1-2i)z^5 - 2iz^4 + iz^3 + 3iz^2 - i$

6.4 *Schur-Cohns metod

Ett viktigt problem i tidsdiskret reglerteknik är att avgöra om ett givet polynom p saknar nollställen i den slutna enhetsskivan $|z| \leq 1$. Vi ska här presentera en förhållandevis enkel metod som löser detta problem.

Låt $\mathcal{P}_n$ stå för (det komplexa vektorrummet av) alla polynom av grad högst n , där $n \in \mathbb{N}$. Om $p \in \mathcal{P}_n$ kan vi alltså skriva

$$p(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{n-1} z^{n-1} + c_n z^n, \quad c_0, \dots, c_n \in \mathbb{C}. \quad (6.5)$$

(I reglerteknik är koefficienterna vanligen reella, men lika lite som för Routh-Hurwitz metod utgör det någon större komplikation att tillåta allmänna komplexa koefficienter.)

6.28. Hjälpssats. Låt $p \in \mathcal{P}_n$ för något $n \geq 1$ vara givet av (6.5). Då gäller följande implikationer:

$$|c_0| > |c_1| + \dots + |c_n| \quad \implies \quad p(z) \neq 0 \text{ för alla } z \text{ med } |z| \leq 1 \quad \implies \quad |c_0| > |c_n|.$$

Bevis. Antag att $|c_0| > |c_1| + \dots + |c_n|$. Om $|z| \leq 1$ får vi i så fall att $|c_1 z + \dots + c_n z^n| \leq |c_1 z| + \dots + |c_n z^n| \leq |c_1| + \dots + |c_n| < |c_0|$, varför $|p(z)| \geq |c_0| - |c_1 z + \dots + c_n z^n| > 0$, och därmed är $p(z) \neq 0$ för dessa z .

Antag att $p(z) \neq 0$ för alla z med $|z| \leq 1$. Då är speciellt $c_0 = p(0) \neq 0$, och vi får två fall: (i) Om $c_n = 0$ så är trivialt $|c_0| > |c_n|$ och vi är klara. (ii) Om $c_n \neq 0$ så är $\text{grad } p = n$ och $p(z) = c_n(z - z_1) \dots (z - z_n)$, där $z_1, \dots, z_n$ är polynomets nollställen. Men då är $c_0 = p(0) = c_n(-z_1) \dots (-z_n)$, och eftersom $|z_k| > 1$ för $k = 1, \dots, n$ och $n \geq 1$ följer det att $|c_0| > |c_n|$ även i detta fall. ■

När $n \geq 2$ finns det naturligtvis många polynom p som uppfyller det nödvändiga villkoret $|c_0| > |c_n|$ men inte det tillräckliga villkoret $|c_0| > |c_1| + \dots + |c_n|$ för att p ska sakna nollställen i $|z| \leq 1$. För att komma åt dessa visar det sig användbart att införa det s.k. **reciproka polynomet** $R_n p \in \mathcal{P}_n$ till p i (6.5) enligt

$$(R_n p)(z) = z^n \cdot \overline{p(1/\bar{z})} = \bar{c}_n + \bar{c}_{n-1} z + \dots + \bar{c}_1 z^{n-1} + \bar{c}_0 z^n.$$

På enhetscirkeln $\mathbb{T}$, där ju $1/\bar{z} = z$, har $R_n p$ samma belopp som p , ty

$$|(R_n p)(z)| = \left| z^n \cdot \overline{p(1/\bar{z})} \right| = |p(z)|, \quad |z| = 1. \quad (6.6)$$

Idén är att konstruera en linjärkombination av p och $R_n p$ som saknar z^n -term, och därmed gå från det större rummet $\mathcal{P}_n$ till det mindre rummet $\mathcal{P}_{n-1}$, och därför definierar vi den s.k. **Schur-transformen** $S_n p \in \mathcal{P}_{n-1}$ av p enligt

$$(S_n p)(z) = \bar{c}_0 p(z) - c_n (R_n p)(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (\bar{c}_0 c_k - c_n \bar{c}_{n-k}) z^k, \quad n \geq 1.$$

Från (6.6) får vi att varje nollställe till p på $\mathbb{T}$ också är nollställe till $R_n p$ och därför också till $S_n p$; dessutom är $(S_n p)(0) = |c_0|^2 - |c_n|^2 \in \mathbb{R}$.

Vi bildar nu en följd av polynom $p_0, p_1, \dots, p_n$ som tillhör allt mindre rum ($p_k \in \mathcal{P}_{n-k}$) utgående från $p \in \mathcal{P}_n$: Först sätter vi $p_0 = p$, och sedan successivt $p_1 = S_n p_0$, $p_2 = S_{n-1} p_1$, $\dots$, $p_n = S_1 p_{n-1}$; det sista polynomet p_n tillhör alltså $\mathcal{P}_0$ och är därför konstant.

6.29. Exempel. Låt $p = 3 + iz - 2z^2 + z^3$, där alltså $p \in \mathcal{P}_3$. Konstruktionen ovan ger $p_0 = p$, $R_3 p_0 = 1 - 2z - iz^2 + 3z^3$, och därmed successivt

$$p_1 = S_3 p_0 = 3(3 + iz - 2z^2 + z^3) - 1(1 - 2z - iz^2 + 3z^3) = 8 + (2 + 3i)z + (-6 + i)z^2;$$

$$\begin{aligned} p_2 &= S_2 p_1 = 8(8 + (2 + 3i)z + (-6 + i)z^2) - (-6 + i)((-6 - i) + (2 - 3i)z + 8z^2) \\ &= 27 + (25 + 4i)z; \end{aligned}$$

$$p_3 = S_1 p_2 = 27(27 + (25 + 4i)z) - (25 + 4i)((25 - 4i) + 27z) = 88.$$

▲

6.30. Sats (Schur-Cohns kriterium). Antag att $p_0 = p \in \mathcal{P}_n$ för något $n \geq 1$, och låt $p_1 = S_n p_0$, $p_2 = S_{n-1} p_1$, $\dots$, $p_{n-1} = S_2 p_{n-2}$, och slutligen $p_n = S_1 p_{n-1}$. Då saknar polynomet p nollställen i den slutna enhetsskivan $|z| \leq 1$ om och endast om $p_k(0) > 0$ för $k = 1, \dots, n$.

Bevis. Vi visar först följande påstående: Om $k \in \{0, \dots, n-1\}$, p_k saknar nollställen på $\mathbb{T}$ och $p_{k+1}(0) > 0$, så har p_k och p_{k+1} lika många nollställen i $|z| \leq 1$. Låt nämligen $p_k(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \dots + \gamma_{n-k} z^{n-k}$. Då är $p_{k+1} = \bar{\gamma}_0 p_k - \gamma_{n-k} R_{n-k} p_k$, och speciellt är $p_{k+1}(0) = |\gamma_0|^2 - |\gamma_{n-k}|^2$, så $|\gamma_0| > |\gamma_{n-k}|$. Men detta innebär enligt (6.6), eftersom $p_k \neq 0$ på $\mathbb{T}$, att $|\bar{\gamma}_0 p_k(z)| > |\gamma_{n-k} p_k(z)| = |\gamma_{n-k} R_{n-k} p_k(z)|$ för alla $z \in \mathbb{T}$, så enligt Rouchés sats (Följsats 6.10) har p_{k+1} lika många nollställen i $|z| \leq 1$ som p_k .

Antag nu att p_0 saknar nollställen i $|z| \leq 1$. Enligt Hjälpssats 6.28 är då $|c_0| > |c_n|$ och därmed är $p_1(0) = (S_n p_0)(0) = |c_0|^2 - |c_n|^2 > 0$. Eftersom p_0 saknar nollställen på $\mathbb{T}$ ger resonemanget i första stycket att p_1 har lika många nollställen i $|z| \leq 1$ som p_0 , alltså inga alls. Om $n \geq 2$ kan vi därför upprepa resonemanget med $p_1 \in \mathcal{P}_{n-1}$ i stället för p_0 och få att $p_2(0) > 0$ o.s.v., och efter ändligt många steg får vi slutligen även att $p_n(0) > 0$.

Antag omvänt att $p_k(0) > 0$ för $k = 1, \dots, n$. Då har p_n , som är en konstant, inga nollställen i $|z| \leq 1$, och därför inte heller på $\mathbb{T}$. Eftersom $p_n = S_1 p_{n-1}$ saknar också p_{n-1} nollställen på $\mathbb{T}$, och enligt första stycket har p_{n-1} därför lika många nollställen i $|z| \leq 1$ som p_n , alltså inga alls. Vi kan upprepa argumentet med $p_{n-1} \in \mathcal{P}_1$ i stället för p_n och få att p_{n-2} saknar nollställen i $|z| \leq 1$, och efter ändligt många steg får vi slutligen att p_0 saknar nollställen i $|z| \leq 1$. ■

6.31. Exempel. En direkt tillämpning av satsen på polynomet i Exempel 6.29 ger alltså att det polynomet saknar nollställen i $|z| \leq 1$ eftersom $p_k(0) > 0$ för $k = 1, 2, 3$. ▲

6.32. Anmärkning (Om värdet på n). Vi kräver inte att polynomet $p \in \mathcal{P}_n$ verkligen har grad n , alltså att $c_n \neq 0$, när vi konstruerar följden $p_0, p_1, \dots, p_n$, även om det är naturligt att göra det. Polynomet p i Exempel 6.29 ligger också i $\mathcal{P}_4$, t.ex., och med $n = 4$ får vi i stället följden p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 , där $p_0 = p \in \mathcal{P}_4$ och $p_1 = S_4 p_0 = 3p_0 \in \mathcal{P}_3$, medan p_2, p_3, p_4 är positiva multipler av polynomen p_1, p_2, p_3 i Exempel 6.29, så $p_k(0) > 0$ för $k = 1, 2, 3, 4$. ▲

6.33. Anmärkning. Det finns även en någorlunda enkel metod att bestämma antalet nollställen som p har i $|z| \leq 1$, och den fungerar ifall $p_k(0) \neq 0$ för $k = 1, \dots, n$, se t.ex. Peter Henrici, *Applied and computational complex analysis, Volume 1: Power series—integration—conformal mapping—location of zeros*, Wiley (1974). Dessvärre kan $p_k(0)$ vara 0 för något k även om p saknar nollställen på $\mathbb{T}$; exempelvis är detta fallet för $p(z) = (z+1/2)(z+2) = 1+5z/2+z^2$ som ger $p_1(0) = 0$. Detta är en skillnad gentemot Routh-Hurwitz metod, som ju alltid fungerar ifall det givna polynomet saknar nollställen på imaginäraxeln. ▲

* ÖVNINGAR

* **6.11** Bestäm följden av komplexa polynom $p_1, \dots, p_n$ som hör till polynomet p enligt Schur-Cohns metod, och avgör ifall p saknar nollställen i $|z| \leq 1$, om $p(z)$ är

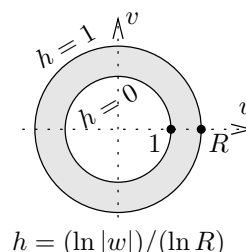
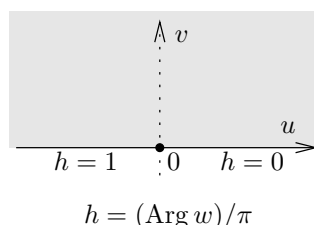
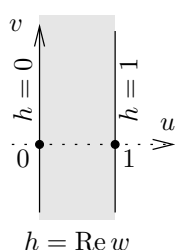
- (a) $3 - z + z^2 + z^3 + z^4$ (b) $2i + (1+i)z - iz^2 + z^3$

7 Möbiusavbildningar m.m.

Vi påminner om att en funktion h är harmonisk om $\Delta h = h''_{xx} + h''_{yy} = 0$, och att real- och imaginärdelarna av analytiska funktioner är harmoniska, se Sats 1.33 på s. 15. Många fysikaliska storheter är harmoniska, t.ex. temperaturen T vid stationär temperaturfördelning och den elektrostatiske potentialen V , och man vill därför ofta hitta harmoniska funktioner i olika områden Ω och med bestämda randvärden.

7.1. Exempel (Harmoniska funktioner i tre standardsituationer). I nedanstående tre enkla (skuggade) områden anges begränsade harmoniska funktioner h med värde 0 respektive 1 på olika delar av randen.

- (a) Remsan $0 < \operatorname{Re} w < 1$ (b) Övre halvplanet $\operatorname{Im} w > 0$ (c) Cirkelringen $1 < |w| < R$



Att de två första funktionerna är harmoniska följer av att w och $\operatorname{Log} w$ är analytiska i respektive område och att $\operatorname{Arg} w = \operatorname{Im}(\operatorname{Log} w)$. Vidare, $\ln |w| = \operatorname{Re}(\widetilde{\operatorname{Log} w})$ för varje gren till $\log w$, och eftersom det är en lokal egenskap att vara harmonisk följer det att $\ln |w|$ är harmonisk, t.ex. genom att dela upp ringen i flera delar och välja olika grenar till $\log w$ i dessa delar; alternativt kan man naturligtvis genom direkt uträkning visa att $h''_{uu} + h''_{vv} = 0$, jfr Övning 1.35 på s. 17.

Om h är harmonisk så är även $Ah + B$ harmonisk när A och B är konstanter. Det är därför en smal sak att hitta harmoniska funktioner med andra konstanta randvärden i ovanstående situationer, se Övning 7.1. ▲

Det är naturligtvis sällan man har så enkla områden som i exemplet ovan. Ofta kan man dock avbilda ett besvärligare område Ω på ett enklare, t.ex. på något av de tre ovan nämnda, med hjälp av en analytisk funktion f . Att detta är användbart när det gäller att hitta harmoniska funktioner beror på följande sats:

7.2. Sats (Harmonicitet bevaras vid analytisk avbildning). Om $w = f(z)$ är analytisk och $h(w) = h(u, v)$ är harmonisk, så är sammansättningen $\psi(x, y) = h(f(z))$ harmonisk.

Bevisskiss. Vanliga reella kedjeregeln tillämpad på $\psi(x, y) = h(u(x, y), v(x, y))$ ger, efter en del arbete, $\Delta \psi = h''_{uu} |\nabla u|^2 + 2h''_{uv} \nabla u \cdot \nabla v + h''_{vv} |\nabla v|^2 + h'_u \Delta u + h'_v \Delta v$. Att $f = u + iv$ är analytisk medför att $\Delta u = 0 = \Delta v$, att $\nabla u \cdot \nabla v = 0$ (se Proposition 1.30 på s. 14) och att $|\nabla u|^2 = |f'|^2 = |\nabla v|^2$, så $\Delta \psi = (h''_{uu} + h''_{vv}) |f'|^2 = 0$, där den sista likheten följer av att h är harmonisk.

(Se Övning 7.22 för ett alternativt bevis.) ■

En typisk tillämpning av detta kommer vi att se i Exempel 7.33 på s. 166, där vi löser ett elektrostatiske problem i ett område Ω mellan två cirkclar genom att avbilda Ω på en cirkelring.

Vi ska i detta kapitel först se lite närmare på allmänna analytiska avbildningar, för att sedan koncentrera oss på en viktig grupp av sådana avbildningar, nämligen s.k. Möbiusavbildningar.

★ ÖVNINGAR

★ **7.1** Ange harmoniska funktioner i de tre områdena i Exempel 7.1, men ändra randvärdena till C_0 och C_1 i stället för 0 respektive 1.

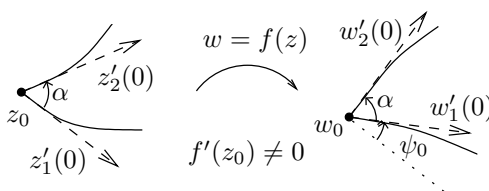
★ **7.2** Genomför alla detaljer i beviset av Sats 7.2

7.1 Allmänt om konforma avbildningar

Låt $z(t)$ vara en $\mathcal{C}^1$ -kurva med $z(0) = z_0$ och $z'(0) \neq 0$; $z'(0)$ är då en tangentvektor till den givna kurvan i punkten z_0 . Om f är analytisk i z_0 och $f'(z_0) \neq 0$, så ger kedjeregeln för $w(t) = f(z(t))$ att $w'(0) = f'(z_0)z'(0) \neq 0$, och $w'(0)$ är i sin tur en tangentvektor till kurvan $w(t)$ i punkten $w(0) = w_0 = f(z_0)$. Om ψ_0 är ett av värdena på $\arg f'(z_0)$ är därmed

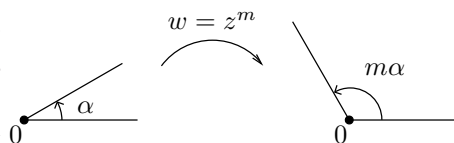
$$\arg w'(0) = \psi_0 + \arg z'(0). \quad (7.1)$$

f vrider alltså tangentvektorn vinkeln ψ_0 , och denna vridningsvinkel är oberoende av själva tangentvektorn. Om vi har två kurvor $z_1(t)$ och $z_2(t)$ genom z_0 , där riktningen för $z'_1(0)$ övergår i riktningen för $z'_2(0)$ vid en vridning vinkeln α , så ser vi att samma vridning – till storlek och orientering – överför riktningen för $w'_1(0)$ till riktningen för $w'_2(0)$.



f bevarar alltså skärningsvinklar mellan kurvor genom z_0 till storlek och orientering, och en avbildning med denna egenskap sägs vara **konform** i z_0 ; tydligen är en analytisk funktion konform i z_0 om $f'(z_0) \neq 0$. (För ett bevis som bygger på funktionalmatrisen, se Övning 1.38 på s. 17. För en omvändning, se Övning 1.41 på s. 18.)

Om däremot $f'(z_0) = 0$ så blir situationen en annan. Ett enkelt men representativt exempel är $f(z) = z^m$ för ett heltal $m \geq 2$ i punkten $z_0 = 0$. I detta fall avbildas strålen $z = re^{i\theta}$, $r \geq 0$, θ fixt, på strålen $w = r^m e^{im\theta}$, $r \geq 0$, och vi inser att skärningsvinklar i 0 bevaras till orientering, men att de m -faldigas.



Vad som händer allmänt bestäms av vilken derivata som är den första som är nollskild:

7.3. Sats (Vinkelförändring vid analytisk avbildning). Antag att f är analytisk i z_0 .

Om $f'(z_0) \neq 0$, så bevarar f skärningsvinklar mellan kurvor genom z_0 till storlek och orientering (f är konform).

Om däremot $f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ men $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ för något heltal $m \geq 2$, så m -faldigas sådana skärningsvinklar medan orienteringen bevaras.

Bevis. Låt $f^{(m)}$, $m \geq 1$, vara den första av $f', f'', \dots$ som är $\neq 0$ i z_0 . Taylorutveckling av f ger att

$$f(z) - f(z_0) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} (z - z_0)^m + \mathcal{O}((z - z_0)^{m+1}) = \left(\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} + \mathcal{O}(z - z_0) \right) (z - z_0)^m,$$

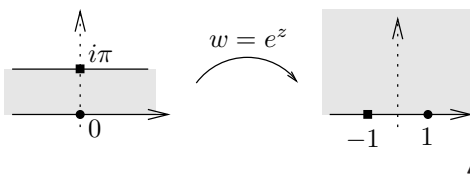
så

$$\arg(f(z) - f(z_0)) = \arg\left(f^{(m)}(z_0) + \mathcal{O}(z - z_0)\right) + m \arg(z - z_0).$$

Eftersom $\arg(z(t) - z_0) \rightarrow \phi_z$ och $\arg(f(z(t)) - f(z_0)) = \arg(w(t) - w_0) \rightarrow \phi_w$ då $t \rightarrow 0^+$, där ϕ_z och ϕ_w är riktningsvinklarna för tangentvektorerna till kurvorna $z(t)$ respektive $w(t)$ i $t = 0$, ser vi därför att $\phi_w = \arg(f^{(m)}(z_0)) + m\phi_z$, vilket är motsvarigheten till sambandet (7.1) ovan i detta allmänna fall. Avbildningen f m -faldigar alltså vinkeln och vrider den sedan ytterligare vinkeln $\arg(f^{(m)}(z_0))$, som är oberoende av kurvan $z(t)$, och påståendet i satsen följer. ■

7.4. Exempel (Exponentialfunktionen: remsa på halvplan). $w = f(z) = e^z$ är konform i hela $\mathbb{C}$ eftersom $f'(z) = e^z \neq 0$ överallt i $\mathbb{C}$.

Vidare, som i Avsnitt 2.1 ser vi att $e^z = e^x e^{iy}$ gör att linjer $x = a$ avbildas på cirklar $|w| = e^a$ (oändligt många varv), medan linjer $y = b$ avbildas på strålar $w = \rho e^{ib}$, $\rho > 0$. Speciellt avbildas remsan $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ konformt på övre halvplanet $\operatorname{Im} w > 0$.

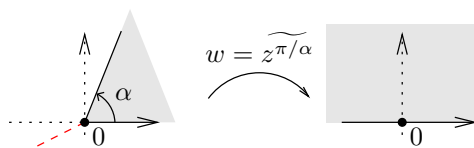


7.5. Exempel (Potensfunktioner: sektor på halvplan). Fixera α , $0 < \alpha < 2\pi$, och låt f vara en gren till den flervärda funktionen $z^{\pi/\alpha} = e^{(\pi/\alpha) \log z} = |z|^{\pi/\alpha} e^{i(\pi/\alpha) \arg z}$, där vi har klippt upp planet någonstans utanför sektorn $0 \leq \theta \leq \alpha$; i det uppklippta planet är f konform. (Om $\alpha = \pi/m$ för något positivt heltal m är $f(z) = z^m$, och inget grenval behövs.)

Om vi väljer den logaritmigen som är reell på positiva realaxeln blir

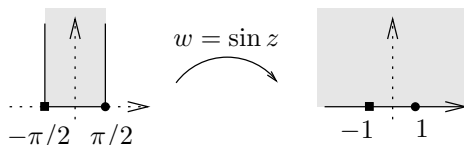
$$f(z) = z^{\pi/\alpha} = |z|^{\pi/\alpha} e^{i(\pi/\alpha)\theta},$$

och strålar $\theta = \theta_0$, där $0 \leq \theta_0 \leq \alpha$, avbildas på strålar $\theta = (\pi/\alpha)\theta_0$ i w -planet, och därmed avbildas det inre av sektorn konformt på övre halvplanet.



7.6. Exempel (*Sinusfunktionen: halvremsa på halvplan). $w = f(z) = \sin z$ är konform i hela $\mathbb{C}$ utom där $f'(z) = \cos z = 0$, d.v.s. utom där $z = \pi/2 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. I dessa undantagspunkter fördubblas skärningsvinklar eftersom dessutom $f''(\pi/2 + n\pi) = -\sin(\pi/2 + n\pi) = \pm 1 \neq 0$.

Vidare, att $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ gör att sträckan $y = b$, $|x| \leq \pi/2$, för $b > 0$ avbildas på halv-ellipsen $(u/\cosh b)^2 + (v/\sinh b)^2 = 1$, $v \geq 0$, medan den för $b = 0$ avbildas på intervallet $-1 \leq u \leq 1$, $v = 0$. Speciellt avbildas halvremsan $|\operatorname{Re} z| < \pi/2$, $\operatorname{Im} z > 0$, konformt på övre halvplanet $\operatorname{Im} w > 0$.



Se också Exempel 2.29 på s. 35.

7.7. Anmärkning (*Riemanns avbildningssats). I ovanstående exempel har vi avbildat några olika områden i $\mathbb{C}$ konformt på övre halvplanet. Man kan visa att om Ω är ett enkelt sammanhängande område i $\mathbb{C}$ (för definition, se Anmärkning 3.31 på s. 54) som inte är hela $\mathbb{C}$, så finns det en funktion f som är analytisk i Ω och som avbildar Ω omvändbart entydigt och konformt på övre halvplanet $\operatorname{Im} w > 0$. Beviset av detta resultat ligger dock utanför ramen för denna text.

I kursen TATA78 Komplex analys fk tas bl.a. s.k. Schwarz-Christoffelavbildningar upp, där man avbildar övre halvplanet på polygoner m.m. (se Kapitel 9).

* ÖVNINGAR

- ★ **7.3** Bestäm alla punkter där f inte är konform, och ange hur f avbildar skärningsvinklar där, om (a) $f(z) = \cos z$ (b) $f(z) = 5z^8 - 8iz^5$

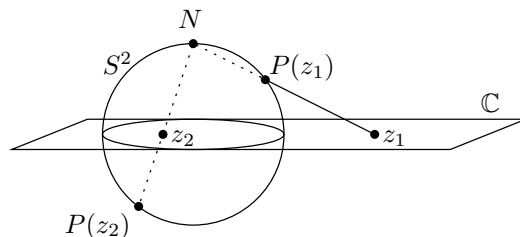
7.2 Något om Riemannsfären

Låt S^2 vara enhetssfären $\{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\}$. Vi identifierar det komplexa talet $z = x + iy$ med punkten $(x, y, 0)$ i sfärens ekvatorsplan $\zeta = 0$. Strålen som utgår från sfärens nordpol $N = (0, 0, 1)$ och passerar $z \in \mathbb{C}$ skär sfären i precis en punkt som vi betecknar med $P(z)$, se figur nedan. På detta sätt avbildar P det komplexa planet $\mathbb{C}$ omvändbart entydigt på $S^2 \setminus \{N\}$, och speciellt avbildas enhetscirkeln $|z| = 1$ på ekvatorn och enhetsskivan $|z| < 1$ på södra halvsfären; t.ex. är $P(0) = (0, 0, -1)$, sydpolen. Enkel geometri ger att

$$P(z) = \left(\frac{2 \operatorname{Re} z}{|z|^2 + 1}, \frac{2 \operatorname{Im} z}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$$

med invers

$$P^{-1}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta},$$



som är en variant av **stereografisk projektion**.

Nordpolen N är alltså inte bild av någon punkt i $\mathbb{C}$, men däremot gäller det att $P(z) \rightarrow N$ om och endast om $|z| \rightarrow +\infty$. Vi inför därför en ny punkt, **(den komplexa) oändlighetspunkten**, som vi betecknar med ∞ och som inte ligger i $\mathbb{C}$, och definierar **det utvidgade komplexa talplanet**

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Vidare definierar vi $P(\infty) = (0, 0, 1)$ och låter $z \rightarrow \infty$ i $\hat{\mathbb{C}}$ betyda att $|z| \rightarrow +\infty$; med dessa tillägg blir $P: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow S^2$ och $P^{-1}: S^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ kontinuerliga.

Vi tänker oss $\hat{\mathbb{C}}$ ibland som det komplexa planet med en extra punkt ∞ , ibland som enhetssfären S^2 (via P); sfären kallas i detta sammanhang för **Riemannsfären**.

Om $f(z)$ är definierat för alla $z \in \mathbb{C}$ med $|z|$ tillräckligt stort (d.v.s. nära ∞) kan vi definiera $f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$, förutsatt att detta gränsvärde existerar som ett komplext tal. Vidare, om f är definierad nära $c \in \hat{\mathbb{C}}$ kan vi definiera $f(c) = \infty$ om $|f(z)| \rightarrow +\infty$ då $z \rightarrow c$, både då $c \in \mathbb{C}$ och då $c = \infty$. Med dessa utvidgade definitioner blir f kontinuerlig i dessa punkter.

7.8. Exempel (Inversion). Låt $f(z) = 1/z$ då $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Vi ser att $|f(z)| \rightarrow +\infty$ då $z \rightarrow 0$, och vi sätter därför $f(0) = \infty$. Vidare ser vi att $f(z) \rightarrow 0$ då $z \rightarrow \infty$, d.v.s. då $|z| \rightarrow +\infty$, och vi sätter därför $f(\infty) = 0$. Med dessa utvidgningar blir $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ kontinuerlig. ▲

7.9. Exempel (Konjugering). Låt $f(z) = \bar{z}$ då $z \in \mathbb{C}$. Eftersom $|f(z)| = |\bar{z}| = |z| \rightarrow +\infty$ då $z \rightarrow \infty$ sätter vi $f(\infty) = \infty$, vilket kan skrivas $\infty = \infty$; komplexkonjugering blir med denna utvidgning en kontinuerlig operation på $\hat{\mathbb{C}}$. ▲

7.10. Exempel. Låt $f(z) = e^z$, $z \in \mathbb{C}$. Eftersom $|f(z)| = e^x$, som saknar gränsvärde – ändligt eller oändligt – då $z \rightarrow \infty$, kan vi inte definiera $f(\infty)$ så att f blir kontinuerlig i ∞ . ▲

7.11. Anmärkning (*Egenskaper i ∞). Man säger att en funktion f (i) är analytisk; (ii) har nollställe av multiplicitet m ; (iii) har pol av ordning m ; respektive (iv) har väsentlig singularitet i $z = \infty$ om funktionen $g(z) = f(1/z)$ har motsvarande egenskaper i $z = 0$. Exempelvis har $1/z^2$ dubbelt nollställe i $z = \infty$ eftersom $1/(1/z)^2 = z^2$ har dubbelt nollställe i $z = 0$; ett polynom $p(z) = z^n + \dots + c_0$ av grad n har pol av ordning n i $z = \infty$ ty $p(1/z) = (1 + \dots + c_0 z^n)/z^n$ har pol av ordning n i $z = 0$; och e^z har väsentlig singularitet i $z = \infty$ ty $e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} 1/(n! z^n)$ har väsentlig singularitet i $z = 0$. (Komplex analys i $\hat{\mathbb{C}}$ studeras i TATA78 Komplex analys fk.) ▲

7.3 Möbiusavbildningar – inledning

Låt

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{där } a, b, c, d \in \mathbb{C} \quad \text{och} \quad ad - bc \neq 0; \quad (7.2)$$

kravet $ad - bc \neq 0$ säkerställer att T inte är en konstant funktion, se omskrivningen (7.3) i beviset av Sats 7.12 nedan. Vi uppfattar T som en avbildning från $\hat{\mathbb{C}}$ till $\hat{\mathbb{C}}$ genom att sätta

$$\begin{cases} T(\infty) = \infty, & \text{om } c = 0, \\ T(\infty) = a/c \text{ och } T(-d/c) = \infty, & \text{om } c \neq 0; \end{cases}$$

med dessa tillägg är $T: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ kontinuerlig. Avbildningar av denna typ kallar vi **Möbiusavbildningar** (eller Möbius, kort och gott).

Eftersom $T'(z) = (ad - bc)/(cz + d)^2 \neq 0$ när $z \neq -d/c$ och $z \neq \infty$ är T konform där (och, kan man visa, även i undantagspunkterna när vi uppfattar T som en avbildning på Riemannsfären).

7.12. Sats (Elementära egenskaper hos Möbiusavbildningar).

- (a) Om S och T är Möbius, så är sammansättningen $S \circ T$ Möbius.
- (b) Om T är Möbius, så existerar inversa avbildningen T^{-1} , och den är också Möbius.
- (c) Varje Möbiusavbildning är en sammansättning av ändligt många av följande elementära Möbiusavbildningar:
 1. Translation $z \mapsto z + z_0$ för fixt $z_0 \in \mathbb{C}$
 2. Skalning/vridning $z \mapsto \sigma z = |\sigma|e^{i \arg \sigma} z$ för fixt $\sigma \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
 3. Inversion $z \mapsto 1/z$
- (d) Om (z_1, z_2, z_3) och (w_1, w_2, w_3) är två uppsättningar av tre olika punkter i $\hat{\mathbb{C}}$, så finns det precis en Möbiusavbildning T sådan att $T(z_k) = w_k$, $k = 1, 2, 3$.

För att bevisa del (d) behöver vi följande hjälpsats:

7.13. Hjälpsats.

- (i) Om T är Möbius och $T(0) = 0$, $T(1) = 1$ och $T(\infty) = \infty$, så är $T(z) = z$ för alla $z \in \hat{\mathbb{C}}$; m.a.o. är $T = I$, identitetsavbildningen.
- (ii) Om (z_1, z_2, z_3) är en uppsättning av tre olika punkter i $\hat{\mathbb{C}}$, så finns det en Möbiusavbildning $T = T_{(z_1, z_2, z_3)}$ sådan att $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = 1$ och $T(z_3) = \infty$.

Bevis. För att bevisa (i) antar vi att $T(z) = (az + b)/(cz + d)$ är en Möbius för vilken $T(0) = 0$, $T(1) = 1$ och $T(\infty) = \infty$. Att $T(\infty) = \infty$ medför att $c = 0$, och därmed att $a \neq 0$ och $d \neq 0$. Vidare, att $T(0) = 0$ medför nu att $b = 0$, så $T(z) = az/d$. Slutligen, att $T(1) = 1$ medför att $a = d$, så $T(z) = z$ för alla $z \in \hat{\mathbb{C}}$.

Beviset av (ii) består helt enkelt i att skriva ner en konkret avbildning $T = T_{(z_1, z_2, z_3)}$:

$$T_{(z_1, z_2, z_3)}(z) = \begin{cases} (z_2 - z_3) \cdot \frac{1}{z - z_3} & \text{om } z_1 = \infty; & 1 \cdot \frac{z - z_1}{z - z_3} & \text{om } z_2 = \infty; \\ \frac{1}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z - z_1}{1} & \text{om } z_3 = \infty; & \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_3} & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

■

Bevis av Sats 7.12. (a) följer av att enkla (matris)räkningar ger att

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad S(\zeta) = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta} \quad \Rightarrow \quad S(T(z)) = \frac{Az + B}{Cz + D}, \quad \text{där} \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

och $AD - BC = (\alpha\delta - \beta\gamma)(ad - bc) \neq 0$, enligt produktsatsen för determinanter.

(b) bevisar vi genom att visa att $T^{-1}(w) = (dw - b)/(-cw + a)$; denna är Möbius eftersom $da - (-b)(-c) = ad - bc \neq 0$, och enkla räkningar ger att $T(T^{-1}(w)) = w$ och $T^{-1}(T(z)) = z$.

(c) följer av att vi kan skriva

$$\frac{az + b}{cz + d} = \begin{cases} \frac{a}{d} \left(z + \frac{b}{a} \right), & c = 0, \\ \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c^2} \cdot \frac{1}{z + d/c}, & c \neq 0, \end{cases} \quad (7.3)$$

som, i båda fallen, är en sammansättning av ändligt många av de uppräknade elementära Möbiusavbildningarna; se Övning 7.4 för detaljer.

För att bevisa (d) tar vi Möbiusavbildningar $T_1 = T_{(z_1, z_2, z_3)}$ och $T_2 = T_{(w_1, w_2, w_3)}$ som avbildar (z_1, z_2, z_3) respektive (w_1, w_2, w_3) på $(0, 1, \infty)$; sådana finns enligt Hjälpssats 7.13 (ii). Sätt $T = T_2^{-1} \circ T_1$. Då är T Möbius enligt (b) och (a), och den avbildar (z_1, z_2, z_3) på (w_1, w_2, w_3) , så existensen är klar. Om nu S är en godtycklig Möbius som avbildar (z_1, z_2, z_3) på (w_1, w_2, w_3) , så är $T_2 \circ S \circ T_1^{-1}$ en Möbius som avbildar $(0, 1, \infty)$ på $(0, 1, \infty)$, så $T_2 \circ S \circ T_1^{-1} = I$ enligt Hjälpssats 7.13 (i), varför $S = T_2^{-1} \circ T_1 = T$, så entydigheten är klar. ■

Beviset ger ett enkelt sätt att bestämma den Möbius $w = T(z)$ som avbildar (z_1, z_2, z_3) på (w_1, w_2, w_3) : Låt, som i beviset, $T_{(z_1, z_2, z_3)}$ och $T_{(w_1, w_2, w_3)}$ avbilda (z_1, z_2, z_3) respektive (w_1, w_2, w_3) på $(0, 1, \infty)$. Eftersom $w = T(z) = T_{(w_1, w_2, w_3)}^{-1}(T_{(z_1, z_2, z_3)}(z))$ ges det sökta sambandet av att

$$T_{(w_1, w_2, w_3)}(w) = T_{(z_1, z_2, z_3)}(z).$$

7.14. Exempel. Vi bestämmer de Möbiusavbildningar som avbildar (a) $(-2, 4, 3)$ på $(1, 0, 2)$ och (b) $z_1 = 2$, $z_2 = 2 + i$ och $z_3 = \infty$ på i tur och ordning $w_1 = 0$, $w_2 = 1$ och $w_3 = -1$.

I (a) gör vi ansatsen

$$\frac{w-1}{w-0} = k \frac{z+2}{z-4}, \quad k \neq 0.$$

Här är de båda leden nämligen 0 då $z = -2$ och $w = 1$, och ∞ då $z = 4$ och $w = 0$. Vi bestämmer sedan konstanten k så att de blir lika även då $z = 3$ och $w = 2$, alltså så att $(2-1)/(2-0) = k(3+2)/(3-4)$, vilket ger att $k = -1/10$. Löser vi sedan ut w får vi att $w = (10z-40)/(11z-38)$.

För att lösa (b) observerar vi att det ofta är en bra idé att i ansatsen använda sig av punkter som är 0 eller ∞ , och i detta fall utnyttjar vi därför att $z = 2 \mapsto w = 0$ och $z = \infty \mapsto w = -1$. Ansatsen blir

$$\frac{w-0}{w+1} = k \frac{z-2}{1}, \quad k \neq 0.$$

Lägg speciellt märke till att högerledet är ∞ då $z = \infty$. Konstanten k bestäms av det tredje och återstående punktparet, $z = 2 + i \mapsto w = 1$, och vi får att $k = -i/2$ och till sist att $w = (z-2)/(2+2i-z)$. ▲

* ÖVNINGAR

* **7.4** Använd omskrivningen i (7.3) för att uttrycka Möbiusavbildningen där som en sammansättning av de elementära Möbiusavbildningarna i Sats 7.12 (c).

* **7.5** Bestäm en Möbiusavbildning $w(z)$ för vilken $z \mapsto w$ enligt

- (a) $-1 \mapsto 0$, $1 \mapsto -1$, $2 \mapsto -3$ (b) $(0, 1, \infty) \mapsto (1, 0, \infty)$ (c) $(1, \infty, -1) \mapsto (\infty, 2, 1)$
 (d) $z_1 = i$, $z_2 = 0$, $z_3 = -1 \mapsto w_1 = -i$, $w_2 = 0$, $w_3 = \infty$

7.4 Möbiusavbildningar och $\hat{\mathbb{C}}$ -cirklar

Med en $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel Γ menar vi en vanlig cirkel C i komplexa planet $\mathbb{C}$, eller en vanlig linje L i $\mathbb{C}$ tillsammans med den komplexa oändlighetspunkten ∞ . Man kan visa att $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkelarna är precis de mängder i $\hat{\mathbb{C}}$ som svarar mot cirklar på Riemannsfären under avbildningen P i Avsnitt 7.2.

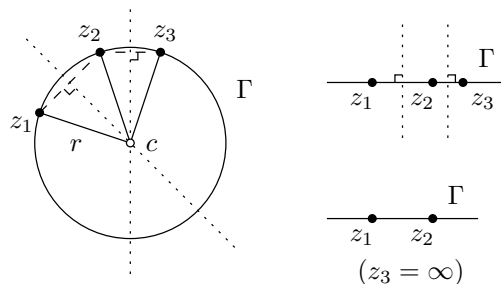
När vi talar om linjer eller om områden av typen $|z-c| > r$ i samband med Möbiusavbildningar är det underförstått att ∞ ingår i linjen respektive i området om inget annat sägs.

Möbiusavbildningar och $\hat{\mathbb{C}}$ -cirklar trivs ihop, som vi nu ska se. Först en enkel observation:

7.15. Proposition ($\hat{\mathbb{C}}$ -cirklar bestäms av tre punkter). Om z_1, z_2, z_3 är tre olika punkter i $\hat{\mathbb{C}}$, så finns det precis en $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel Γ som går genom alla tre.

Bevis. Om ∞ är en av punkterna numrerar vi om så att $z_3 = \infty$, om nödvändigt.

Det finns precis en linje som går genom z_1 och z_2 , och om $z_3 = \infty$ så går denna linje även genom z_3 . Om $z_3 \neq \infty$ drar vi mittpunktsnormalerna till sträckorna $[z_1, z_2]$ och $[z_2, z_3]$, och om de är parallella (d.v.s. tangerar varandra i ∞) går det precis en linje genom z_1, z_2, z_3 medan om de skär varandra i en punkt $c \in \mathbb{C}$ så är c medelpunkt i en entydigt bestämd cirkel genom z_1, z_2, z_3 . ■



7.16. Sats ($\hat{\mathbb{C}}$ -cirklar bevaras under Möbiusavbildningar). Om T är en Möbiusavbildning, så är Γ_z en $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel om och endast om Γ_w är en $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel, där $\Gamma_w = T(\Gamma_z)$, bilden av Γ_z under avbildningen T .

Vidare, om Γ_z är en $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel med en given orientering och $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkeln $\Gamma_w = T(\Gamma_z)$ ges den ärvda orienteringen, så avbildas området till vänster om Γ_z på området till vänster om Γ_w .

Beviset av denna sats underlättas av följande karakterisering av $\hat{\mathbb{C}}$ -cirklar:

7.17. Hjälpssats (Karakterisering av $\hat{\mathbb{C}}$ -cirklar). Varje $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel Γ kan beskrivas med ekvationen

$$A(x^2 + y^2) - 2Bx - 2Cy + D = 0 \quad (7.4)$$

för några reella A, B, C, D som uppfyller olikheten $B^2 + C^2 > AD$, där även punkten $z = \infty$ inkluderas ifall $A = 0$. Omvänt, varje mängd av denna typ är en $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel Γ .

Bevis. Vi ser först att om $A \neq 0$ så ger en kvadratkomplettering att (7.4) är ekvivalent med att $(x - B/A)^2 + (y - C/A)^2 = (B^2 + C^2 - AD)/A^2$.

Om Γ är en cirkel i $\mathbb{C}$ kan den skrivas $|z - c| = r$ för $c \in \mathbb{C}$ och $r > 0$, och vi kan ta $A = 1$, $B = \operatorname{Re} c$, $C = \operatorname{Im} c$ och $D = |c|^2 - r^2$; då är $B^2 + C^2 - AD = r^2 > 0$. Om $\Gamma \setminus \{\infty\}$ är en linje i $\mathbb{C}$ kan den skrivas $ax + by = d$ för några reella a, b, d där a och b ej båda är noll, och vi kan ta $A = 0$, $B = a/2$, $C = b/2$ och $D = d$; då är $B^2 + C^2 - AD = (a/2)^2 + (b/2)^2 > 0$ eftersom inte både a och b är noll.

Antag omvänt att vi har reella tal A, B, C, D som uppfyller olikheten $B^2 + C^2 > AD$. Om $A \neq 0$ så beskriver (7.4) en cirkel $|z - c| = r$ med $c = (B + iC)/A$ och $r = \sqrt{B^2 + C^2 - AD}/|A|$. Om $A = 0$ så beskriver (7.4) en linje $ax + by = d$ med $a = 2B$, $b = 2C$ och $d = D$ eftersom $B^2 + C^2 > 0$ och a och b därför inte kan vara noll samtidigt. ■

Bevis av Sats 7.16. Även T^{-1} är en Möbiusavbildning, så för första delen av satsen räcker det att visa att Γ_w är en $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel om Γ_z är en $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel, eftersom omvändningen sedan följer av att $\Gamma_z = T^{-1}(\Gamma_w)$.

Enligt Sats 7.12 (c) är T en sammansättning av ändligt många translationer, skalningar/vridningar och inversioner. De två förstnämnda avbildar trivialt cirklar på cirklar och linjer på linjer, så det räcker att visa påståendet för inversionen $T(z) = 1/z$. Låt Γ_z beskrivas av A, B, C, D som i Hjälpssats 7.17. Om vi som vanligt skriver $w = u + iv$ och $z = x + iy$ blir, för $z \in \mathbb{C}^*$ och $w \in \mathbb{C}^*$,

$$w = \frac{1}{z} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{u}{u^2 + v^2} \quad \text{och} \quad y = -\frac{v}{u^2 + v^2}$$

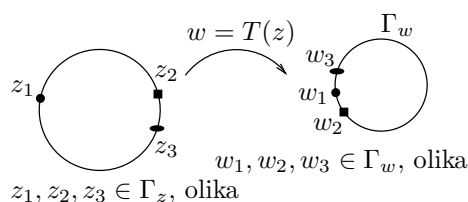
och därmed

$$A(x^2 + y^2) - 2Bx - 2Cy + D = \frac{D(u^2 + v^2) - 2Bu + 2Cv + A}{u^2 + v^2},$$

så speciellt är $A(x^2 + y^2) - 2Bx - 2Cy + D = 0$ precis då $D(u^2 + v^2) - 2Bu + 2Cv + A = 0$. Eftersom $B^2 + (-C)^2 - DA = B^2 + C^2 - AD > 0$ beskriver den senare likheten en $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel i w -planet, enligt Hjälpssats 7.17, med tillägget att $0 \in \Gamma_z \Leftrightarrow D = 0 \Leftrightarrow \infty \in \Gamma_w$ och att $\infty \in \Gamma_z \Leftrightarrow A = 0 \Leftrightarrow 0 \in \Gamma_w$.

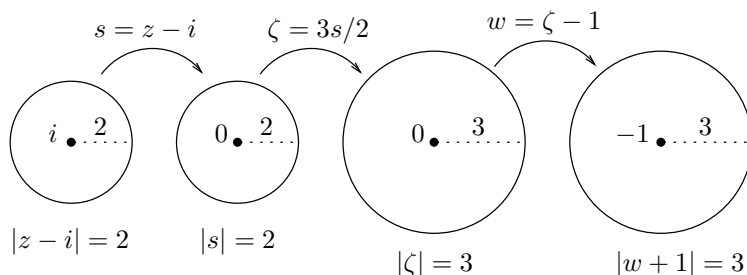
För andra delen av satsen låter vi Ω_z^v och Ω_z^h vara områdena till vänster respektive höger om Γ_z i z -planet, och analogt definierar vi Ω_w^v och Ω_w^h relativt Γ_w , med ärvd orientering, i w -planet. Eftersom T är injektiv och $T(\Gamma_z) = \Gamma_w$ får vi att $T(\Omega_z^v) \subseteq \Omega_w^v \cup \Omega_w^h$, som är en union av två disjunkta områden. Vidare, T är kontinuerlig och Ω_z^v är sammanhängande, så $T(\Omega_z^v)$ är sammanhängande, och eftersom $T(\Omega_z^v) \cap \Omega_w^v \neq \emptyset$ p.g.a. konformiteten måste $T(\Omega_z^v) \subseteq \Omega_w^v$. På samma sätt får man för T^{-1} att $T^{-1}(\Omega_w^v) \subseteq \Omega_z^v$, vilket medför att $\Omega_w^v \subseteq T(\Omega_z^v)$; alltså är $T(\Omega_z^v) = \Omega_w^v$. ■

7.18. Följdsats ($\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel på $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel, metod 1). Om Γ_z och Γ_w är $\hat{\mathbb{C}}$ -cirklar, (z_1, z_2, z_3) och (w_1, w_2, w_3) är två uppsättningar av tre olika punkter på respektive $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel, och $w = T(z)$ är den Möbiusavbildning för vilken $T(z_k) = w_k$, $k = 1, 2, 3$, så är $T(\Gamma_z) = \Gamma_w$.



Bevis. Eftersom $T(\Gamma_z)$ är en $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel enligt Sats 7.16 och w_1, w_2, w_3 därmed ligger på de båda $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkelarna Γ_w och $T(\Gamma_z)$ ger Proposition 7.15 att $\Gamma_w = T(\Gamma_z)$. ■

7.19. Exempel. Vi ska avbilda cirkeln $C_z : |z - i| = 2$ på cirkeln $C_w : |w + 1| = 3$, utan några ytterligare krav. Vi kan välja tripplar på respektive cirkel och använda Följdsats 7.18, men ännu enklare när vi inte har några extra krav är att först translatera cirkeln så att centrum hamnar i origo, sedan skala om den till rätt radie, och till sist flytta centrum till rätt plats – totalt tre steg:



Sammanlagt blir avbildningen

$$\begin{aligned} w &= \frac{3(z - i)}{2} - 1 \\ &= \frac{3z - (2 + 3i)}{2}. \end{aligned}$$

Om vi kräver att en, två eller tre givna punkter på Γ_z ska avbildas på en, två respektive tre givna punkter på Γ_w samtidigt som $T(\Gamma_z) = \Gamma_w$, så kan vi komplettera de givna punkterna till två tripplar (z_1, z_2, z_3) och (w_1, w_2, w_3) på respektive $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel och utnyttja Följdsats 7.18.

Om vi däremot kräver att någon punkt som *inte* ligger på Γ_z ska avbildas på en speciell punkt, som naturligtvis inte får ligga på Γ_w , måste vi däremot vara försiktiga. Det visar sig att detta krav medför att en annan bestämd punkt som inte ligger på Γ_z *måste* avbildas på en annan bestämd punkt som inte ligger på Γ_w , vilket vi ska visa i avsnittet om spegelpunkter nedan.

* ÖVNINGAR

- * **7.6** Betrakta Möbiusavbildningen $w(z)$ för vilken $z \mapsto w$ enligt $-i \mapsto -i$, $1 \mapsto i$ och $i \mapsto 1$.
- Motivera varför den avbildar enhetscirkeln $C_z : |z| = 1$ på enhetscirkeln $C_w : |w| = 1$.
 - I vilken riktning genomlöps C_w när C_z genomlöps moturs?
 - Bestäm på enklaste sätt bilden av $|z| < 1$.

7.5 Möbiusavbildningar, $\hat{\mathbb{C}}$ -cirklar och spegelpunkter

Vi ska inledningsvis studera Möbiusavbildningar som kan skrivas med *reella* koefficienter:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc \neq 0;$$

att T kan skrivas med reella koefficienter betyder inte att den *måste* det, eftersom trivialt

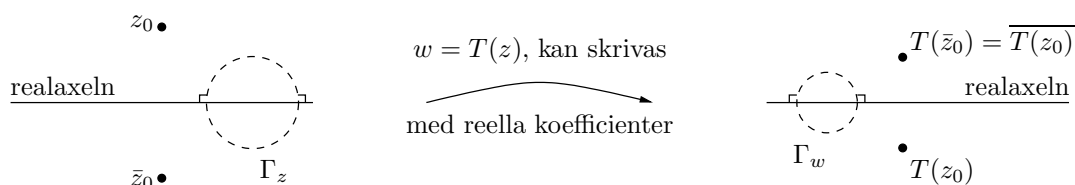
$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{(\lambda a)z + (\lambda b)}{(\lambda c)z + (\lambda d)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^*,$$

och $(\lambda a)(\lambda d) - (\lambda b)(\lambda c) = \lambda^2(ad - bc) \neq 0$. Följande egenskaper karakteriserar sådana avbildningar:

7.20. Proposition (Karakterisering av Möbiusavbildningar som kan skrivas med reella koefficienter). Låt T vara en Möbiusavbildning. Då är (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d) där

- (a) T kan skrivas med reella koefficienter: $T(z) = (az+b)/(cz+d)$ för några $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
- (b) $T(\bar{z}) = \overline{T(z)}$ för alla $z \in \hat{\mathbb{C}}$.
- (c) T avbildar realaxeln $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ på sig själv.
- (d) T avbildar varje $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel Γ_z som skär realaxeln vinkelrätt på en $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel $\Gamma_w = T(\Gamma_z)$ som skär realaxeln vinkelrätt.

För varje given Möbius T är alltså (a),(b),(c),(d) antingen alla sanna eller alla falska.



Bevis. Vi bevisar implikationerna i ordningen (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a).

- Antag (a). Då är $T(\bar{z}) = (a\bar{z}+b)/(c\bar{z}+d) \stackrel{(a)}{=} (\bar{a}\bar{z}+\bar{b})/(\bar{c}\bar{z}+\bar{d}) = \overline{(az+b)/(cz+d)} = \overline{T(z)}$.
- Antag (b). Vi vet att bilden av $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkeln realaxeln är en $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel, enligt Sats 7.16. Vidare, om $z = x$, reellt, så är $\bar{x} = x$ och $T(x) = T(\bar{x}) \stackrel{(b)}{=} \overline{T(x)}$, varför $T(x)$ är reellt; bilden måste alltså vara just realaxeln.
- Antag (c). $\Gamma_w = T(\Gamma_z)$ är en $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel, åter enligt Sats 7.16, och T är konform, så Γ_w skär bilden av realaxeln, d.v.s. realaxeln enligt (c), vinkelrätt.
- För att visa att (d) $\Rightarrow$ (c) antar vi att (c) är falsk, d.v.s. att T inte avbildar realaxeln på realaxeln. T är Möbius, så bilden av $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkeln realaxeln är i alla fall en $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel, dock inte realaxeln, så det finns något $x_0 \in \mathbb{R}$ sådant att $T(x_0) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; notera att $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ är en öppen mängd. Eftersom T är kontinuerlig kommer bilden Γ_w i w -planet av cirkeln $\Gamma_z : |z - x_0| = \delta$, som ju skär realaxeln i z -planet vinkelrätt, att ligga i $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ om $\delta > 0$ är tillräckligt litet, och därmed skär inte Γ_w realaxeln i w -planet över huvud taget för dessa δ , varför (d) är falsk.
- Antag (c). Vi delar upp i två fall:
 - * Om $c = 0$ kan vi skriva $T(z) = \alpha z + \beta$ för något $\alpha \in \mathbb{C}^*$ och något $\beta \in \mathbb{C}$, men eftersom $T(0) \in \mathbb{R}$ och $T(1) \in \mathbb{R}$ följer $\beta \in \mathbb{R}$ och $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$, varför $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
 - * Om $c \neq 0$ kan vi skriva $T(z) = (\alpha z + \beta)/(z + \delta)$ för några $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{C}$ sådana att $\alpha\delta - \beta \neq 0$. Eftersom $T(\infty) = \alpha$ följer $\alpha \in \mathbb{R}$ och eftersom $T(-\delta) = \infty$ följer $\delta \in \mathbb{R}$ (ty T är injektiv). Slutligen, $T(1 - \delta) = \alpha(1 - \delta) + \beta \in \mathbb{R}$, varför även $\beta \in \mathbb{R}$.

Vi ser speciellt att om $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ är givet så är $T_{\hat{\mathbb{R}} \rightarrow \hat{\mathbb{R}}}(\bar{z}_0) = \overline{T_{\hat{\mathbb{R}} \rightarrow \hat{\mathbb{R}}}(z_0)}$ för alla Möbius $T_{\hat{\mathbb{R}} \rightarrow \hat{\mathbb{R}}}$ som avbildar realaxeln $\hat{\mathbb{R}}$ på sig själv, och $\bar{z}_0$ är dessutom den enda punkten med denna egenskap; geometriska spegelpunkter m.a.p. realaxeln bevaras således av sådana Möbius. Vi generaliserar:

7.21. Proposition. Låt Γ vara en $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel och låt $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$. Då finns det precis en punkt $z_0^* \in \hat{\mathbb{C}}$ sådan att

$$T_{\Gamma \rightarrow \hat{\mathbb{R}}}(z_0^*) = \overline{T_{\Gamma \rightarrow \hat{\mathbb{R}}}(z_0)}$$

för alla Möbiusavbildningar $T_{\Gamma \rightarrow \hat{\mathbb{R}}}$ som avbildar Γ på realaxeln $\hat{\mathbb{R}}$.

Speciellt är

$$z_0^* = \begin{cases} \bar{z}_0 & \text{om } \Gamma \text{ är realaxeln } \hat{\mathbb{R}}, \\ 1/\bar{z}_0 & \text{om } \Gamma \text{ är enhetscirkeln } |z| = 1. \end{cases}$$

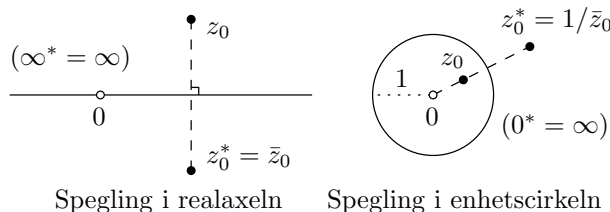
7.22. Definition (Spegelpunkt). Den entydigt bestämda punkten z_0^* i Proposition 7.21 sägs vara spegelpunkt till z_0 m.a.p. Γ .

Eftersom trivialt även $T_{\Gamma \rightarrow \hat{\mathbb{R}}}(z_0) = \overline{T_{\Gamma \rightarrow \hat{\mathbb{R}}}(z_0^*)}$ följer att z_0 är spegelpunkt till z_0^* m.a.p. Γ , d.v.s. att $(z_0^*)^* = z_0$. Man säger därför ofta att z_0 och z_0^* är (varandras) spegelpunkter m.a.p. Γ .

7.23. Anmärkning (Terminologi). I andra texter förekommer också uttrycken *inversa punkter*, *konjugerade punkter* och *symmetriska punkter* i stället för spegelpunkter. ▲

Vid spegling i realaxeln är alltså just realaxeln mittpunktsnormal till sträckan $[z_0, z_0^*]$ när $z_0 \in \mathbb{C}$.

Vid spegling i enhetscirkeln ser vi att $|z_0| \cdot |z_0^*| = 1$ och att z_0 och z_0^* ligger på samma stråle utgående ifrån origo, ty $\arg z_0^* = -\arg \bar{z}_0 = \arg z_0$ när $z_0 \in \mathbb{C}^*$.



Bevis av Proposition 7.21. Låt T vara någon Möbius som avbildar Γ på realaxeln $\hat{\mathbb{R}}$, och sätt $z_0^* = T^{-1}(\overline{T(z_0)})$; att en sådan T finns följer av Följdsats 7.18. Vi måste visa att z_0^* är oberoende av vilken sådan Möbius vi väljer. Låt därför S vara en annan, och sätt $U = T \circ S^{-1}$. Då är U en Möbius som avbildar $\hat{\mathbb{R}}$ på sig själv, och därför är $U(\bar{w}) = \overline{U(w)}$ för alla $w \in \hat{\mathbb{C}}$, enligt Proposition 7.20. Men då får vi att

$$S^{-1}(\overline{S(z_0)}) = T^{-1}(U(\overline{S(z_0)})) = T^{-1}(\overline{U(S(z_0))}) = T^{-1}(\overline{T(z_0)}) = z_0^*.$$

I specialfallet att Γ är realaxeln $\hat{\mathbb{R}}$ kan vi välja $T = I$, identitetsavbildningen, och får då genast att

$$z_0^* = T^{-1}(\overline{T(z_0)}) = I^{-1}(\overline{I(z_0)}) = \bar{z}_0.$$

Om Γ är enhetscirkeln $|z| = 1$ kan vi välja $T(z) = i(1 - z)/(1 + z)$, ty $T(e^{i\theta}) = \tan(\theta/2) \in \mathbb{R}$ när $-\pi < \theta < \pi$ (jfr Övning 1.16 på s. 5). Eftersom $T^{-1}(w) = (i - w)/(i + w)$ ger en enkel uträkning att

$$z_0^* = T^{-1}(\overline{T(z_0)}) = \frac{i - i(\bar{z}_0 - 1)/(\bar{z}_0 + 1)}{i + i(\bar{z}_0 - 1)/(\bar{z}_0 + 1)} = \frac{1}{\bar{z}_0}.$$

7.24. Anmärkning (*Geometrisk karakterisering av spegelpunkter). I Övning 7.23 visas att om $z_0 \notin \Gamma$ så är z_0^* spegelpunkt till z_0 m.a.p. Γ om och endast om varje $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel $\tilde{\Gamma}$ som går genom z_0 och z_0^* skär Γ vinkelrätt; denna egenskap illustreras i en figur på s. 168. ▲

Att spegelpunkter m.a.p. realaxeln bevaras under Möbiusavbildningar som avbildar realaxeln på realaxeln har vi sett ovan. Allmänt gäller följande:

7.25. Sats (Spegelpunkter bevaras under Möbiusavbildningar). Låt T vara en Möbiusavbildning. Om z_0^* är spegelpunkt till z_0 m.a.p. $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkeln Γ_z , så är $T(z_0^*)$ spegelpunkt till $T(z_0)$ m.a.p. $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkeln $\Gamma_w = T(\Gamma_z)$.

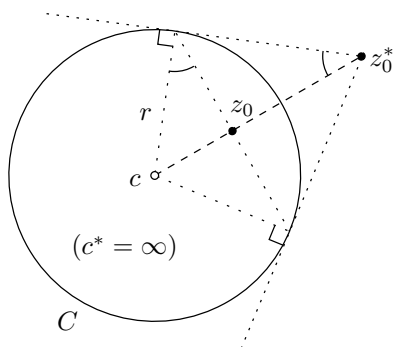
Bevis. Låt S_z och S_w vara Möbiusavbildningar som avbildar Γ_z respektive Γ_w på realaxeln, och sätt $U = S_w \circ T \circ S_z^{-1}$. Då är

$$S_w(T(z_0^*)) = U(S_z(z_0^*)) \stackrel{(1)}{=} U(\overline{S_z(z_0)}) \stackrel{(2)}{=} \overline{U(S_z(z_0))} = \overline{S_w(T(z_0))},$$

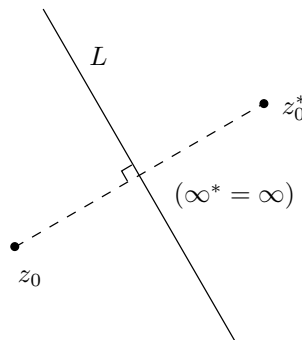
där (1) beror på att z_0^* är spegelpunkt till z_0 m.a.p. Γ_z och (2) på att U är en Möbius som avbildar realaxeln på realaxeln; således är $T(z_0^*)$ spegelpunkt till $T(z_0)$ m.a.p. Γ_w . ■

7.26. Sats (Beräkning av spegelpunkter). En punkt $z_0^* \in \mathbb{C} \setminus \{c\}$ är spegelpunkt till en punkt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{c\}$ m.a.p. en cirkel C med centrum $c \in \mathbb{C}$ och radie $r > 0$ precis då $|z_0 - c| \cdot |z_0^* - c| = r^2$ och z_0^* ligger på strålen som utgår från c och som går genom z_0 ; dessutom är $c^* = \infty$ och $\infty^* = c$.

Vidare är en punkt $z_0^* \in \mathbb{C}$ spegelpunkt till en punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ m.a.p. en linje L precis då linjen är mittpunktsnormal till sträckan $[z_0, z_0^*]$; dessutom är $\infty^* = \infty$.



Spegling i cirkel



Spegling i linje

Observera att likformiga trianglar i den geometriska konstruktionen i vänstra figuren ovan ger att

$$\frac{r}{|z_0 - c|} = \frac{|z_0^* - c|}{r}, \quad \text{d.v.s. just att} \quad |z_0 - c| \cdot |z_0^* - c| = r^2.$$

Bevis. Vi noterar först att Proposition 7.21 medför att satsen är sann för enhetscirkeln ($c = 0$, $r = 1$) och realaxeln.

Cirkeln $C : |z - c| = r$ avbildas via Möbiusavbildningen $w(z) = (z - c)/r$, som är en translation följt av en skalning, på enhetscirkeln $|w| = 1$. Om z_0 och z_0^* är spegelpunkter m.a.p. C och $w_0 = w(z_0)$ och $w_0^* = w(z_0^*)$, så är w_0 och w_0^* spegelpunkter m.a.p. enhetscirkeln, enligt Sats 7.25,

och Proposition 7.21 medför därför att $w_0^* = 1/\bar{w}_0$, d.v.s. att $(z_0^* - c)/r = r/(\bar{z}_0 - \bar{c})$, d.v.s. att $|z_0 - c| \cdot |z_0^* - c| = r^2$ och $\arg(z_0^* - c) = -\arg(\bar{z}_0 - \bar{c}) = \arg(z_0 - c)$.

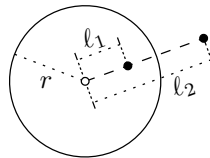
Linjen L övergår i realaxeln via en translation följt av en vridning, och sådana Möbiusavbildningar bevarar mittpunktsnormaler; således är L mittpunktsnormal till sträckan $[z_0, z_0^*]$, återigen enligt Sats 7.25 och Proposition 7.21. ■

7.27. Anmärkning. Att finna spegelpunkter m.a.p. en cirkel är ett rent geometriskt problem: Med beteckningar enligt figuren är

$$\ell_1 \cdot \ell_2 = r^2,$$

där ℓ_1 och ℓ_2 är avstånden från spegelpunkterna till cirkelns centrum och r är cirkelns radie.

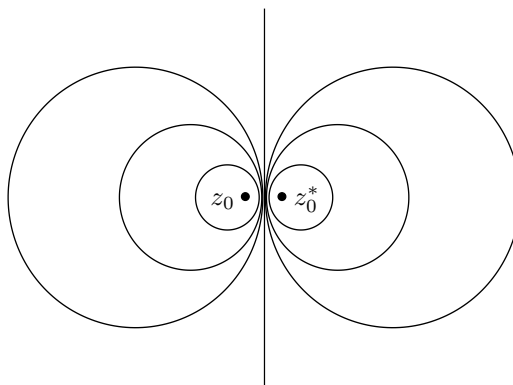
Spegelpunkterna ligger alltså dessutom på samma stråle från centrum. ▲



7.28. Anmärkning (*Givna spegelpunkter).

Ovan har vi preciserat vilka möjliga par av punkter $z_0, z_0^* \in \hat{\mathbb{C}}$ som är spegelpunkter m.a.p. en given $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel Γ .

Omvänt, givet två olika punkter $z_0, z_0^* \in \hat{\mathbb{C}}$ kan man bestämma alla $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel Γ som har dessa punkter som spegelpunkter. Om en av punkterna är ∞ – säg att $z_0^* = \infty$ – blir $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkelarna helt enkelt alla vanliga cirkel C med centrum $c = z_0$. Om däremot $z_0, z_0^* \in \mathbb{C}$ får vi figuren till höger. Mängden av sådana $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel Γ består av mittpunktsnormalen L och oändligt många cirkel C med centrum på linjen genom z_0 och z_0^* men utanför sträckan $[z_0, z_0^*]$; $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkelarna är parvis disjunkta och täcker tillsammans hela $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{z_0, z_0^*\}$. ▲



7.29. Exempel. Vi betraktar Möbiusavbildningen

$$w = T(z) = \frac{2z + 4}{z - i}$$

och ska bestämma bilden av (a) linjen $\operatorname{Im} z = 2$ (b) imaginäraxeln (c) cirkeln $|z - 1| = 2$.

Först en allmän diskussion. Om Γ_z är en given $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel så vet vi att bilden $\Gamma_w = T(\Gamma_z)$ också är en $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel, d.v.s. antingen en vanlig cirkel eller en linje. Låt z_∞ vara den (entydigt bestämda) punkt som avbildas på $w = \infty$. Då gäller följande:

$$\Gamma_w \text{ är en linje} \iff \infty \in \Gamma_w \iff z_\infty \in \Gamma_z.$$

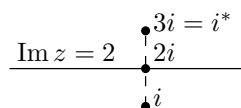
Om $z_\infty \notin \Gamma_z$ är Γ_w därför en cirkel $|w - c| = r$, och i detta fall är $w = \infty$ och $w = c$ spegelpunkter m.a.p. denna cirkel. Eftersom spegelpunkter bevaras är det just spegelpunkten till z_∞ m.a.p. Γ_z , betecknad z_∞^* , som avbildas på cirkelns centrum $w = c$, så

$$c = T(z_\infty^*) \quad \text{om } z_\infty \notin \Gamma_z.$$

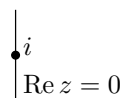
Cirkelns radie r kan man sedan bestämma genom att ta en valfri punkt på Γ_z och se efter vilken punkt på w -sidan den avbildas på.

I vårt fall är uppenbarligen $z_\infty = i$, och vi får följande bilder Γ_w i de tre fallen.

- (a) $i \notin \Gamma_z$, så Γ_w är en cirkel $|w - c| = r$. Det är lätt att se att $i^* = 3i$ i detta fall, så $c = T(3i) = 3 - 2i$. Vidare, t.ex. $\infty \in \Gamma_z$ varför $T(\infty) = 2 \in \Gamma_w$, så $r = |2 - (3 - 2i)| = \sqrt{5}$, och Γ_w är därmed cirkeln $|w - (3 - 2i)| = \sqrt{5}$.

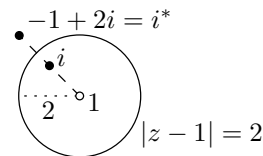


- (b) $i \in \Gamma_z$, så Γ_w är en linje. Eftersom dessutom t.ex. 0 och ∞ ligger på Γ_z följer det att $T(0) = 4i$ och $T(\infty) = 2$ ligger på Γ_w , så Γ_w är linjen $2u + v = 4$, d.v.s. linjen $2\operatorname{Re} w + \operatorname{Im} w = 4$.



- (c) $i \notin \Gamma_z$, så Γ_w är en cirkel $|w - c| = r$. Vi söker spegelpunkten i^* . Strålen från mittpunkten 1 genom i kan skrivas

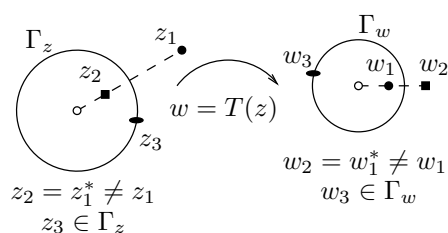
$$z = 1 + t \frac{i - 1}{|i - 1|} = 1 + t \frac{i - 1}{\sqrt{2}}, \quad t \geq 0,$$



där t är avståndet från mittpunkten 1. Punkten i har avståndet $t = \sqrt{2}$, och den sökta punkten i^* har därför avståndet t^* där $t \cdot t^* = 2^2$, så $t^* = 2\sqrt{2}$ och därmed blir $i^* = -1 + 2i$. Vi får att $c = T(-1 + 2i) = 1 - 3i$. Vidare, t.ex. $-1 \in \Gamma_z$, så $T(-1) = -1 + i \in \Gamma_w$, varför radien $r = |(-1 + i) - (1 - 3i)| = 2\sqrt{5}$. Γ_w är därför cirkeln $|w - (1 - 3i)| = 2\sqrt{5}$. ▲

Enligt Följdsats 7.18 kan vi hitta en Möbiusavbildning som avbildar en given $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel Γ_z på en annan $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel Γ_w genom att avbilda tre olika punkter (z_1, z_2, z_3) från Γ_z på tre olika punkter (w_1, w_2, w_3) från Γ_w . Spegelpunkter ger oss också följande metod, som är användbar när man har krav på att en punkt som *inte* ligger på Γ_z ska avbildas på en punkt som *inte* ligger på Γ_w :

7.30. Följdsats ($\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel på $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel, metod 2). Antag att Γ_z och Γ_w är givna $\hat{\mathbb{C}}$ -cirklar, att z_1 och $z_2 = z_1^* \neq z_1$ är spegelpunkter m.a.p. Γ_z och att w_1 och $w_2 = w_1^* \neq w_1$ är spegelpunkter m.a.p. Γ_w , samt att $z_3 \in \Gamma_z$ och $w_3 \in \Gamma_w$. Om $w = T(z)$ är den Möbiusavbildning för vilken $T(z_k) = w_k$, $k = 1, 2, 3$, så är $T(\Gamma_z) = \Gamma_w$.



Bevis. Låt T_z vara den Möbiusavbildning som avbildar (z_1, z_2, z_3) på $(0, \infty, 1)$ och T_w den som avbildar (w_1, w_2, w_3) på $(0, \infty, 1)$. Då är $T = T_w^{-1} \circ T_z$, p.g.a. entydigheten. Vidare, enligt Sats 7.25 är 0 och ∞ spegelpunkter m.a.p. både $T_z(\Gamma_z)$ och $T_w(\Gamma_w)$, så dessa båda $\hat{\mathbb{C}}$ -cirklar är vanliga cirklar med centrum 0, och eftersom 1 ligger på båda måste båda två vara enhetscirkeln $\mathbb{T}$. Av detta drar vi slutsatsen att $\Gamma_w = T_w^{-1}(\mathbb{T}) = T_w^{-1}(T_z(\Gamma_z)) = T(\Gamma_z)$. ■

7.31. Exempel. Vi bestämmer en Möbiusavbildning $w = T(z)$ som avbildar skivan $|z - i| < 2$ på halvplanet $\operatorname{Re} w > 0$ samtidigt som $z = 0$ avbildas på $w = 1$.

Möbiusavbildningar tar rand på rand, så cirkeln $C : |z - i| = 2$ avbildas på linjen $L : \operatorname{Re} w = 0$. Kravet att $T(0) = 1$ får nu följande konsekvens: Eftersom $z = 0$ och $z^* = -3i$ är spegelpunkter m.a.p. C och $w = 1$ och $w^* = -1$ är spegelpunkter m.a.p. L (se figur nedan) måste $T(-3i) = -1$, enligt Sats 7.25. Genom att sedan ta en valfri punkt på cirkeln och avbilda på en valfri punkt på linjen, t.ex. $T(-i) = \infty$, kommer den så uppkomna Möbiusavbildningen att avbilda C på L , enligt Följdsats 7.30.

Eftersom $z = 0$, som är en inre punkt i $|z - i| < 2$, avbildas på $w = 1$, som är en inre punkt i $\operatorname{Re} w > 0$, följer det nu att T verkligen avbildar på önskat sätt: skivan $|z - i| < 2$ avbildas på halvplanet $\operatorname{Re} w > 0$.

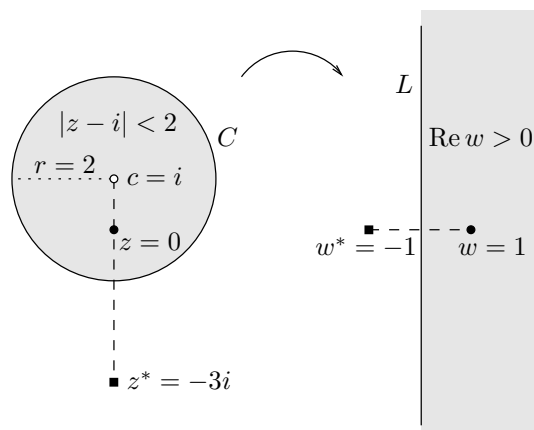
$T(z)$ får vi med standardmetoder: Att $0 \mapsto 1$ och $-i \mapsto \infty$ ger oss ansatsen

$$\frac{z}{z+i} = k \frac{w-1}{1},$$

och att $-3i \mapsto -1$ ger sedan att $k = -3/4$, och därmed att

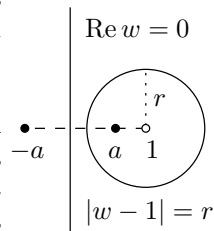
$$w(z) = \frac{3i-z}{3z+3i},$$

som alltså är en möjlig Möbius; valfriheten består i att vi kunde ha avbildat $z = -i$, som ju ligger på cirkeln $|z-i| = 2$, på någon annan punkt på $\operatorname{Re} w = 0$ än $w = \infty$.



7.32. Proposition (Gemensamma spegelpunkter). Om Γ_1 och Γ_2 är $\hat{\mathbb{C}}$ -cirklar utan någon gemensam punkt, så finns det precis ett par av punkter z_0, z_0^* som är spegelpunkter m.a.p. båda.

Bevis. Det finns en Möbiusavbildning $w = T(z)$ som avbildar Γ_1 och Γ_2 på imaginäraxeln $L : \operatorname{Re} w = 0$ respektive på någon cirkel $C : |w-1| = r$ med radie $r < 1$, se Övning 7.11; eftersom spegelpunkter bevaras under Möbiusavbildningar räcker det därför att visa påståendet i denna situation. Om z_0, z_0^* är spegelpunkter m.a.p. L så är L mittpunktsnormal till sträckan $[z_0, z_0^*]$, och om de är det m.a.p. C så ligger de på samma stråle utgående från $w = 1$. Enda möjligheten är därför att de ligger på realaxeln till vänster om 1, och $z_0 = a$ och $z_0^* = -a$ är spegelpunkter m.a.p. båda precis då $(1-a)(1+a) = r^2$, alltså precis då $a = \pm\sqrt{1-r^2}$, så existens och entydighet – av paret – följer. ■

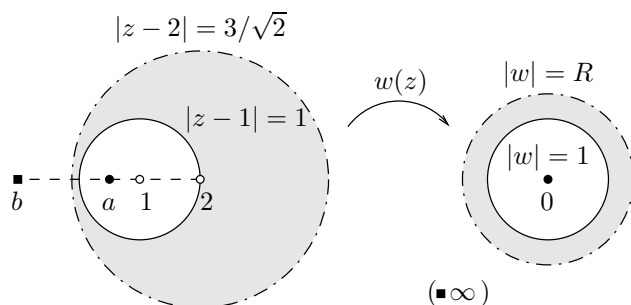


7.33. Exempel (Avbildning på koncentriska cirklar). Vi ska lösa följande (elektrostatiska) problem: Bestäm potentialen $V(z)$, som är en harmonisk funktion, i området mellan cirkelarna

$$C_1 : |z-1| = 1 \quad \text{och} \quad C_2 : |z-2| = 3/\sqrt{2}$$

om $V = 10$ på C_1 och $V = 20$ på C_2 .

Motsvarande problem i en cirkelring är lätt att lösa, se Exempel 7.1 (c), inklusive kommentaren i sista stycket där. Vi avbildar därför de gemensamma spegelpunkterna $z = a$ och $z = b$ m.a.p. C_1 och C_2 på $w = 0$ respektive $w = \infty$, som ju är de gemensamma spegelpunkterna för alla cirklar med centrum i origo. Geometrin ger att a och b ligger på realaxeln till vänster om $z = 1$ och att de bestäms av systemet



$$\begin{cases} (2-a)(2-b) = (3/\sqrt{2})^2, \\ (1-a)(1-b) = 1^2, \end{cases}$$

som, om vi kräver att $b < a$ som i figuren, ger att $a = 1/2$ och $b = -1$. Om vi kompletterar de

så erhållna punkterna $w(1/2) = 0$ och $w(-1) = \infty$ med att avbilda någon punkt på C_1 på någon punkt på enhetscirkeln, t.ex. $w(0) = -1$, får vi därför att C_1 avbildas på $\tilde{C}_1 : |w| = 1$, enligt Följdsats 7.30; de två tripplarna bestämmer nu på sedvanligt sätt avbildningen

$$w(z) = \frac{2z - 1}{z + 1}.$$

Vidare, C_2 avbildas på någon cirkel $\tilde{C}_2 : |w| = R$, och R kan bestämmas genom att sätta in valfri punkt på C_2 ; vi får att $R = |w(2 - 3/\sqrt{2})| = \sqrt{2}$. I w -planet får vi därför cirkelringen till höger i figuren ovan, och där finns harmoniska funktioner $V = A \ln |w| + B$ som är konstanta på cirklar $|w| = r$. Kraven $V = 10$ då $|w| = 1$ och $V = 20$ då $|w| = \sqrt{2}$ medför att $B = 10$ och $A \ln \sqrt{2} + B = 20$, så

$$V(z) = 10 + \frac{20}{\ln 2} \ln |w(z)| = 10 + \frac{20}{\ln 2} \ln \left| \frac{2z - 1}{z + 1} \right|.$$

★ ÖVNINGAR

- ★ 7.7 Finn spegelpunkten z_0^* till $z_0 = 2i$ m.a.p. följande linjer/cirklar: (a) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$
 (b) $\operatorname{Re} z = 0$ (c) $|z| = 1$ (d) $|z| = 2$ (e) $|z| = 6$ (f) $|z - 2i| = 1$ (g) $|z - 1| = 1$

- ★ 7.8 Betrakta Möbiusavbildningen

$$w = \frac{z - 1}{z + 1}.$$

Bestäm bilden av (a) realaxeln $\operatorname{Im} z = 0$ (b) högra halvplanet $\operatorname{Re} z > 0$
 (c) cirkeln $|z| = 1$ (d) den slutna cirkelskivan $|z| \leq 2$ (e) cirkeln $|z - i| = 1$

- ★ 7.9 Bestäm en Möbiustransformation $w(z)$ där $z \mapsto w$ enligt
 (a) realaxeln $\mapsto$ enhetscirkeln, $i \mapsto 2$ och $-i \mapsto -1/2$
 (b) det inre av enhetsskivan $\mapsto$ det öppna övre halvplanet och $0 \mapsto 2 + 2i$
 (c) $\{z : |z - 5| \geq 2\} \mapsto \{w : |w| \leq 1\}$ och $1 \mapsto 0$

- ★ 7.10 Bestäm bilden av $|z| < 2$, $\operatorname{Im} z > 0$ under avbildningen i Övning 7.5d på s. 158.

- ★ 7.11 Bevisa att den Möbiusavbildning T som omtalas i beviset av Proposition 7.32 finns. Börja gärna med att ta *någon* Möbius som avbildar Γ_1 på imaginäraxeln; då avbildas Γ_2 samtidigt på någon cirkel som inte nuddar imaginäraxeln. Hur kan man, med Möbiusavbildningar, avbilda denna cirkel på en cirkel $|w - 1| = r$ för något $r < 1$ samtidigt som bilden av imaginäraxeln fortfarande är imaginäraxeln?

- ★ 7.12 Låt $w(z)$ vara en Möbiusavbildning som avbildar cirkelringen $r_1 < |z| < r_2$ på cirkelringen $\rho_1 < |w| < \rho_2$. Visa att $\rho_2/\rho_1 = r_2/r_1$. (Man kan, med mera avancerade metoder, visa att detta gäller även om ordet "Möbiusavbildning" byts mot "konform avbildning".)

- ★ 7.13 Området mellan cirkelarna $|z| = 3$ och $|z - 1| = 1$ avbildas med en Möbiusavbildning $w(z)$ på en cirkelring $r < |w| < 1$. Bestäm den inre radien r .

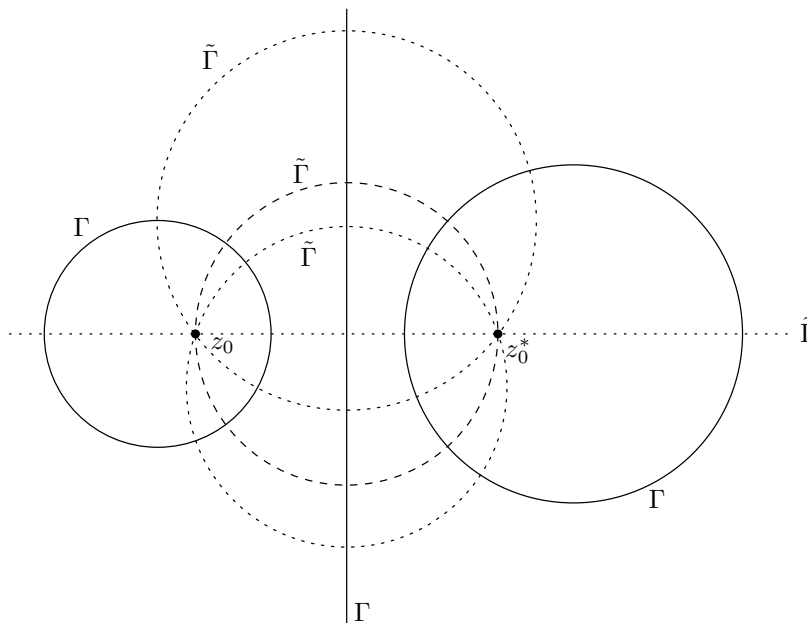
- ★ 7.14 Låt D vara området mellan de två tangerande cirkelarna $|z - 1| = 1$ och $|z - 3| = 3$.

- (a) Bestäm en Möbiusavbildning $w(z)$ som tar D på bandet $0 < \operatorname{Re} w < 1$.
 (b) Bestäm en harmonisk funktion $h(x, y)$ i D som har randvärdena noll på den inre cirkeln och ett på den yttre. Jfr Exempel 7.1 (a) på s. 153.

- ★ 7.15 Cirkeln $|z| = 1$ hålls vid temperaturen 0°C medan cirkeln $|10z - 1| = 7$ hålls vid 100°C . Bestäm den stationära (harmoniska) temperaturfördelningen ϑ i området mellan cirkelarna, förslagsvis genom att först avbilda området på en cirkelring.

- ★ **7.16** Bestäm en konform avbildning som överför första kvadranten i z -planet på
- halvcirkelskivan $|w| < 1$, $\operatorname{Re} w > 0$,
 - kvartscirkelskivan $|w| < 1$, $\operatorname{Re} w > 0$, $\operatorname{Im} w > 0$.
- ★ **7.17** Konstruera en analytisk funktion $w = f(z)$ som konformt avbildar bandet $0 < \operatorname{Re} z < 1$ på cirkelskivan $|w| < 1$ så att $1/2 \mapsto 0$, t.ex. genom att först avbilda remsan på övre halvplanet. Jfr Exempel 7.4 på s. 155.
- ★ **7.18** Avbilda halvcirkelskivan $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ konformt på cirkelskivan $|w| < 1$ så att $0 \mapsto -i$ och $(1+i)/2 \mapsto 0$. Ledning: Gå via kvadrant och halvplan.
- ★ **7.19** Bestäm bilden av $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq \pi/2, z \neq \pi/2\}$ under avbildningen $w = \tan z$.
- ★ **7.20** Betrakta avbildningen $w = e^z$.
- Hur stor area har bilden av mängden $|\operatorname{Re} z| \leq 1$, $|\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z| \leq 2$ i w -planet?
 - Samma fråga som i (a), men byt 2 mot ett godtyckligt $C \geq 0$.
- ★ **7.21** Konstruera en gren $f(z)$ till den flervärda funktionen $(1/2i) \log((i-z)/(i+z))$ i det längs imaginära axeln mellan $-i$ och i uppskurna planet sådan att $f(1) = \pi/4$. Beräkna sedan skillnaden mellan gränsvärdena av $f(z)$ då $z \rightarrow ib$, $-1 < b < 1$, från högra respektive vänstra halvplanet. Visa slutligen att $f(x) = \arctan x$ då $x > 0$.
- ★ **7.22** Använd att varje harmonisk funktion h lokalt (i cirkelskivor) är realdelen av någon analytisk funktion (se Anmärkning 1.34 på s. 15) för att ge ett alternativt bevis för Sats 7.2.
- ★ **7.23** Låt Γ vara en $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel.
- Visa att $z_0 \in \Gamma$ om och endast om spegelpunkten till z_0 m.a.p. Γ är z_0 själv.
 - Antag att $z_0 \notin \Gamma$. Visa att det finns precis en punkt z_0^* sådan att varje $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel $\tilde{\Gamma}$ som går genom z_0 och som skär Γ vinkelrätt också går genom z_0^* , och att denna punkt z_0^* är spegelpunkt till z_0 m.a.p. Γ .
 - Antag att $z_0 \notin \Gamma$. Visa att z_0^* är spegelpunkt till z_0 m.a.p. Γ om och endast om varje $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel $\tilde{\Gamma}$ som går genom z_0 och z_0^* skär Γ vinkelrätt.

Ledning för (b) och (c): Börja med fallet att Γ är realaxeln.



Alla $\tilde{\Gamma}$ skär alla Γ vinkelrätt (i figuren finns tre Γ och fyra $\tilde{\Gamma}$)

8 *Arcusfunktioner m.m.

De komplexa trigonometiska och hyperboliska funktionerna definieras m.h.a. exponentialfunktionen och är inte injektiva, så deras inverser blir därför med nödvändighet flervärda. Nedan ska vi studera inverserna till sinus och tangens i detalj, alltså arcsin och arctan, och endast kortfattat beskriva arccos, arsinh, arcosh och artanh, eftersom dessa fyra kan uttryckas i de första två; vi låter **arcusfunktioner** vara en samlande beteckning för allihop.*

För att kunna uttrycka principalvärdena Arcsin, Arctan o.s.v. av arcusfunktionerna på ett någorlunda bekvämt sätt inför vi nu en symbol för **principalkvadratrot**en. Mera allmänt definierar vi n :e principalroten ur z som principalvärdet av $z^{1/n}$ och skriver

$$\sqrt[n]{z} := \text{PV } z^{1/n} = \exp((\text{Log } z)/n) \quad \text{och} \quad \sqrt[n]{0} := 0, \quad z \in \mathbb{C}^*, \quad n \in \{1, 2, 3, \dots\},$$

så att $\sqrt[n]{x}$ överensstämmer med den vanliga reella envärda n -roten ur x om $x \geq 0$ (när $x > 0$ är ju $\text{Log } x = \ln x$). I polär form blir $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\theta/n}$ när vi skriver $z = re^{i\theta}$ med $-\pi < \theta \leq \pi$.

Principal(kvadrat)roten ur z skriver vi hädanefter som

$$\sqrt{z} := \text{PV } z^{1/2} = \sqrt{r} e^{i\theta/2}, \quad \text{där} \quad z = re^{i\theta} \quad \text{med} \quad -\pi < \theta \leq \pi,$$

och den är alltså definierad i hela $\mathbb{C}$ och dess värdemängd är högra halvplanet $\text{Re } w > 0$ tillsammans med strålen $w = iv$, $v \geq 0$, se figuren i Exempel 2.16 på s. 27.

Vi ska uttrycka principalvärdena av arcusfunktionerna som sammansättningar av funktioner där den inre funktionen typiskt innehåller en kvadratrot och den yttre en logaritm. Därför gör vi först en kort utvikning där vi studerar grenar till sammansatta funktioner innan vi kommer fram till kapitlets huvudnummer: arcusfunktionerna.

8.1 Grenar till sammansatta funktioner

Antag att minst en av funktionerna f och g är flervärd. Då är sammansättningen

$$w = h(z) := f(g(z)), \quad \text{alltså} \quad s = g(z) \text{ följd av } w = f(s),$$

normalt också flervärd. Låt $\tilde{f}$ och $\tilde{g}$ vara grenar till f och g i områdena Ω_s respektive Ω_z , och sätt

$$W = \tilde{g}^{-1}(\Omega_s) = \{z \in \Omega_z : \tilde{g}(z) \in \Omega_s\},$$

som alltså är den öppna mängd där funktionen $\tilde{h}(z) := \tilde{f}(\tilde{g}(z))$ är definierad; observera att W kan vara men *inte måste* vara sammanhängande, och det är således inte säkert att W är ett område, se Exempel 8.1 nedan (det kan t.o.m. vara så att $W = \emptyset$). I varje delområde $\Omega \subseteq W$ definierar emellertid $\tilde{h}$ en gren till h .

Omvänt behöver det däremot *inte* vara sant att varje gren till $h(z) = f(g(z))$ – ens lokalt – kan fås som en sammansättning av grenar till f och g . Som ett enkelt exempel kan vi ta $f(s) = s^2$ och $g(z) = z^{1/2}$; då är trivialt $f(g(z)) = z$ i hela $\mathbb{C}$, men det finns ingen gren till $z^{1/2}$ i någon enda omgivning – eller ens punkterad omgivning – till origo. Jfr även Exempel 8.2 nedan.

*Funktionernas latinska namn är (co)sinus, tangens, (co)sinus hyperbolicus, tangens hyperbolica, och inversernas latinska namn är arcus (co)sini, arcus tangens, area (co)sini hyperbolici, area tangens hyperbolicae.

8.1. Exempel. Låt $g(z) = z^{1/4}$ och $f(s) = \log s$. Definiera grenarna $\tilde{g}$ och $\tilde{f}$ som

$$s = \tilde{g}(z) = -\sqrt[4]{z}, \quad z \in \Omega_z := \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0], \quad \text{och} \quad \tilde{f}(s) = \text{Log } s, \quad z \in \Omega_s := \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0];$$

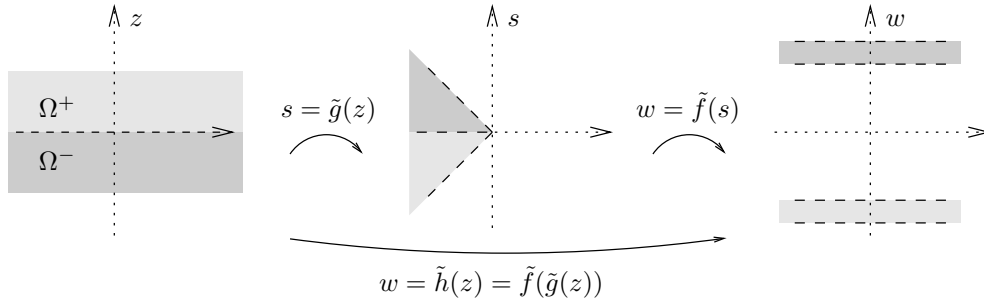
$\tilde{g}(z)$ är alltså minus principalgrenen till $z^{1/4}$ och $\tilde{f}(s)$ är principalgrenen till $\log s$. I polär form är $s = \tilde{g}(z) = -\sqrt[4]{r} e^{i\theta/4} = \sqrt[4]{r} e^{i(\theta/4 \pm \pi)}$ om $z = re^{i\theta}$ där $r > 0$ och $-\pi < \theta < \pi$, och därmed kan vi skriva

$$\tilde{h}(z) = \tilde{f}(\tilde{g}(z)) = \text{Log}(-\sqrt[4]{z}) = \begin{cases} (\ln r)/4 + i(\theta/4 - \pi), & 0 < \theta < \pi, \\ (\ln r)/4 + i(\theta/4 + \pi), & -\pi < \theta < 0; \end{cases}$$

notera att vi måste undanta $\theta = 0$ vid sammansättningen och att principalvärdet $\text{Arg } s$ gör ett språng där. $\tilde{h}$ är alltså definierad i den öppna mängden

$$W := \tilde{g}^{-1}(\Omega_s) = \{z \in \Omega_z : \tilde{g}(z) \in \Omega_s\} = \{z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] : -\sqrt[4]{z} \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]\} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$$

så $W = \Omega^+ \cup \Omega^-$, en disjunkt union av övre halvplanet $\Omega^+ : \text{Im } z > 0$ och undre halvplanet $\Omega^- : \text{Im } z < 0$, se figur nedan.



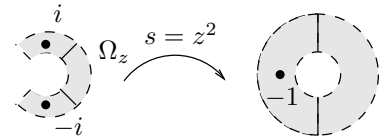
På vart och ett av områdena Ω^+ och Ω^- är $\tilde{h}$ en gren till $\log(z^{1/4})$. ▲

8.2. Exempel. Låt $s = g(z) = z^2$ (envärd och kontinuerlig, har således endast sig själv som gren) och $f(s) = s^{1/2}$, och sätt

$$h(z) = f(g(z)) = (z^2)^{1/2}.$$

Då är $h(z) = \pm z$ punktvis, och eftersom grenar är kontinuerliga funktioner definierade i områden är grenarna till h i varje område de två funktionerna $\tilde{h}_1(z) = z$ och $\tilde{h}_2(z) = -z$.

Låt nu Ω_z vara den kapade cirkelringen $1/2 < |z| < 2$, $|\text{Arg } z| < 3\pi/4$, se figur. Vi kan inte i hela Ω_z skriva någon av grenarna $\tilde{h}_{1,2}(z)$ ovan som $\tilde{h}(z) = \tilde{f}(g(z)) = \tilde{f}(z^2)$, där $\tilde{f}(s)$ är en gren till $s^{1/2}$ i något område $\Omega_s \subseteq \mathbb{C}$, eftersom Ω_s i så fall måste innehålla ringen $1/4 < |s| < 4$, bilden av Ω_z under avbildningen $s = z^2$, och någon gren till $s^{1/2}$ finns inte i hela denna ring.



Alternativt kan vi se att t.ex. punkterna $z = \pm i \in \Omega_z$ båda avbildas på punkten $s = -1$ och att därmed, om $\tilde{f}$ fanns i hela Ω_s , $\tilde{h}(i) = \tilde{f}(g(i)) = \tilde{f}(i^2) = \tilde{f}(-1) = \tilde{f}((-i)^2) = \tilde{f}(g(-i)) = \tilde{h}(-i)$ medan $\tilde{h}_1(i) = i \neq -i = \tilde{h}_1(-i)$ och $\tilde{h}_2(i) = -i \neq i = \tilde{h}_2(-i)$; motsägelsen medför att $\tilde{f}$ inte finns.

Ovanstående problem kan man komma runt om man i stället betraktar bilderna i s -planet av den övre respektive den nedre tredjedelen av Ω_z som olika mängder, så att t.ex. bilderna av $z = i$ och $z = -i$ betraktas som olika punkter trots att $i^2 = -1 = (-i)^2$; vi inför en sorts märkning av (eller färg på) punkterna, $i^2 = (-1)_i$ och $(-i)^2 = (-1)_{-i}$, och låter $\tilde{f}$ anta olika värden i dessa olika (-1) -or. Jfr den s.k. Riemannytan till $z^{1/2}$ i Anmärkning 2.21 på s. 29. ▲

Om man ändå – trots ovanstående problem – studerar den konkreta sammansättningen

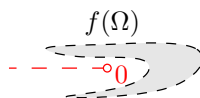
$$\sqrt{z^2}$$

så blir denna analytisk endast i områden som inte innehåller någon punkt z där $z^2 \in]-\infty, 0]$. Vi måste därför undanta imaginäraxeln, och de största möjliga områdena där $\sqrt{z^2}$ är analytisk är således högra respektive vänstra halvplanet. I själva verket är

$$\sqrt{z^2} = \begin{cases} z, & \operatorname{Re} z > 0, \\ -z, & \operatorname{Re} z < 0, \\ i|y|, & z = iy, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Notera alltså att $\sqrt{z^2}$ inte är analytisk på imaginäraxeln.

Dock, om $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ verkligen har värdemängd $V_f = f(\Omega) \subseteq \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$, så kan vi skriva grenarna till $f(z)^{1/2}$ som sammansättningar $\sqrt{f(z)}$ och $-\sqrt{f(z)}$, och detta ska vi också använda oss av nedan.



8.2 Några grenar till $(1 - z^2)^{1/2}$

Som en förberedelse inför kommande avsnitt om arcusfunktioner studerar vi här $(1 - z^2)^{1/2}$. Eftersom

$$w = (1 - z^2)^{1/2} = i(z^2 - 1)^{1/2} = i(z + 1)^{1/2}(z - 1)^{1/2}$$

som flervärda funktioner, se Avsnitt 2.3, kan vi enkelt bilda några olika envärda funktioner genom att ersätta tvåvärda $(\cdot)^{1/2}$ med envärda $\sqrt{\cdot}$ i uttrycken ovan. Låt därför

$$f(z) = \sqrt{1 - z^2}, \quad g(z) = i\sqrt{z^2 - 1} \quad \text{och} \quad h(z) = i\sqrt{z + 1}\sqrt{z - 1}.$$

Dessa funktioner är *definierade* i hela $\mathbb{C}$, men de är inte *analytiska* – inte ens *kontinuerliga* – i hela $\mathbb{C}$; speciellt definierar de alltså inte grenar i hela $\mathbb{C}$.

Att f och g är jämna funktioner ser vi omedelbart; även h^2 är jämn eftersom $(h(z))^2 = 1 - z^2$. För den vidare undersökningen av h använder vi att

$$\sqrt{z - 1} = \sqrt{|z - 1|} e^{i\theta_+/2} \quad \text{och} \quad \sqrt{z + 1} = \sqrt{|z + 1|} e^{i\theta_-/2},$$

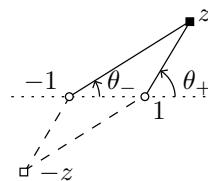
där vinklarna $\theta_+ = \operatorname{Arg}(z - 1) \in]-\pi, \pi]$ och $\theta_- = \operatorname{Arg}(z + 1) \in]-\pi, \pi]$ är väldefinierade när $z \neq \pm 1$, se figur, så vi kan skriva

$$h(z) = i\sqrt{z + 1}\sqrt{z - 1} = i\sqrt{|z^2 - 1|} e^{i(\theta_+ + \theta_-)/2}.$$

Funktionen h är udda på $\mathbb{C} \setminus]-1, 1[$, ty kongruenta trianglar ger att

$$\theta_+(-z) + \theta_-(-z) = \theta_+(z) + \theta_-(z) \pm 2\pi, \quad z \notin [-1, 1],$$

men den är jämn på $[-1, 1]$ eftersom $i\sqrt{x + 1}\sqrt{x - 1} = -\sqrt{1 - x^2}$ där.



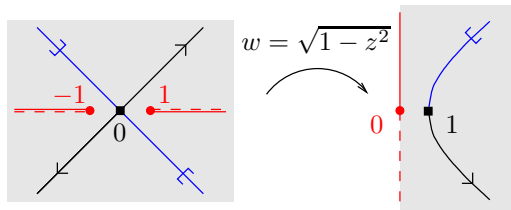
Vi bestämmer nu värdemängderna V_f , V_g och V_h . Låt V beteckna värdemängden för $\sqrt{s}$, $s \in \mathbb{C}$; V är alltså högra halvplanet $u > 0$ inklusive positiva imaginäraxeln $w = iv$, $v \geq 0$. Eftersom $1 - z^2$ och $z^2 - 1$ var för sig antar alla komplexa värden när $z \in \mathbb{C}$ inser vi att $V_f = V$ och att $V_g = iV$, alltså V vriden $\pi/2$ i positiv led runt origo, d.v.s. övre halvplanet $v > 0$ inklusive negativa realaxeln $w = u$, $u \leq 0$. Vidare ser vi att

$$w = (1 - z^2)^{1/2} \Leftrightarrow w^2 = 1 - z^2 \Leftrightarrow (u^2 - v^2) + i(2uv) = (1 - x^2 + y^2) + i(-2xy).$$

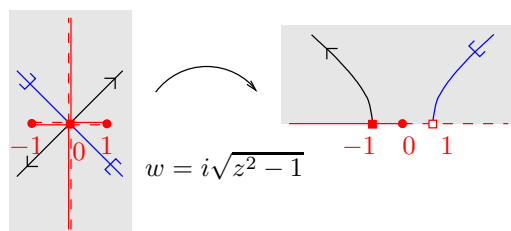
Från detta samband kan vi avläsa att de tre funktionerna f , g och h avbildar hyperbeln $xy = A$, där $A \neq 0$, på följande sätt: på hyperbeldelen $uv = -A$, $u > 0$, under f (som är en 2-till-1-avbildning:

den avbildar två olika punkter som ligger på hyperbeln på en punkt); på hyperbeldelen $uv = -A$, $v > 0$, under g (2-till-1); respektive på hela hyperbeln $uv = -A$ under h (1-till-1). Genom att dessutom följa hur koordinataxlarna i z -planet avbildas får vi nedanstående figurer, och där har vi speciellt markerat hur linjerna $y = \pm x$ avbildas i de olika fallen för att få en fingervisning om hur de olika kvadranterna avbildas; dessa linjer avbildas ju på delar av hyperbeln $u^2 - v^2 = 1$.

Vi börjar med $f(z) = \sqrt{1-z^2}$, som alltså är jämn och avbildar som i figuren intill. Funktionen är kontinuerlig från nedan längs $]1, +\infty[$ och från ovan längs $]-\infty, -1[$. I området $\mathbb{C} \setminus \{z = x : |x| \geq 1\}$ är $\sqrt{1-z^2}$ en gren till $(1-z^2)^{1/2}$, med värdemängd $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > 0\}$.

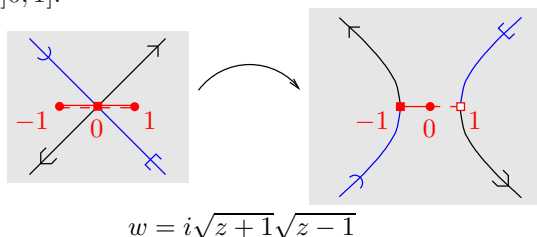


När vi i stället studerar $g(z) = i\sqrt{z^2-1}$, som också är jämn, får vi i stället bilden till höger, och denna funktion är kontinuerlig från första kvadranten längs positiva imaginäraxeln och $[0, 1]$, och från tredje kvadranten längs negativa imaginäraxeln och $]-1, 0]$. Notera att $i\sqrt{z^2-1}$ definierar två grenar, definierade på två disjunkta områden som båda avbildas bijektivt på $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > 0\}$.



Vad $h(z) = i\sqrt{z+1}\sqrt{z-1}$ beträffar, slutligen, så avbildas halvplanet $y > 0$ (respektive $y < 0$) bijektivt på halvplanet $u < 0$ med sträckan $[-1, 0]$ borttagen (respektive $u > 0$ med sträckan $[0, 1]$ borttagen) och strålen $z = x \geq 1$ (respektive $z = x \leq -1$) bijektivt på strålen $w = iv$, $v \geq 0$ (respektive $w = iv$, $v \leq 0$), medan sträckorna $[-1, 0]$ och $[0, 1]$ var för sig avbildas bijektivt på sträckan $[-1, 0]$; h har således värdemängd $V_h = \mathbb{C} \setminus]0, 1]$.

h är kontinuerlig från ovan längs $]-1, 1]$. I området $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ definierar den en gren, alltså även längs $]-\infty, -1[$, trots att de ingående funktionerna $\sqrt{z+1}$ och $\sqrt{z-1}$ inte gör det var för sig; h sammanfaller nämligen i en $\mathbb{C}$ -omgivning till $]-\infty, -1[$ med $-i\sqrt{z^2-1}$, som är analytisk där. Värdemängden för grenen är $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.



Funktionen h kan också skrivas

$$h(z) = i(z-1)\sqrt{\frac{z+1}{z-1}},$$

om vi låter högerledet vara 0 för $z = 1$. Detta utseende för h kan vara användbart i vissa situationer – notera att funktionen innanför kvadratroten är en Möbiusavbildning. Att likheten stämmer kan man visa på följande sätt: h och högerledet är analytiska i området $\Omega := \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, och längs positiva realaxeln $z = x > 1$ är båda två lika med $i\sqrt{x^2-1}$. Enligt entydighetssatsen för analytiska funktioner (Sats 4.44 på s. 85) är de därför lika i hela Ω , och på sträckan $[-1, 1]$ är båda $-\sqrt{1-x^2}$.

Självfallet är också $-\sqrt{1-z^2}$, $-i\sqrt{z^2-1}$ och $-i\sqrt{z+1}\sqrt{z-1}$ grenar till $(1-z^2)^{1/2}$, i samma respektive områden som ovan, men med värdemängder $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w < 0\}$, $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w < 0\}$ respektive $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Naturligtvis kan vi på samma sätt konstruera några grenar till t.ex. $(z^2-1)^{1/2} = i(1-z^2)^{1/2}$ och $(z^2+1)^{1/2} = (1-(iz)^2)^{1/2}$.

8.3 arcsin och Arcsin, samt arsinh och Arsinh

I reell analys definieras **arcsin** som inversen till en viss restriktion av sinus:

$$y = \arcsin x \quad \Leftrightarrow \quad \sin y = x \quad \text{och} \quad -\pi/2 \leq y \leq \pi/2.$$

Definitionsmängden är $[-1, 1]$ och värdemängden $[-\pi/2, \pi/2]$. Som bekant är inte ens reella sinus injektiv, utan $\sin y_1 = \sin y_2$ precis då $y_1 = y_2 + 2n\pi$ eller $y_1 = (\pi - y_2) + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

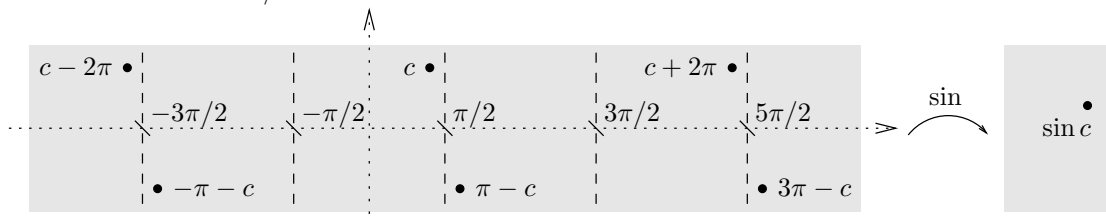
I komplex analys definieras ju

$$\sin w := \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}, \quad w \in \mathbb{C},$$

med värdemängd $\mathbb{C}$ (se Avsnitt 2.4), och bristen på injektivitet blir faktiskt densamma som för reella sinus, vilket vi nu ska se: Med $s_{1,2} = e^{iw_{1,2}}$ är $s_{1,2} \neq 0$, och vi får att

$$\begin{aligned} \sin w_1 = \sin w_2 &\Leftrightarrow s_1 - 1/s_1 = s_2 - 1/s_2 \Leftrightarrow (s_1 - s_2)(1 + 1/(s_1 s_2)) = 0 \\ &\Leftrightarrow s_1 = s_2 \text{ eller } s_1 = -1/s_2 \Leftrightarrow e^{iw_1} = e^{iw_2} \text{ eller } e^{iw_1} = e^{i\pi} e^{-iw_2} \\ &\Leftrightarrow w_1 = w_2 + 2n\pi \text{ eller } w_1 = (\pi - w_2) + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Talet c är m.a.o. inte det enda tal som avbildas på $\sin c$, utan alla tal som avbildas på $\sin c$ är $\dots, c - 2\pi, c, c + 2\pi, \dots$ och $\dots, -\pi - c, \pi - c, 3\pi - c, \dots$; i figuren nedan är dessa punkter inritade i ett fall då $0 < \operatorname{Re} c < \pi/2$ och $\operatorname{Im} c > 0$.



Fullständig lösning av ekvationen $\sin w = z$ ger $w = -i \log(iz + (1 - z^2)^{1/2})$, på samma sätt som när vi löste motsvarande ekvation för cosinus i Avsnitt 2.4. $(1 - z^2)^{1/2}$ ger två olika värden för varje $z \neq \pm 1$, och logaritmen ger oändligt många olika värden. Vi definierar nu den flervärda funktionen

$$\arcsin z := \{w \in \mathbb{C} : \sin w = z\} = -i \log(iz + (1 - z^2)^{1/2}), \quad z \in \mathbb{C},$$

med principalvärdet

$$\operatorname{Arcsin} z := -i \operatorname{Log}(iz + \sqrt{1 - z^2}), \quad z \in \mathbb{C};$$

lägg märke till att båda värdena på $iz + (1 - z^2)^{1/2} \neq 0$ eftersom produkten av dem är -1 . Sätt nu

$$s(z) := iz + \sqrt{1 - z^2},$$

så att $\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Log} s = \operatorname{Arg} s - i \ln |s|$.

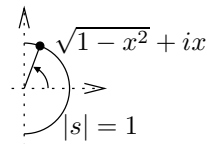
När $x \in [-1, 1]$ är $s(x)$ en punkt på högra halvan av enhetscirkeln, ty då är $\sqrt{1 - x^2} \geq 0$ och $|ix + \sqrt{1 - x^2}| = \sqrt{(1 - x^2) + x^2} = 1$. I figuren till höger ser vi nu att $\operatorname{Arg}(ix + \sqrt{1 - x^2})$ är vanliga reella envärda $\arcsin x$ för dessa x , så $\operatorname{Arcsin} x = \arcsin x$ (envärda reella) då $x \in [-1, 1]$.

Vidare, eftersom

$$(iz + \sqrt{1 - z^2})(-iz + \sqrt{1 - z^2}) = -(iz)^2 + (1 - z^2) = 1$$

ser vi att $s \neq 0$ (vilket vi redan visste), att $-iz + \sqrt{1 - z^2} = 1/s$, och att

$$(*) \quad \operatorname{Re}(2\sqrt{1 - z^2}) = \operatorname{Re}\left(s + \frac{1}{s}\right) = \operatorname{Re} s + \operatorname{Re}\left(\frac{\bar{s}}{|s|^2}\right) = \left(1 + \frac{1}{|s|^2}\right) \operatorname{Re} s.$$



Trivialt är $\operatorname{Re}(\sqrt{w}) \geq 0$ för alla $w \in \mathbb{C}$, och därför medför (*) att även $\operatorname{Re} s \geq 0$. Eftersom dessutom $s \neq 0$ inser vi speciellt att s undviker värdena $]-\infty, 0]$, vilket ju är de punkter där $\operatorname{Log} s$ inte är analytisk. $\operatorname{Arcsin} z$ är därför analytisk där $s(z)$ är analytisk, d.v.s. där $\sqrt{1-z^2}$ är analytisk, vilket är i området

$$\Omega := \mathbb{C} \setminus \{z = x : |x| \geq 1\},$$

se Avsnitt 8.2; där ser vi också att $\operatorname{Re}(\sqrt{1-z^2}) > 0$ när $z \in \Omega$, och enligt (*) ovan är därför $\operatorname{Re} s > 0$ för dessa z , vilket är samma sak som att $-\pi/2 < \operatorname{Arg} s < \pi/2$. Sambandet $\operatorname{Arcsin} z = \operatorname{Arg} s - i \ln |s|$ medför därför att

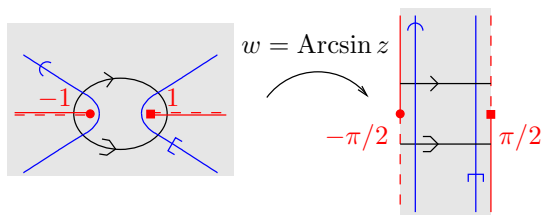
$$|\operatorname{Re}(\operatorname{Arcsin} z)| < \pi/2, \quad z \in \Omega.$$

I återstående punkter i $\mathbb{C}$ ger direkt insättning i definitionen att

$$\operatorname{Arcsin}(\pm a) = \pm(\pi/2 - i \ln(a + \sqrt{a^2 - 1})), \quad a \geq 1,$$

så värdemängden för $\operatorname{Arcsin} z$ är åtminstone en delmängd av remsan i figuren nere till höger; notera att strålarna $w = \pm(\pi/2 - it)$, $t \geq 0$, ingår i värdemängden. Att den är *hela* denna remsa kan vi se på följande sätt: Värdeomängderna för funktionerna $\operatorname{Arcsin} z + 2n\pi$ och $(\pi - \operatorname{Arcsin} z) + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, ryms i translaterade och – förutom punkterna $\pi/2 + m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$ – parvis disjunkta kopior av denna remsa. Om nu punkten $w_0 \in \mathbb{C}$ ligger utanför *alla* dessa värdemängder sätter vi $z_0 = \sin w_0$ och $\tilde{w}_0 = \operatorname{Arcsin} z_0$. Då finns $\tilde{w}_0$ i värdemängden för $\operatorname{Arcsin} z$, och därmed finns punkterna $\tilde{w}_0 + 2n\pi$ och $(\pi - \tilde{w}_0) + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, var och en i *någon* värdemängd. Men w_0 måste vara en av dessa punkter eftersom $\sin w_0 = \sin \tilde{w}_0 (= z_0)$, och vi har fått en motsägelser.

Avbildningen $w = \operatorname{Arcsin} z$ tar hyperbelbågar på lodräta linjer och halva ellipser på vågräta sträckor (detta ses enklast genom att studera den inversa avbildningen $z = \sin w$ på remsan, jfr Exempel 2.29 på 35); dessa andra gradskurvor har ± 1 som brännpunkter. Dessutom är $\operatorname{Arcsin} z$ kontinuerlig från ovan längs $]-\infty, -1[$ och från nedan längs $]1, +\infty[$, varför $\operatorname{Arcsin} z$ har samma kontinuitetsegenskaper i $\mathbb{C}$ som $\sqrt{1-z^2}$.



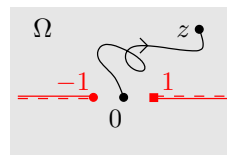
I omgivningarna till alla punkter utom $z = \pm 1$ har $\operatorname{arcsin} z = -i \log(iz + (1-z^2)^{1/2})$ grenar, och de kan faktiskt konstrueras med hjälp av grenar till $(1-z^2)^{1/2}$ och $\log s$ separat, trots att detta inte alltid är möjligt för sammansättningar (se Avsnitt 8.1). Kedjeregeln ger att derivatan är $1/(1-z^2)^{1/2}$, med samma gren till $(1-z^2)^{1/2}$ som innanför $\log$, och speciellt gäller följande för principalgrenen:

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Arcsin} z = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \{z = x : |x| \geq 1\}.$$

Detta kan också uttryckas i integralform:

$$\operatorname{Arcsin} z = \int_0^z \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}, \quad z \in \Omega,$$

där vi med $\int_0^z$ menar kurvintegralen längs vilken som helst styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva i Ω från 0 till z , eftersom $\operatorname{Arcsin} z$ är en primitiv till $1/\sqrt{1-z^2}$ i Ω och $\operatorname{Arcsin} 0 = 0$, se Sats 3.10 på s. 43.



Vi ska till sist kort studera en nära släkting till arcsin , nämligen arsinh . I reell analys definieras **arsinh** som inversen till $\sinh$: att $y = \operatorname{arsinh} x$ betyder precis att $\sinh y = x$, d.v.s. att $\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Både definitionsmängden och värdemängden är hela $\mathbb{R}$. I komplex analys definieras

som bekant $\sinh w := (e^w - e^{-w})/2$ för $w \in \mathbb{C}$, så $\sinh w = i \sin(-iw)$. På sedvanligt sätt definierar vi den flervärda funktionen

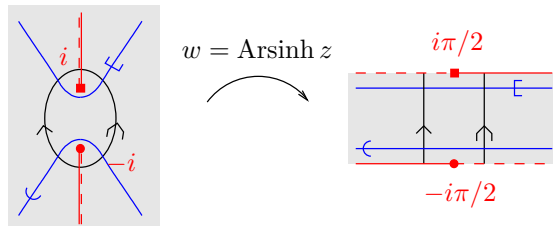
$$\operatorname{arsinh} z := \{w \in \mathbb{C} : \sinh w = z\} = \log \left(z + (z^2 + 1)^{1/2} \right), \quad z \in \mathbb{C},$$

med principalvärdet

$$\operatorname{Arsinh} z := \operatorname{Log} \left(z + \sqrt{z^2 + 1} \right), \quad z \in \mathbb{C},$$

så att $\operatorname{Arsinh} x$ överensstämmer med reella envärda $\operatorname{arsinh} x$ då $x \in \mathbb{R}$.

Trivialt är $\operatorname{arsinh} z = i \arcsin(-iz)$, och faktiskt är även $\operatorname{Arsinh} z = i \operatorname{Arcsin}(-iz)$. Grenar finns i omgivningar till alla punkter utom $z = \pm i$ och har derivata $1/(z^2 + 1)^{1/2}$, med samma gren som innanför log; speciellt får vi för principalgrenen att



$$\frac{d}{dz} \operatorname{Arsinh} z = \frac{1}{\sqrt{z^2 + 1}}, \quad z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \{z = iy : |y| \geq 1\}.$$

8.4 arccos och Arccos, samt arcosh och Arcosh

I reell analys definieras **arccos** som inversen till en viss restriktion av cosinus: att $y = \arccos x$ betyder precis att $\cos y = x$ och $0 \leq y \leq \pi$. Definitionsmängden är $[-1, 1]$ och värdemängden $[0, \pi]$. I komplex analys definieras som bekant $\cos w := (e^{iw} + e^{-iw})/2$ för $w \in \mathbb{C}$, med värdemängd $\mathbb{C}$, och $\cos w = \sin(\pi/2 - w)$. Vi definierar

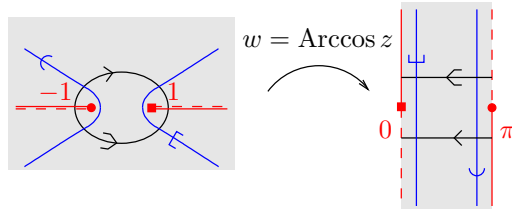
$$\arccos z := \{w \in \mathbb{C} : \cos w = z\} = \pi/2 - \arcsin z = -i \log \left(z + (z^2 - 1)^{1/2} \right), \quad z \in \mathbb{C},$$

med principalvärdet

$$\begin{aligned} \operatorname{Arccos} z &:= \pi/2 - \operatorname{Arcsin} z \\ &= -i \operatorname{Log} \left(z + i \sqrt{1 - z^2} \right), \quad z \in \mathbb{C}; \end{aligned}$$

$\operatorname{Arccos} x$ sammanfaller med vanliga reella envärda $\arccos x$ då $x \in [-1, 1]$.

I omgivningar till alla punkter utom $z = \pm 1$ har $\arccos z$ grenar, med derivata $-i/(z^2 - 1)^{1/2}$, med samma gren till $(z^2 - 1)^{1/2}$ som innanför log; speciellt får vi för principalgrenen att



$$\frac{d}{dz} \operatorname{Arccos} z = -\frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{z = x : |x| \geq 1\}.$$

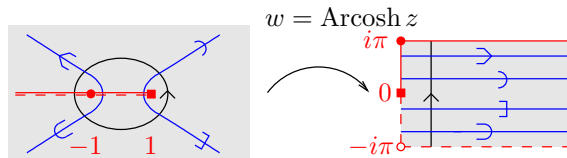
I reell analys definieras **arcosh** som inversen till en restriktion av cosh: att $y = \operatorname{arcosh} x$ betyder precis att $\cosh y = x$ och $y \geq 0$, d.v.s. att $\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ med definitionsmängd $[1, +\infty[$ och värdemängd $[0, +\infty[$. Reella cosh är inte injektiv, utan $\cosh y_1 = \cosh y_2$ precis då $y_1 = \pm y_2$. I komplex analys definieras som bekant $\cosh w := (e^w + e^{-w})/2$ för $w \in \mathbb{C}$, så $\cosh w = \cos(iw)$. På sedvanligt sätt definierar vi den flervärda funktionen

$$\operatorname{arcosh} z := \{w \in \mathbb{C} : \cosh w = z\} = \log \left(z + (z^2 - 1)^{1/2} \right), \quad z \in \mathbb{C},$$

med principalvärdet

$$\operatorname{Arcosh} z := \operatorname{Log} \left(z + \sqrt{z + 1} \sqrt{z - 1} \right), \quad z \in \mathbb{C},$$

så att $\text{Arcosh } x$ överensstämmer med reella envärda $\text{arcosh } x$ då $x \geq 1$; att man här väljer $\sqrt{z+1}\sqrt{z-1}$ i stället för $\sqrt{z^2-1}$, som ju har samma värden då $z = x \geq 1$, beror på att den förra är analytisk i en mycket större mängd i $\mathbb{C}$, jfr Avsnitt 8.2.



Trivialt är $\text{arcosh } z = i \arccos z$, och dessutom gäller sambanden

$$\text{Arcosh } z = \begin{cases} i \text{Arccos } z & \text{då } \text{Im } z > 0 \text{ eller } z = x \leq 1, \\ -i \text{Arccos } z & \text{då } \text{Im } z < 0 \text{ eller } z = x \geq 1. \end{cases}$$

Grenar till $\text{arcosh } z$ finns i omgivningarna till alla punkter utom $z = \pm 1$ och har derivata $1/(z^2-1)^{1/2}$, med samma grenval som innanför log. För principalgrenen gäller det att

$$\frac{d}{dz} \text{Arcosh } z = \frac{1}{\sqrt{z+1}\sqrt{z-1}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 1].$$

8.5 arctan och Arctan, samt artanh och Artanh

I reell analys definieras **arctan** som inversen till en viss restriktion av tangens:

$$y = \arctan x \quad \Leftrightarrow \quad \tan y = x \quad \text{och} \quad -\pi/2 < y < \pi/2.$$

Definitionsmängden är hela $\mathbb{R}$ och värdemängden $]-\pi/2, \pi/2[$. Som bekant är inte ens reella tangens injektiv, utan $\tan y_1 = \tan y_2$ precis då $y_1 = y_2 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ (om dessutom $y_{1,2} \neq \pi/2 + n\pi$).

I komplex analys definieras ju

$$\tan w := \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1}, \quad w \in \mathbb{C},$$

där vi har satt

$$\tan(\pi/2 + n\pi) := \infty \in \hat{\mathbb{C}}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

ty i dessa punkter har tangens enkelpoler, jfr Exempel 7.8 på s. 156. Vi kan således skriva

$$\tan w = i \cdot \frac{1-s}{1+s}, \quad \text{där} \quad s = e^{2iw},$$

alltså som en sammansättning av en exponentialfunktion och en Möbiusavbildning. Eftersom Möbiusavbildningar avbildar $\hat{\mathbb{C}}$ bijektivt på $\hat{\mathbb{C}}$ och e^{2iw} antar alla värden i $\hat{\mathbb{C}}$ förutom 0 och ∞ när $w \in \mathbb{C}$ ser vi att värdemängden för tangens är $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\pm i\}$.

Bristen på injektivitet blir densamma som för reella tangens: Med $s_{1,2} = e^{2iw_{1,2}}$ får vi nämligen att

$$\begin{aligned} \tan w_1 = \tan w_2 & \Leftrightarrow s_1 = s_2 \Leftrightarrow e^{2iw_1} = e^{2iw_2} \\ & \Leftrightarrow w_1 = w_2 + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

där den första ekvivalensspilen beror på att Möbiusavbildningar är injektiva; notera speciellt att ovanstående samband gäller även i polerna $\pi/2 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, för tangens.

Vi definierar nu på sedvanligt sätt den flervärda funktionen

$$\arctan z := \{w \in \mathbb{C} : \tan w = z\} = \frac{1}{2i} \log \frac{i-z}{i+z}, \quad z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\pm i\},$$

med principalvärdet

$$\text{Arctan } z := \frac{1}{2i} \text{Log} \frac{i-z}{i+z}, \quad z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\pm i\}; \quad (8.1)$$

speciellt är

$$\arctan \infty = \pi/2 + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{och} \quad \operatorname{Arctan} \infty = \pi/2.$$

Värdemängden för $\operatorname{Arctan} z$ blir $-\pi/2 < \operatorname{Re} w \leq \pi/2$ (∞ ingår inte), och $\operatorname{Arctan} x$ sammanfaller med vanliga reella envärda $\arctan x$ när $x \in \mathbb{R}$; detta kan man se genom att studera funktionen i två steg, som i figuren intill.

$\hat{\mathbb{C}}$ -cirkclar m.a.p. vilka $-i$ och i är spegelpunkter avbildas på vågräta sträckor, medan $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkelbågar från $-i$ till i avbildas på lodräta linjer. (Detta ses enklast genom att återigen studera avbildningen i två steg.) $\operatorname{Arctan} z$ är kontinuerlig från höger längs strålarna $z = iy$, $|y| > 1$, och även i ∞ i meningen att man närmar sig ∞ från högra halvplanet $\operatorname{Re} z \geq 0$.

Grenar till $\arctan z$ finns i omgivningarna till alla punkter utom $z = \pm i$ (även till $z = \infty$, i den mening som preciseras i Anmärkning 7.11 på s. 156), och de har alla derivata $1/(1+z^2)$, alltså även principalgrenen:

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Arctan} z = \frac{1}{1+z^2}, \quad z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \{z = iy : |y| \geq 1\},$$

vilket i integralform kan skrivas

$$\operatorname{Arctan} z = \int_0^z \frac{ds}{1+s^2}, \quad z \in \Omega,$$

där $\int_0^z$ betyder kurvintegralen längs vilken som helst styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva i Ω från 0 till z ; notera att $\operatorname{Arctan} 0 = 0$.

Avslutningsvis några ord om artanh . I reell analys definieras **artanh** som inversen till $\tanh$: att $y = \operatorname{artanh} x$ betyder precis att $\tanh y = x$, så $\operatorname{artanh} x = (1/2) \ln((1+x)/(1-x))$, med definitionsmängd $] -1, 1[$ och värdemängd $\mathbb{R}$. I komplex analys definieras $\tanh w := (\sinh w)/(\cosh w)$, så $\tanh w = i \tan(-iw)$. På sedvanligt sätt definierar vi den flervärda funktionen

$$\operatorname{artanh} z := \{w \in \mathbb{C} : \tanh w = z\} = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}, \quad z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\pm 1\},$$

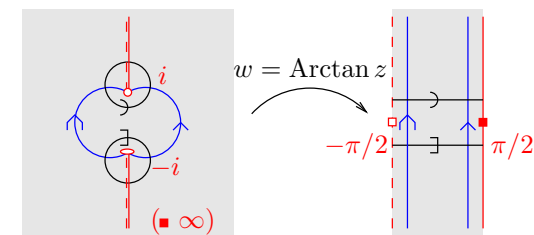
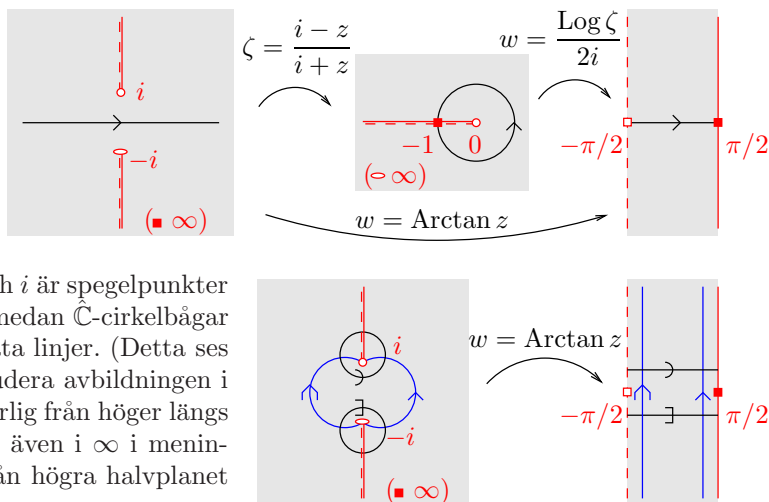
med principalvärdet

$$\operatorname{Artanh} z := \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{1+z}{1-z}, \quad z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\pm 1\}, \quad (8.2)$$

så att $\operatorname{Artanh} x$ sammanfaller med reella envärda $\operatorname{artanh} x$ då $x \in]-1, 1[$.

Trivialt är $\operatorname{artanh} z = i \arctan(-iz)$ och faktiskt är även $\operatorname{Artanh} z = i \operatorname{Arctan}(-iz)$. Grenar finns i omgivningarna till alla punkter utom $z = \pm 1$ (även till $z = \infty$), och de har alla derivata $1/(1-z^2)$, alltså även principalgrenen:

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Artanh} z = \frac{1}{1-z^2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{z = x : |x| \geq 1\}.$$



8.6 Principalvärden i Maple

I Maple finns bl.a. de komplexvärda funktionerna som listas i nedanstående tabells vänstra kolumn. Notera speciellt att även de inversa *hyperboliska* funktionerna i Maple – något oegentligt – har namn som börjar med `arc`.

<code>ln</code>	<code>Log</code>
<code>sqrt</code>	$\sqrt{}$
<code>arcsin</code>	<code>Arcsin</code>
<code>arcsinh</code>	<code>Arsinh</code>
<code>arccos</code>	<code>Arccos</code>
<code>arccosh</code>	<code>Arcosh</code>
<code>arctan*</code>	<code>Arctan</code>
<code>arctanh*</code>	<code>Artanh</code>

Alla utom de två sista (*-märkta) funktionerna är identiska med våra principalvärden. Maples definitioner av `arctan` och `arctanh` skiljer sig från våra definitioner av `Arctan` respektive `Artanh` på följande vis: Jämfört med våra funktioner har Maple valt omvända kontinuitetsegenskaper på strålen från $-i$ och nedåt för `arctan` respektive på strålen från 1 och högerut för `arctanh`; detta beror på att de väljer det de kallar ”moturs kontinuitet”. Sambanden (8.1) och (8.2) gäller därför inte längs dessa respektive strålar för Maples motsvarigheter till `Arctan` och `Artanh`.

9 *Schwarz-Christoffels metod

Låt i detta kapitel

$$L(z) = \ln|z| + i\theta(z), \quad -\pi/2 < \theta(z) < 3\pi/2,$$

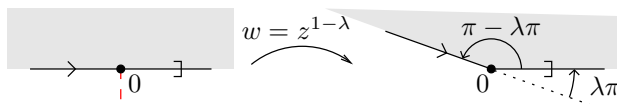
vara den gren till $\log z$ som är definierad i området $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{iy : y \leq 0\}$ och som uppfyller att $L(1) = 0$. I detta kapitel låter vi också, för korthets skull,

$$z^\alpha := \exp(\alpha L(z)) = |z|^\alpha e^{i\alpha\theta(z)}, \quad z \in \Omega, \alpha \in \mathbb{R},$$

som, trots beteckningen z^α (i stället för $\widetilde{z^\alpha}$), nu är en enda gren till den normalt flervärda funktionen $\exp(\alpha \log z)$; jfr Avsnitt 2.3.

Låt $-1 < \lambda < 1$ (d.v.s. $0 < 1 - \lambda < 2$), sätt $w = f(z) = z^{1-\lambda}$ för $z \in \Omega$ och, med kontinuitet, $f(0) = 0$. Strålen $z = re^{i\theta}$, $r \geq 0$, $\theta \in [0, \pi]$ fixt, avbildas på strålen $w = \rho e^{i\psi}$, $\rho \geq 0$, där $\psi = (1 - \lambda)\theta$, så övre halvplanet $\text{Im } z \geq 0$ avbildas omväntbart entydigt på sektorn $0 \leq \psi \leq (1 - \lambda)\pi$.

Speciellt blir bilden i w -planet av realaxeln i z -planet två strålar som möts i origo, och där sker en vridning vinkeln $\lambda\pi$ i positiv led, se figur.



Detta kan med fördel uttryckas m.h.a. derivatan $f'(z) = (1 - \lambda)z^{-\lambda}$, $z \in \Omega$. Det komplexa talet $f'(t_0)$, där $t_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, är ju en tangentvektor till kurvan $w = f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, i punkten $f(t_0)$. Vidare, $f'(t) = (1 - \lambda)|t|^{-\lambda}e^{-i\lambda\pi}$ när $t < 0$ medan $f'(t) = (1 - \lambda)|t|^{-\lambda}e^{-i\lambda 0}$ när $t > 0$, och ännu en gång ser vi att tangentriktningen gör ett språng med vinkeln $\lambda\pi$ i positiv led i origo.

Vår funktion $f(z) = z^{1-\lambda}$ skriver vi nu i integralform:

$$f(z) = A \int_0^z s^{-\lambda} ds + B, \quad z \in \Omega \cup \{0\}, \quad -1 < \lambda < 1,$$

där $A = 1 - \lambda$ och $B = 0$. Här betyder $\int_0^z$ integration längs vilken som helst styckvis C^1 -kurva i $\Omega \cup \{0\}$ från 0 till z , och att man får samma värde längs alla sådana kurvor beror på att $z^{-\lambda}$ är analytisk i det enkelt sammanhängande området Ω (se Sats 3.32 på s. 55) samt att f är kontinuerlig i 0. Notera att integralen är generaliserad i $z = 0$ om $\lambda > 0$, men att den ändå är konvergent eftersom $\lambda < 1$. Om vi vill kan vi byta ut undre gränsen 0 mot vilken punkt $z_0 \in \Omega$ som helst – det ändrar endast värdet på B .

Vi ska i nedanstående avsnitt generalisera metoden ovan i syfte att avbilda övre halvplanet på området innanför en polygon med givna vridningsvinklar genom att utgå ifrån en derivata som består av en produkt av faktorer $(z - x_k)^{-\lambda_k}$ där $x_k \in \mathbb{R}$; på så sätt får vi en klass av avbildningar som kallas **Schwarz-Christoffelavbildningar**.

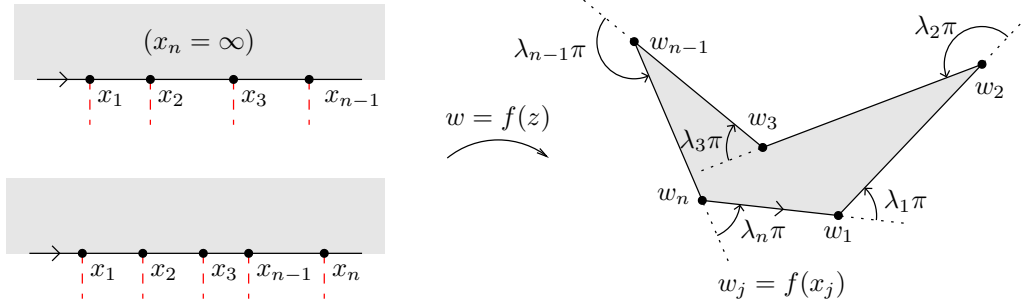
9.1 Avbildningar på polygoner i $\mathbb{C}$

Låt $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1}$ vara punkter på realaxeln, och låt antingen $x_n > x_{n-1}$ eller $x_n = \infty \in \hat{\mathbb{C}}$. Antag att

$$-1 < \lambda_k < 1 \quad \text{för } k = 1, \dots, n \quad \text{och} \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 2;$$

villkoret $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 2$ gör att det totala vinkeltillskottet blir $\sum_{k=1}^n \lambda_k \pi = 2\pi$ (ett varv moturs).

I figuren nedan är $\lambda_3 < 0$ medan övriga $\lambda_k > 0$:



För att åstadkomma rätt vridningsvinklar utgår vi från funktionen

$$g(z) = \begin{cases} \int_0^z (s-x_1)^{-\lambda_1} (s-x_2)^{-\lambda_2} \cdots (s-x_{n-1})^{-\lambda_{n-1}} ds & \text{om } x_n = \infty, \\ \int_0^z (s-x_1)^{-\lambda_1} (s-x_2)^{-\lambda_2} \cdots (s-x_{n-1})^{-\lambda_{n-1}} (s-x_n)^{-\lambda_n} ds & \text{om } x_n \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

i det enkelt sammanhängande område Ω som utgörs av $\mathbb{C}$ med alla strålar utgående från punkterna $x_k \in \mathbb{R}$ och riktade rakt nedåt borttagna, se figur ovan. Integralerna är oberoende av väg i $\Omega \cup \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ respektive $\Omega \cup \{x_1, \dots, x_n\}$, så g är väldefinierad där. Vidare,

$$g'(z) = \begin{cases} (z-x_1)^{-\lambda_1} (z-x_2)^{-\lambda_2} \cdots (z-x_{n-1})^{-\lambda_{n-1}} & \text{om } x_n = \infty, \\ (z-x_1)^{-\lambda_1} (z-x_2)^{-\lambda_2} \cdots (z-x_{n-1})^{-\lambda_{n-1}} (z-x_n)^{-\lambda_n} & \text{om } x_n \in \mathbb{R}; \end{cases}$$

notera att $g' \neq 0$ i Ω , så g är konform i Ω . Vid behov skalar/vrider och translaterar vi sedan bilden genom att sätta

$$f(z) = Ag(z) + B, \quad A \in \mathbb{C}^*, B \in \mathbb{C}.$$

Att $\lambda_k < 1$ medför att g är kontinuerlig även i $x_k \in \mathbb{R}$, vilket följer av att vi nära x_k , men utanför den nedåtriktade strålen som utgår från x_k , kan skriva $g'(z) = (z-x_k)^{-\lambda_k} h(z)$ för någon funktion h som är analytisk i x_k ; $h(z)$ är helt enkelt produkten av övriga faktorer $(z-x_j)^{-\lambda_j}$.

Längs realaxeln kommer argumentet för g' att vara styckvis konstant, med språng $\lambda_k \pi$ i varje punkt $x_k \in \mathbb{R}$. Punkterna $x_k \in \mathbb{R}$ delar upp realaxeln i ett antal delintervall, och i varje sådant intervall finns det således en konstant vinkel θ_0 sådan att $g'(x) = e^{i\theta_0} |g'(x)|$ för alla x i intervallet. Detta medför att $g(x) - g(\xi) = \int_\xi^x g'(t) dt = e^{i\theta_0} \int_\xi^x |g'(t)| dt$ för alla ξ och x i intervallet, som därmed avbildas bijektivt på en del av en rät linje med lutningsvinkel θ_0 . Alltså avbildas realaxeln på ett polygontåg, med rätt vridningsvinklar, och faktiskt utgör detta polygontåg en sluten kurva i $\mathbb{C}$ när vi även tar med bilden av ∞ , som vi strax ska se.

Först ett enkelt resultat som säger att $g'(z)$ långt bort från origo i övre halvplanet uppför sig ungefär som en z -potens:

9.1. Hjälpssats. Låt M vara det största av alla tal $|x_k|$ där $x_k \neq \infty$. Om $|z| > M$ och $\text{Im } z \geq 0$, låt

$$h(z) = \frac{g'(z)}{z^{-2}} \quad \text{om } x_n \in \mathbb{R}, \quad \text{respektive} \quad h(z) = \frac{g'(z)}{z^{\lambda_n-2}} \quad \text{om } x_n = \infty.$$

Då gäller följande:

- (i) h är analytisk där $|z| > M$ och $\text{Im } z \geq 0$.
- (ii) $h(z) \rightarrow 1$ då $|z| \rightarrow +\infty$ i övre halvplanet $\text{Im } z \geq 0$
- (iii) $h(x) > 0$ då $x \in \mathbb{R}$ och $|x| > M$

Bevis. Vi genomför beviset i fallet då $x_n = \infty$; fallet då $x_n \in \mathbb{R}$ blir närmast identiskt.

(i) Påståendet följer omedelbart av definitionen av g och M .

(ii) När $k \in \{1, \dots, n-1\}$ är det sant att $x_k \in \mathbb{R}$ och $|x_k| \leq M$, så punkten $z - x_k$ ligger någonstans på den vågräta diametern $[z - M, z + M]$ i cirkelskivan $\bar{D}(z, M)$. I figuren intill ser vi därför omedelbart att olikheten

$$|\operatorname{Arg}(z - x_k) - \operatorname{Arg} z| \leq \operatorname{Arcsin}(M/|z|) \quad (= \alpha \text{ i figuren})$$

gäller om $|z| > M$ och $\operatorname{Im} z \geq 0$. En omskrivning till polär form ger likheten

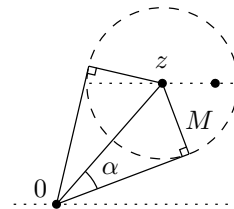
$$\frac{(z - x_k)^{-\lambda_k}}{z^{-\lambda_k}} = \left|1 - \frac{x_k}{z}\right|^{-\lambda_k} \exp\left(-i\lambda_k(\operatorname{Arg}(z - x_k) - \operatorname{Arg} z)\right),$$

så $(z - x_k)^{-\lambda_k}/z^{-\lambda_k} \rightarrow 1$ då $|z| \rightarrow +\infty$ och $\operatorname{Im} z \geq 0$. Eftersom $z^{\alpha_1} z^{\alpha_2} = z^{\alpha_1 + \alpha_2}$ för aktuella z för vår gren och $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 2$ är $z^{\lambda_n - 2} = z^{-\lambda_1} \dots z^{-\lambda_{n-1}}$, och vi får därför att

$$\frac{g'(z)}{z^{\lambda_n - 2}} = \frac{(z - x_1)^{-\lambda_1}}{z^{-\lambda_1}} \dots \frac{(z - x_{n-1})^{-\lambda_{n-1}}}{z^{-\lambda_{n-1}}} \rightarrow 1 \dots 1 = 1$$

då $|z| \rightarrow +\infty$ och $\operatorname{Im} z \geq 0$.

(iii) Om $x \in \mathbb{R}$ och $|x| > M$ ser vi att $\operatorname{Arg}(x - x_k) = \operatorname{Arg} x$ när $k \in \{1, \dots, n-1\}$, så $(x - x_k)^{-\lambda_k}/x^{-\lambda_k} > 0$ för dessa x , varför $h(x) > 0$ för dessa x . ■



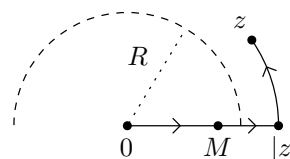
9.2. Proposition (Kontinuitet i ∞). Det finns ett tal $\gamma \in \mathbb{C}$ sådant att $g(z) \rightarrow \gamma$ då $z \rightarrow \infty$ i övre halvplanet $\operatorname{Im} z \geq 0$.

Bevis. Vi genomför beviset i fallet då $x_n = \infty$; fallet då $x_n \in \mathbb{R}$ hanteras analogt.

Låt M vara som i Hjälpssats 9.1. Trivialt är $x^{\lambda_n - 2} > 0$ om $x > M$, och enligt Hjälpssats 9.1 är även $g'(x) > 0$ om $x > M$, och $g'(x)/x^{\lambda_n - 2} \rightarrow 1$ då $x \rightarrow +\infty$. Eftersom $\lambda_n < 1$ är $\int_M^{+\infty} t^{\lambda_n - 2} dt$ konvergent, och därmed är även $\int_M^{+\infty} g'(t) dt$ konvergent, enligt ett jämförelsekriterium för generaliserade integraler. Alltså existerar gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = g(M) + \int_M^{+\infty} g'(t) dt \in \mathbb{C}$, ett tal som vi nu kallar γ .

Antag att $\operatorname{Im} z \geq 0$ och $|z| > M$. Eftersom $g(0) = 0$ kan vi skriva

$$g(z) = \int_0^{|z|} g'(s) ds + \int_{|z|}^z g'(s) ds = g(|z|) + \int_{|z|}^z g'(s) ds,$$



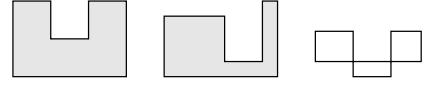
där vi väljer att låta integrationen från $|z|$ till z ske längs cirkelbågen med radie $|z|$ i övre halvplanet, se figur. Eftersom $|g'(z)|/|z|^{\lambda_n - 2} \rightarrow 1$ då $|z| \rightarrow +\infty$ och $\operatorname{Im} z \geq 0$ finns det ett $R > M$ sådant att $|g'(z)| \leq 2|z|^{\lambda_n - 2}$ då $|z| > R$ och $\operatorname{Im} z \geq 0$. ML-uppskattning ger därför att

$$|g(z) - g(|z|)| = \left| \int_{|z|}^z g'(s) ds \right| \leq 2|z|^{\lambda_n - 2} \cdot \pi|z| = 2\pi|z|^{\lambda_n - 1}, \quad |z| > R, \operatorname{Im} z \geq 0,$$

så $g(z) - g(|z|) \rightarrow 0$ då $|z| \rightarrow +\infty$ och $\operatorname{Im} z \geq 0$, återigen p.g.a. att $\lambda_n < 1$, och eftersom $g(|z|) \rightarrow \gamma$ då $|z| \rightarrow +\infty$ enligt början av beviset ser vi att $g(z) \rightarrow \gamma$ då $z \rightarrow \infty$ i övre halvplanet. ■

Bilden av $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ under avbildningen $w = g(z)$ är alltså ett slutet polygontåg, med givna vridningsvinklar, oavsett var vi placerar själva brytpunkterna $x_1, \dots, x_n$. Placeringen av dessa kommer däremot att påverka hur långa delsträckorna i polygontåget blir, och det är inte ens säkert att polygontåget är rand till ett område.

I figuren intill illustreras vad som kan hända. I samtliga tre fall har vi samma följd av vridningsvinklar, men delsträckorna är olika långa, och i det tredje fallet avgränsar polygontåget inte ett område över huvud taget.



Om polygontåget verkligen är en polygon – och därmed avgränsar ett område – har vi dock en bra avbildning, vilket vi ska se i nedanstående sats, som är detta kapitelts viktigaste resultat.

Låt $\mathbb{H}$ stå för övre halvplanet $\text{Im } z > 0$. Vi betraktar $\mathbb{H}$ som en delmängd av Riemannsfären $\hat{\mathbb{C}}$; då är randen $\partial\mathbb{H}$ realaxeln $\text{Im } z = 0$ inklusive ∞ (d.v.s. $\hat{\mathbb{R}}$), och $\bar{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$ är övre halvplanet $\text{Im } z \geq 0$ inklusive ∞ .

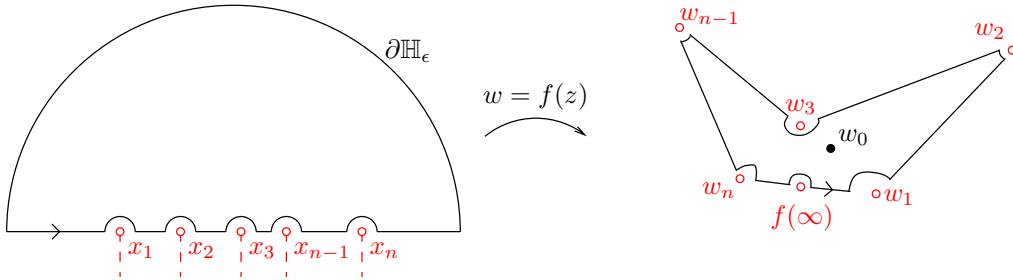
9.3. Sats (Schwarz-Christoffelavbildning på polygon). Avbildningen

$$w = f(z) = A g(z) + B,$$

där $A \in \mathbb{C}^*$ och $B \in \mathbb{C}$, är analytisk i $\mathbb{C}$ undantaget alla strålar som utgår från punkterna $x_k \in \mathbb{R}$ och är riktade rakt nedåt; dessutom är den kontinuerlig i punkterna $x_1, \dots, x_n, \infty$.

Vidare, om $f(\partial\mathbb{H})$ är en polygon, så avbildas $\mathbb{H}$ bijektivt och konformt på området innanför polygonen, och $\partial\mathbb{H}$ bijektivt på själva polygonen.

Bevis. Det återstår endast att bevisa bijektiviteten mellan $\mathbb{H}$ och området P innanför polygonen. Antag därför att $w_0 \in \mathbb{C}$ inte ligger på själva polygonen ∂P .



Låt $\mathbb{H}_\epsilon$ vara alla punkter i $\mathbb{H}$ som uppfyller att $|z| < 1/\epsilon$ och att $|z - x_k| > \epsilon$ för alla k sådana att $x_k \in \mathbb{R}$. För små $\epsilon > 0$ är randen $\partial\mathbb{H}_\epsilon$ en kontur med positiv orientering, f är analytisk på och innanför $\partial\mathbb{H}_\epsilon$, och bilden $f(\partial\mathbb{H}_\epsilon)$ är en sluten styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva. Om $w_0 \notin f(\partial\mathbb{H}_\epsilon)$ gäller därför likheten

$$\Delta_{\partial\mathbb{H}_\epsilon} \arg(f(z) - w_0) = \frac{1}{i} \int_{\partial\mathbb{H}_\epsilon} \frac{f'(z) dz}{f(z) - w_0} = \frac{1}{i} \int_{f(\partial\mathbb{H}_\epsilon)} \frac{dw}{w - w_0} = \Delta_{f(\partial\mathbb{H}_\epsilon)} \arg(w - w_0),$$

jfr (6.1) på s. 136. Eftersom f är kontinuerlig i alla punkter $x_1, \dots, x_n, \infty$ kommer bilderna av halvcirkelbågarna att närma sig punkterna $w_1, \dots, w_n, f(\infty)$ när $\epsilon \rightarrow 0$, och eftersom $w_0 \notin \partial P$ kan vi därför hitta ett $\epsilon_0 > 0$ som är så litet att $w_0 \notin f(\partial\mathbb{H}_\epsilon)$ för alla ϵ sådana att $0 < \epsilon < \epsilon_0$. För dessa ϵ är argumenttillskottet $\Delta_{f(\partial\mathbb{H}_\epsilon)} \arg(w - w_0) = 2\pi$ om w_0 ligger innanför ∂P , d.v.s. i området P , men 0 om w_0 ligger utanför ∂P . Enligt argumentprincipen (Sats 6.2 på s. 137) har därför den analytiska funktionen $z \mapsto f(z) - w_0$ precis ett nollställe i varje sådant $\mathbb{H}_\epsilon$, och därmed i $\mathbb{H}$, om w_0 ligger i P , och, på samma sätt, inget nollställe i $\mathbb{H}$ om w_0 ligger utanför ∂P , d.v.s. i $\mathbb{C} \setminus \bar{P}$. Av detta drar vi slutsatsen att $P \subseteq f(\mathbb{H})$ respektive $(\mathbb{C} \setminus \bar{P}) \cap f(\mathbb{H}) = \emptyset$, där det senare sambandet också kan skrivas $f(\mathbb{H}) \subseteq \bar{P}$. Men f är en öppen avbildning så $f(\mathbb{H})$ är en öppen mängd (se Följsats 4.61 på s. 93), varför $f(\mathbb{H}) \subseteq P$ och därmed $f(\mathbb{H}) = P$; enligt ovan antas dessutom varje värde i P precis en gång. ■

Observera att vi i andra delen av satsen *antar* att $f(\partial\mathbb{H})$ är en polygon, men det enda vi egentligen vet är att $f(\partial\mathbb{H})$ är ett slutet polygontåg med rätt vridningsvinklar $\lambda_1\pi, \dots, \lambda_n\pi$. Man kan visa att det till varje polygon finns punkter $x_1, \dots, x_n$ och konstanter A och B sådana att den så uppkomna Schwarz-Christoffelavbildningen verkligen avbildar $\partial\mathbb{H}$ bijektivt på polygonen och $\mathbb{H}$ bijektivt och konformt på området innanför polygonen. I denna text kommer vi dock att nöja oss med att konstruera konkreta avbildningar som i varje enskilt fall därmed också bevisar existensen.

9.4. Anmärkning (Schwarz-Christoffelavbildning från cirkelskiva). Med hjälp av Möbius-avbildningar mellan halvplan och cirkelskiva kan vi gå fram och tillbaka mellan vår typ av Schwarz-Christoffelavbildningar och

$$w = \tilde{f}(z) = \tilde{A} \int_0^z (s - e^{i\alpha_1})^{-\lambda_1} \cdots (s - e^{i\alpha_n})^{-\lambda_n} ds + \tilde{B}, \quad |z| < 1,$$

där $e^{i\alpha_1}, \dots, e^{i\alpha_n}$ är olika punkter på enhetscirkeln $\mathbb{T}$ och talen λ_k är som förut; grenarna vi väljer för $(s - e^{i\alpha})^{-\lambda}$ har snitt riktade vinkelrätt ut från $\mathbb{T}$. $\blacktriangle$

När det handlar om att placera punkterna $x_1, \dots, x_n$ utmed $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkeln $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} = \hat{\mathbb{R}}$ kan vi se att tre av dessa kan väljas fritt utan att vi därmed begränsar vilka polygoner vi kan få. Det beror på att vi kan avbilda $\mathbb{H}$ bijektivt på sig själv med en Möbiusavbildning och samtidigt avbilda tre givna punkter på $\partial\mathbb{H}$ på tre givna punkter på $\partial\mathbb{H}$ – förutsatt att orienteringen bevaras – och fortfarande få en Schwarz-Christoffelavbildning i de nya variablerna, jfr Anmärkning 9.4. Exempelvis kan vi låta tre av punkterna – om så många behövs – vara 0, 1 och ∞ , men ibland är det av symmetriskäl bättre att välja andra punkter.

9.5. Exempel (Likbenta trianglar). En likbent triangel har två identiska vridningsvinklar $\lambda\pi$, där $1/2 < \lambda < 1$. Av symmetriskäl väljer vi $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ och $x_3 = \infty$, som ska avbildas på $w_1 = -1$, $w_2 = 1$ och $w_3 = ib$, där $b > 0$ beror på λ (enkel trigonometri). Ansatsen blir därför

$$w = f(z) = A \int_0^z (s+1)^{-\lambda}(s-1)^{-\lambda} ds + B.$$

Eftersom $(t-1)^{-\lambda} = e^{-i\lambda\pi}(1-t)^{-\lambda}$ om $t < 1$ får vi, med parametriseringen $s = t$, $t: 0 \rightarrow 1$, att

$$1 = f(1) = A \int_0^1 (t+1)^{-\lambda}(t-1)^{-\lambda} dt + B = Ae^{-i\lambda\pi} \int_0^1 \frac{dt}{(1-t^2)^\lambda} + B,$$

och, analogt, med parametriseringen $s = -t$, $t: 0 \rightarrow 1$, att

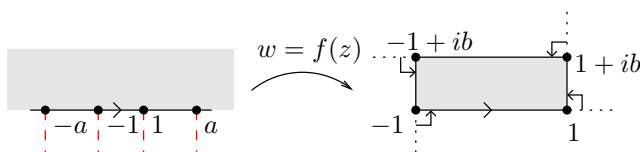
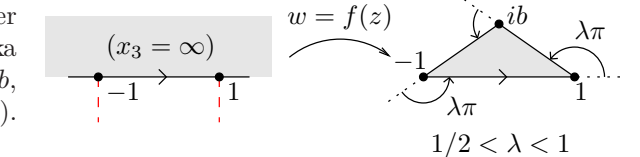
$$-1 = f(-1) = A \int_0^1 (-t+1)^{-\lambda}(-t-1)^{-\lambda}(-dt) + B = -Ae^{-i\lambda\pi} \int_0^1 \frac{dt}{(1-t^2)^\lambda} + B.$$

Genom att lösa ut A och B i detta ekvationssystem får vi därför avbildningen

$$w = f(z) = e^{i\lambda\pi} \int_0^z (s+1)^{-\lambda}(s-1)^{-\lambda} ds \Big/ \int_0^1 \frac{dt}{(1-t^2)^\lambda}.$$

Specialfallet $\lambda = 2/3$ ger en **liksidig triangel**, medan $\lambda = 1/2$ (formellt än så länge eftersom $\lambda_3 = 1$ i så fall) ger en halvresa, se Exempel 9.9 nedan. $\blacktriangle$

9.6. Exempel (Rektanglar). En rektangel har fyra räta vridningsvinklar. Om vi försöker med $x_2 = -1$ och $x_3 = 1$, som ska avbildas på $w_2 = -1$ och $w_3 = 1$, är det bäst här, för att inte bryta symmetrin, att välja $x_1 = -a$ och $x_4 = a$, där $a > 1$, som ska avbildas på $w_1 = -1+ib$ och $w_4 = 1+ib$, där $b > 0$ beror på a . Ansatsen blir nu



$$w = f(z) = A g(z) + B = A \int_0^z (s+a)^{-1/2}(s+1)^{-1/2}(s-1)^{-1/2}(s-a)^{-1/2} ds + B.$$

På liknande sätt som i föregående exempel får vi att

$$g(1) = \int_0^1 (t+a)^{-1/2}(t+1)^{-1/2}(t-1)^{-1/2}(t-a)^{-1/2} dt = - \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(a^2-t^2)}}$$

och att $g(-1) = -g(1)$. Kraven att $f(-1) = -1$ och $f(1) = 1$ bestämmer A och B , och vi får att

$$w = f(z) = - \int_0^z (s+a)^{-1/2}(s+1)^{-1/2}(s-1)^{-1/2}(s-a)^{-1/2} ds \Big/ \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(a^2-t^2)}}.$$

För varje givet val av $a > 1$ får vi alltså att $f(-1) = -1$ och $f(1) = 1$. Däremot varierar läget på rektangelns övre sida med a . Eftersom $ib = f(a) - f(1)$ och

$$g(a) - g(1) = \int_1^a (t+a)^{-1/2}(t+1)^{-1/2}(t-1)^{-1/2}(t-a)^{-1/2} dt = -i \int_1^a \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(a^2-t^2)}}$$

får vi därför att rektangelns lodräta sidor, för detta värde på a , har längd

$$b = b(a) = \int_1^a \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(a^2-t^2)}} \Big/ \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(a^2-t^2)}}.$$

Man kan visa att det till varje $b > 0$ finns ett $a > 1$ som ger en avbildning på rektangeln med hörn ± 1 och $\pm 1 + ib$.

I specialfallet **kvadrat** kan man direkt välja brytpunkterna $-1, 0, 1$ och ∞ . ▲

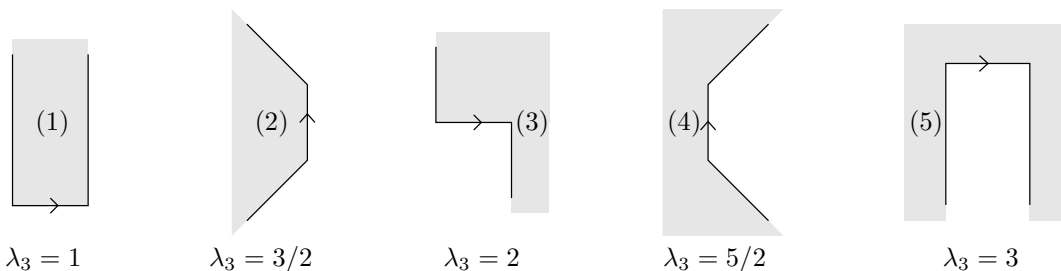
9.2 Avbildningar på polygoner i $\hat{\mathbb{C}}$

I detta avsnitt ska vi konstruera Schwarz-Christoffelavbildningar på polygoner som har ett – och endast ett – hörn i ∞ .

Låt $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1}$ vara punkter på realaxeln och $x_n = \infty \in \hat{\mathbb{C}}$, och antag att $-1 < \lambda_k < 1$ för $k = 1, \dots, n-1$ och, som förut, att $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 2$, eftersom det totala vinkeltillskottet måste vara 2π ; det nya är att

$$\lambda_n \geq 1.$$

9.7. Exempel. I figurerna nedan ger vi fem exempel på hur det kan se ut nu när $\lambda_n \geq 1$. I samtliga fall har vi tre vridningar, av vilka en sker i oändlighetspunkten ($w_1, w_2 \in \mathbb{C}$, $w_3 = \infty$) och vridningsvinklarna – förutom den i ∞ – är $\pm\pi/2$ eller $\pm\pi/4$.



I fall (1) är $\lambda_1 = 1/2 = \lambda_2$; i fall (2) $\lambda_1 = 1/4 = \lambda_2$; i fall (3) $\lambda_1 = 1/2$ och $\lambda_2 = -1/2$; i fall (4) $\lambda_1 = -1/4 = \lambda_2$; och i fall (5) $\lambda_1 = -1/2 = \lambda_2$. Eftersom vi kräver att $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2$ får vi därför ovanstående värden på λ_3 i de fem fallen. ▲

Vi låter, som förut i fallet $x_n = \infty$,

$$g(z) = \int_0^z (s - x_1)^{-\lambda_1} (s - x_2)^{-\lambda_2} \cdots (s - x_{n-1})^{-\lambda_{n-1}} ds.$$

g är analytisk och konform i $\mathbb{C}$ utom längs alla strålar som utgår från punkterna $x_k \in \mathbb{R}$ och är riktade rakt nedåt, och dessutom är g kontinuerlig i punkterna $x_1, \dots, x_{n-1}$ eftersom $\lambda_k < 1$ för $k = 1, \dots, n-1$. Faktum är att g är kontinuerlig även i $x_n = \infty$, som avbildning in i $\hat{\mathbb{C}}$:

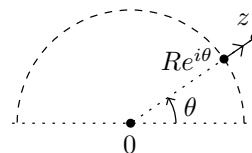
9.8. Proposition (Kontinuitet i ∞). $g(z) \rightarrow \infty$ då $z \rightarrow \infty$ i övre halvplanet $\text{Im } z \geq 0$.

Bevis. Vi ska alltså visa att $|g(z)| \rightarrow +\infty$ då $|z| \rightarrow +\infty$ och $\text{Im } z \geq 0$.

Låt R vara så stort att $|g'(z)| \geq |z|^{\lambda_n-2}/2$ och samtidigt $|\varphi(z)| < \pi/3$ i framställningen $g'(z) = |g'(z)|e^{i\varphi(z)}e^{i(\lambda_n-2)\text{Arg } z}$ då $|z| > R$ och $\text{Im } z \geq 0$; ett sådant R finns enligt Hjälpssats 9.1. Låt $\theta = \text{Arg } z$. Vi kan skriva

$$g(z) = g(Re^{i\theta}) + \int_{Re^{i\theta}}^z g'(s) ds,$$

där integralen nu kan uppskattas genom att parametrisera sträckan från $Re^{i\theta}$ till $z = |z|e^{i\theta}$ via $s(t) = te^{i\theta}$, $t: R \rightarrow |z|$, där θ är fixt:



$$\begin{aligned} \left| \int_{Re^{i\theta}}^z g'(s) ds \right| &= \left| e^{i(\lambda_n-2)\theta} e^{i\theta} \int_R^{|z|} e^{i\varphi(s(t))} |g'(te^{i\theta})| dt \right| \stackrel{*}{\geq} \text{Re} \int_R^{|z|} e^{i\varphi(s(t))} |g'(te^{i\theta})| dt \\ &= \int_R^{|z|} \cos \varphi(te^{i\theta}) \cdot |g'(te^{i\theta})| dt \geq \frac{1}{2} \int_R^{|z|} |g'(te^{i\theta})| dt \geq \frac{1}{4} \int_R^{|z|} t^{\lambda_n-2} dt, \end{aligned}$$

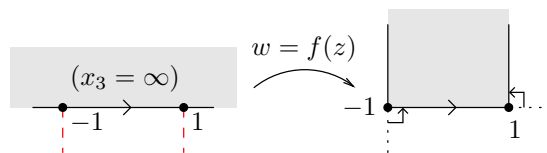
där vi i steg $*$ först utnyttjar att $|e^{i(\lambda_n-2)\theta} e^{i\theta}| = 1$ och sedan den elementära olikheten $|w| \geq \text{Re } w$. Eftersom $\lambda_n \geq 1$ kan vi dra slutsatsen att $|g(z) - g(Re^{i\theta})| \rightarrow +\infty$ då $|z| \rightarrow +\infty$ och $\text{Im } z \geq 0$. Men på halvcirkelskivan $|z| \leq R$, $\text{Im } z \geq 0$ är $|g|$ begränsad eftersom den är kontinuerlig där, så $|g(z)| \rightarrow +\infty$ då $|z| \rightarrow +\infty$ och $\text{Im } z \geq 0$, och beviset är klart. ■

Sats 9.3 gäller fortfarande, med enda skillnaden i formuleringen att $f(\partial\mathbb{H})$ nu är en polygon i $\hat{\mathbb{C}}$ som passerar ∞ en gång; beviset går igenom oförändrat.

En trevlig sak med Schwarz-Christoffelavbildningar av aktuell typ är att vi ibland kan uttrycka integralerna m.h.a. elementära funktioner, åtminstone när vridningsvinklarna är heltalsmultipler av $\pi/2$. Låt oss studera några exempel.

9.9. Exempel (Halvremsa). Vi har här två räta vridningsvinklar i positiv led: $\lambda_1 = 1/2 = \lambda_2$.

Av symmetriskäl väljer vi $x_1 = -1$ och $x_2 = 1$, som vi avbildar på $w_1 = -1$ och $w_2 = 1$. Vi vet också att $x_3 = \infty$ avbildas på $w_3 = \infty$ enligt Proposition 9.8, eftersom $\lambda_3 = 1$. Ansatsen blir



$$w = f(z) = A g(z) + B = A \int_0^z (s+1)^{-1/2} (s-1)^{-1/2} ds + B.$$

Vi får här att

$$g(1) = \int_0^1 (t+1)^{-1/2} (t-1)^{-1/2} dt = -i \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\frac{i\pi}{2},$$

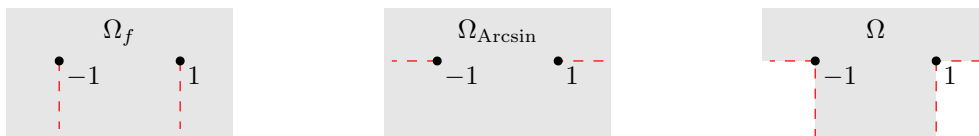
och, analogt, att $g(-1) = i\pi/2$. Kraven att $f(-1) = -1$ och $f(1) = 1$ bestämmer A och B , och vi får att

$$w = f(z) = \frac{2i}{\pi} \int_0^z (s+1)^{-1/2} (s-1)^{-1/2} ds.$$

Funktionen f är analytisk i området Ω_f , som är $\mathbb{C}$ förutom de två nedåtriktade strålarna från punkterna ± 1 (se figur nedan). I intervallet $-1 < x < 1$ kan vi skriva

$$f(x) = \frac{2i}{\pi} \int_0^x (t+1)^{-1/2}(t-1)^{-1/2} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arcsin} x, \quad -1 < x < 1.$$

Eftersom $\operatorname{Arcsin} z$ är analytisk i området $\Omega_{\operatorname{Arcsin}}$, som är $\mathbb{C}$ med strålarna $]-\infty, -1]$ och $[1, +\infty[$ borttagna, ger entydighetssatsen (Sats 4.44 på s. 85) att $f(z) = (2/\pi) \operatorname{Arcsin} z$ i största gemensamma område Ω där båda är analytiska, samtidigt som $]-1, 1[\subseteq \Omega$; området Ω bestäms alltså av att $\operatorname{Im} z > 0$ eller $-1 < \operatorname{Re} z < 1$:



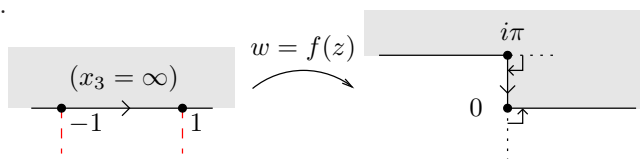
Vi är endast intresserade av övre halvplanet $\operatorname{Im} z \geq 0$, och där kan vi skriva

$$f(z) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arcsin} z, \quad \operatorname{Im} z > 0,$$

med kontinuerlig fortsättning från ovan till $\operatorname{Im} z = 0$, då ju f är kontinuerlig längs realaxeln. Observera att $\operatorname{Arcsin} z$ är kontinuerlig från ovan längs $]-\infty, 1]$ men inte längs $]1, +\infty[$, se Avsnitt 8.3, så uttrycket för $f(z)$ ovan gäller även längs $]-\infty, 1]$ men *inte* längs $]1, +\infty[$. ▲

9.10. Exempel (Trappsteg). Även här har vi två räta vridningsvinklar, men en i negativ och en i positiv led: $\lambda_1 = -1/2$ och $\lambda_2 = 1/2$.

Vi väljer att låta trappsteget gå *nedåt*; om det i stället ska gå *uppåt* blir räkningarna snarlika. Ansatsen blir denna gång följande:



$$w = f(z) = A g(z) + B = A \int_1^z (s+1)^{1/2}(s-1)^{-1/2} ds + B.$$

För $z = x > 1$ får vi att

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_1^x (s+1)^{1/2}(s-1)^{-1/2} ds = \int_1^x \sqrt{\frac{t+1}{t-1}} dt = \int_1^x \frac{t+1}{\sqrt{t^2-1}} dt \\ &= \sqrt{x^2-1} + \ln(x + \sqrt{x^2-1}) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1} + \operatorname{Arcosh} x, \quad x > 1, \end{aligned}$$

se uttrycket för reella $\operatorname{arcosh} x$ i Avsnitt 8.4. Funktionen

$$z \mapsto \sqrt{z+1} \cdot \sqrt{z-1} + \operatorname{Arcosh} z$$

är analytisk i $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 1]$, och eftersom den sammanfaller med $g(z)$ då $z = x > 1$ ger entydighet att de överensstämmer bl.a. i hela övre halvplanet $\operatorname{Im} z > 0$.

Kravet att $f(1) = 0$ ger genast att $B = 0$, och eftersom $g(x) > 0$ då $x > 1$ får vi rätt avslutande stråle i bilden i w -planet precis då $A > 0$. Vidare,

$$g(-1) = \int_1^{-1} (s+1)^{1/2}(s-1)^{-1/2} ds = i \int_{-1}^1 \frac{t+1}{\sqrt{1-t^2}} dt = i\pi,$$

så $A = 1$ (det är för övrigt därför $w_1 = i\pi$ är en lämplig punkt), och vi får till slut avbildningen

$$w = f(z) = \int_1^z (s+1)^{1/2}(s-1)^{-1/2} ds = \sqrt{z+1} \cdot \sqrt{z-1} + \operatorname{Arcosh} z, \quad \operatorname{Im} z > 0,$$

med kontinuerlig fortsättning från ovan till realaxeln; i detta fall innebär det att ovanstående uttryck för $f(z)$ faktiskt gäller även då $\operatorname{Im} z = 0$. ▲

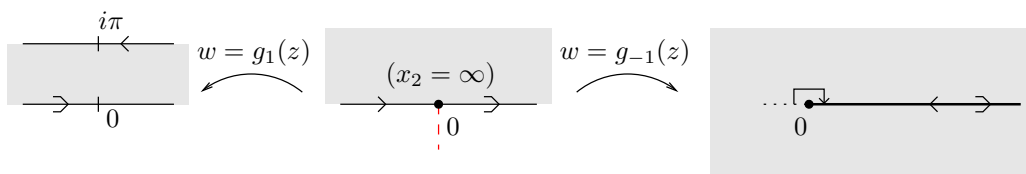
9.3 Avbildningar på generaliserade polygoner i $\hat{\mathbb{C}}$

Vi ska nu, i ett tredje och sista steg, tillåta att vår avbildning $w = f(z)$ enligt Schwarz-Christoffel inte är injektiv på randen $\partial\mathbb{H}$, men fortfarande vill vi att polygontåget $f(\partial\mathbb{H})$ avgränsar ett område i $\hat{\mathbb{C}}$.

Till att börja med undersöker vi vad som händer när vi tillåter att $\lambda_k = \pm 1$ i en brytpunkt $x_k \in \mathbb{R}$; tidigare har vi ju krävt att $-1 < \lambda_k < 1$ i reella brytpunkter.

9.11. Exempel. Som två mycket enkla men ändå illustrativa exempel studerar vi

$$g_1(z) = \int_1^z s^{-1} ds \quad (x_1 = 0, \lambda_1 = 1) \quad \text{och} \quad g_{-1}(z) = \int_0^z s^1 ds \quad (x_1 = 0, \lambda_1 = -1).$$



I det första fallet är $x_2 = \infty$ och $\lambda_2 = 1$. I övre halvplanet $\text{Im } z \geq 0$, utom just i punkten $z = 0$, är $g_1(z) = \text{Log } z$, och eftersom $|\text{Log } z| \geq |\ln |z|| \rightarrow +\infty$ då $z \rightarrow 0$ eller $|z| \rightarrow +\infty$ kan vi med kontinuitet sätta $g_1(0) = \infty = g(\infty)$. g_1 avbildar alltså $\mathbb{H}$ bijektivt och konformt på remsan $0 < \text{Im } w < \pi$, strålen $]0, +\infty[$ bijektivt på linjen $\text{Im } w = 0$ och strålen $]-\infty, 0[$ bijektivt på linjen $\text{Im } w = \pi$; dessutom antas således värdet $w = \infty$ två gånger på $\partial\mathbb{H}$, så g_1 är inte injektiv på $\partial\mathbb{H}$.

I det andra fallet är $x_2 = \infty$ och $\lambda_2 = 3$. I hela $\mathbb{C}$ är $g_{-1}(z) = z^2/2$, och med kontinuitet kan vi sätta $g_{-1}(\infty) = \infty$. g_{-1} avbildar $\mathbb{H}$ bijektivt och konformt på $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$, medan däremot *varje* punkt på strålen $]0, +\infty[$ är bild av två punkter på $\partial\mathbb{H}$, så g_{-1} är inte injektiv på $\partial\mathbb{H}$. ▲

Vi låter, nästan som förut,

$$g(z) = \begin{cases} \int_a^z (s - x_1)^{-\lambda_1} (s - x_2)^{-\lambda_2} \cdots (s - x_{n-1})^{-\lambda_{n-1}} ds & \text{om } x_n = \infty, \\ \int_a^z (s - x_1)^{-\lambda_1} (s - x_2)^{-\lambda_2} \cdots (s - x_{n-1})^{-\lambda_{n-1}} (s - x_n)^{-\lambda_n} ds & \text{om } x_n \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

där vi nu även tillåter att $\lambda_k = \pm 1$ i reella brytpunkter x_k , och om $x_n = \infty$ får $\lambda_n \geq 1$; som förut ska dock $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 2$. Här måste utgångspunkten $a \neq x_k$ för alla k sådana att $\lambda_k = 1$ för att vi inte (alltid) ska få en divergent integral, och integrationsvägen från a till z i $\text{Im } z \geq 0$ får inte passera någon sådan punkt x_k .

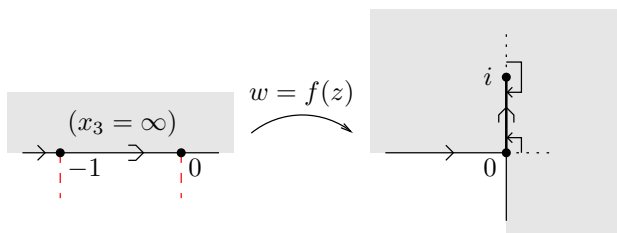
Sats 9.3 gäller fortfarande, med den skillnaden i formuleringen att $f(\partial\mathbb{H})$ nu förutsätts vara ett slutet polygontåg i $\hat{\mathbb{C}}$ som avgränsar ett område i $\mathbb{C}$. Beviset går igenom i princip oförändrat, men för att bevisa att $f(\mathbb{H}) \cap f(\partial\mathbb{H}) = \emptyset$ måste man nu också använda konformitet.

9.12. Exempel (Trekvartsplan med hinder). Vi ska nu avbilda övre halvplanet på sektorn $-\pi/2 < \text{Arg } w < \pi$, men med sträckan $[0, i]$ undantagen.

Här är $\lambda_1 = 1/2$ och $\lambda_2 = -1$, och vi väljer $x_1 = -1$ och $x_2 = 0$ för att förhoppningsvis få en enkel funktion. Lägga märke till att varje punkt $w = iv$ där $0 \leq v < 1$ nu blir bild av *två* punkter på realaxeln: Sträckan $[-1, 0]$ avbildas på sträckan $[0, i]$, medan $[0, +\infty[$ avbildas på strålen från $w = i$ riktad rakt nedåt.

Ansatsen blir

$$w = f(z) = Ag(z) + B = A \int_0^z (s + 1)^{-1/2} s^1 ds + B.$$



För $z = x > 0$ får vi att

$$g(x) = \int_0^x \frac{t dt}{\sqrt{t+1}} = \frac{2}{3}((x-2)\sqrt{x+1} + 2), \quad x > 0.$$

Entydighetssatsen ger på sedvanligt sätt att $f(z) = A'(z-2)\sqrt{z+1} + B'$ bl.a. då $\text{Im } z > 0$, med kontinuerlig fortsättning från ovan till realaxeln, och kraven $f(-1) = 0$ och $f(0) = i$ ger till slut att

$$f(z) = -\frac{i}{2}(z-2)\sqrt{z+1}, \quad \text{Im } z > 0,$$

som vanligt med kontinuerlig fortsättning till realaxeln; i detta fall innebär det att uttrycket för $f(z)$ ovan gäller även då $\text{Im } z = 0$.

I efterhand upptäcker vi också att $f(2) = 0$, så sträckan $[-1, 0]$ avbildas på sträckan $[0, i]$ medan $[0, 2]$ avbildas på $[i, 0]$. ▲

9.13. Exempel (Liksidig triangel med hinder). I Exempel 9.5 avbildade vi övre halvplanet på likbenta trianglar. Vi ska nu lägga till ett inre hinder i en *liksidig* triangel, och behöver därför ytterligare två brytpunkter (fem i stället för tre). Vi sätter $x_1 = -a$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ och $x_5 = a$ för $a > 1$, samt $\lambda_1 = 2/3 = \lambda_5$, $\lambda_2 = 5/6 = \lambda_4$ och $\lambda_3 = -1$. Ansatsen blir

$$w = f(z) = A g(z) + B = A \int_0^z (s+a)^{-2/3}(s+1)^{-5/6}s^1(s-1)^{-5/6}(s-a)^{-2/3}ds + B.$$

Förhållandet mellan hindrets längd och triangelsidans längd beror på $a > 1$, och figuren ovan får man i fallet $a = 2$. (När a ligger tillräckligt nära 1 är denna kvot större än ett och då avgränsar polygontåget inget område över huvud taget, jfr Exempel 9.15 nedan.) Genom att avsluta med lämplig skalning/vridning (A) och translation (B) får vi figuren uppe till höger. ▲

Vi ska nu undersöka hur g ser ut nära en punkt x_k där $\lambda_k = 1$. För enkelhets skull antar vi att denna punkt är 0, så att vi kan skriva $g'(z) = h(z)z^{-1}$ för någon funktion h som är analytisk i 0, och $h(0) \neq 0$; då är $h(z) = h(0) + \mathcal{O}(z)$. I Exempel 9.11 undersökte vi specialfallet $h = 1$, och det allmänna fallet blir likartat:

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_a^z h(s)s^{-1}ds = \int_a^z h(0)s^{-1}ds + \int_a^z (h(s) - h(0))s^{-1}ds \\ &= h(0) \int_a^z s^{-1}ds + \int_0^a \mathcal{O}(1)ds - \int_0^a (h(s) - h(0))s^{-1}ds = h(0) \text{Log } z + \mathcal{O}(z) + C \end{aligned}$$

i närheten av $z = 0$, om $\text{Im } z \geq 0$. I w -planet får vi därför en utskjutande halvremsa med bredd $|h(0)|\pi$, och speciellt ser vi att $g(z) \rightarrow \infty$ då $z \rightarrow 0$, så med kontinuitet sätter vi $g(0) = \infty$.

9.14. Exempel (Avlopp). Ett enkelt avlopp (eller en enkel flodmynning) enligt figuren nedan kan vi åstadkomma med en Schwarz-Christoffelavbildning.

Vi sätter $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ och $x_3 = 1$ samt $\lambda_1 = -1/2$, $\lambda_2 = 1$ och $\lambda_3 = -1/2$; vi får då en utskjutande halvremsa eftersom $\lambda_2 = 1$. Ansatsen blir

$$w = f(z) = A g(z) + B = A \int_1^z (s+1)^{1/2}s^{-1}(s-1)^{1/2}ds + B$$

(p.g.a. s^{-1} får undre gränsen inte vara 0 här). Om $z = x > 1$ får vi med envariabelmetoder att

$$g(x) = \int_1^x \frac{\sqrt{t^2-1}}{t} dt = \sqrt{x^2-1} + \text{Arcsin} \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}, \quad x > 1.$$

Funktionen

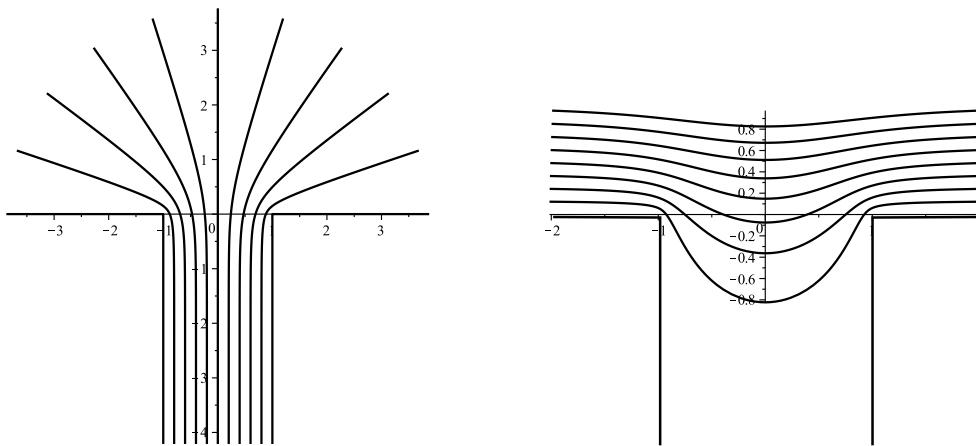
$$z \mapsto \sqrt{z+1} \cdot \sqrt{z-1} + \operatorname{Arccsin} \frac{1}{z} - \frac{\pi}{2}$$

är analytisk i $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Vår funktion g är analytisk i $\mathbb{C}$ förutom längs de tre nedåtriktade strålarna som utgår från -1 , 0 och 1 , och sammanfaller med ovanstående funktion då $z = x > 1$. Entydighetssatsen ger därför att $f(z) = A'(\sqrt{z+1} \cdot \sqrt{z-1} + \operatorname{Arccsin}(1/z)) + B'$ bl.a. i övre halvplanet, med kontinuerlig fortsättning till realaxeln. Villkoren $f(\pm 1) = \pm 1$ ger slutligen att

$$f(z) = \frac{2}{\pi} \left(\sqrt{z+1} \cdot \sqrt{z-1} + \operatorname{Arccsin} \frac{1}{z} \right), \quad \operatorname{Im} z > 0,$$

med kontinuerlig fortsättning till realaxeln.

I figurerna nedan visas strömlinjer för strömning *ur* avloppet (till vänster) respektive *förbi* avloppet (till höger); dessa är kurvorna $r \mapsto f(re^{i\theta})$, $r > 0$, för några ekvidistanta $\theta \in]0, \pi[$ respektive $x \mapsto f(x + ib)$, $x \in \mathbb{R}$, för några ekvidistanta $b > 0$.



▲

9.15. Exempel (Bildens beroende av brytpunkterna). Vi avslutar med ett exempel som i någon mån belyser vad som kan hända när man varierar lägena på brytpunkterna $x_1, \dots, x_n$.

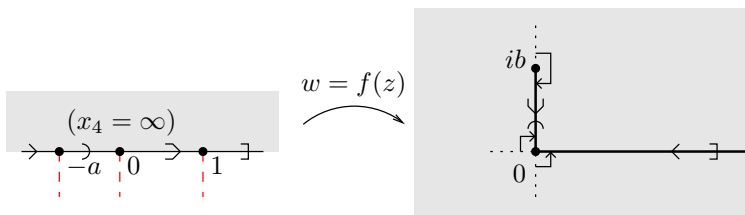
Vi vill avbilda $\mathbb{H}$ konformt på området utanför en kofot med oändligt långt skaft. Vi sätter $x_1 = -a$, $x_2 = 0$ och $x_3 = 1$ för något $a > 0$, och vi vill avbilda dem på $w_1 = 0$, $w_2 = ib$ och $w_3 = 0$ för något $b > 0$. Ansatsen blir

$$f(z) = Ag(z) + B = A \int_0^z (s+a)^{1/2} s^1 (s-1)^{-1/2} ds + B,$$

och på detta vis blir $f(\partial\mathbb{H})$ ett polygontåg i $\hat{\mathbb{C}}$ med rätt vridningsvinklar. Vi måste dock bestämma $a > 0$ så att $|w_2 - w_1| = |w_3 - w_2|$, d.v.s. så att $|f(0) - f(-a)| = |f(1) - f(0)|$, för att få den önskade bilden; detta är ekvivalent med att $|g(-a)| = |g(1)|$. Vanliga parametriseringar ger att

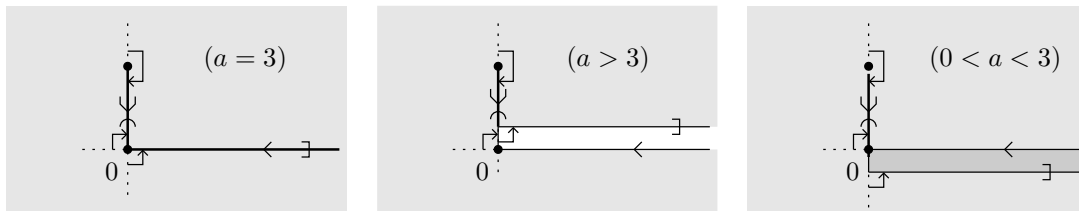
$$\varphi(a) := |g(-a)| = \int_0^a t \sqrt{\frac{a-t}{1+t}} dt \quad \text{och} \quad \psi(a) := |g(1)| = \int_0^1 t \sqrt{\frac{a+t}{1-t}} dt.$$

Man kan visa att $a = 3$ är enda lösningen till ekvationen $\varphi(a) = \psi(a)$, och då blir $b = 3\sqrt{3}/2$. I detta fall blir alltså bilden den önskade, och den upprepas nere till vänster.



Om $a > 3$ är $\varphi(a) > \psi(a)$, och vi får en kofot med positiv bredd på skaftet, vilket betyder att punkterna $w = u + iv$ med $u > 0$ och $0 < v < \varphi(a) - \psi(a)$ inte ingår i bilden av $\overline{\mathbb{H}}$, se figuren nere i mitten; exempelvis är $\varphi(4) = 7/2 + (5/4) \arctan 2 > 7/2 + (5/4) \arctan 2 - 5\pi/8 = \psi(4)$.

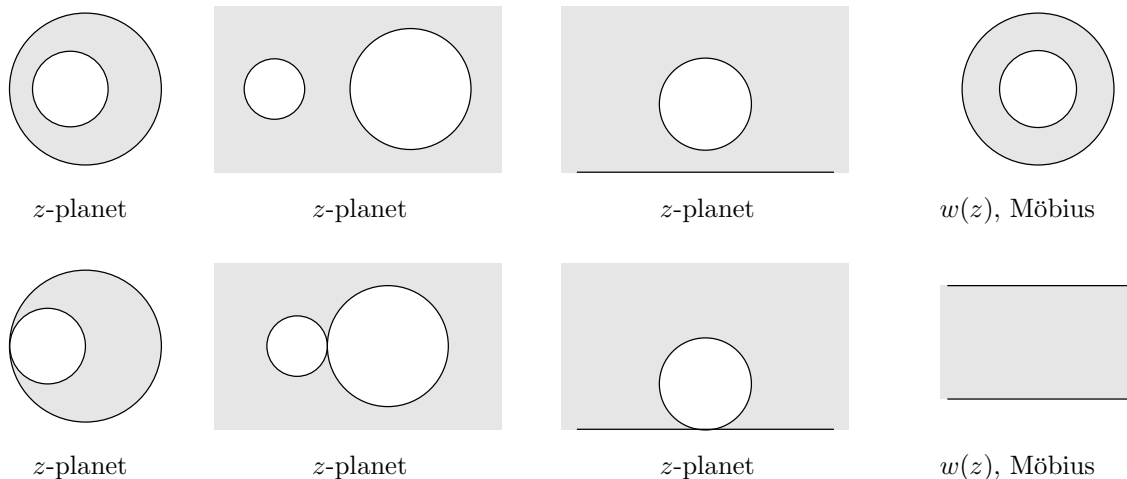
Om däremot $0 < a < 3$ är $\varphi(a) < \psi(a)$, vilket snarast motsvarar en kofot med *negativ* bredd på skaftet, alltså ett överlapp: varje punkt $w = u + iv$ med $u > 0$ och $\varphi(a) - \psi(a) < v < 0$ antas *två* gånger, se figuren nere till höger; exempelvis är $\varphi(1) = 1 - \pi/4 < 1 + \pi/4 = \psi(1)$. I detta fall avgränsar $f(\partial\mathbb{H})$ inte något område i $\hat{\mathbb{C}}$.



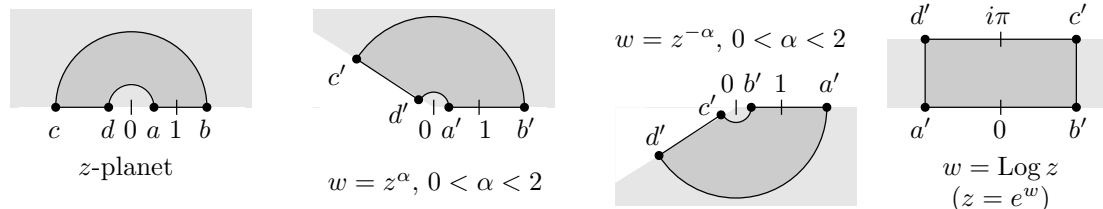
▲

9.4 Diverse konforma avbildningar

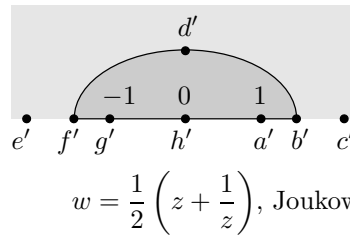
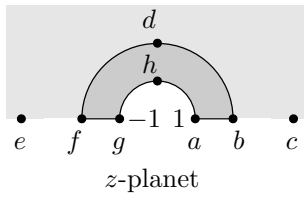
Möbiusavbildningar. Med metoder från Kapitel 7 kan vi avbilda områden mellan två disjunkta $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkclar på en cirkelring, jfr Exempel 7.33 på s. 166. Det är också möjligt att avbilda områden mellan två tangerande $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkclar på en remsa, jfr Övning 7.14 på s. 167.



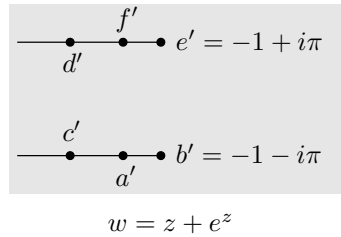
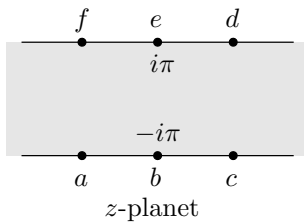
Potens och logaritm. Här illustreras hur principalgrenarna till potens- och logaritmfunktionerna avbildar områden i övre halvplanet.



Joukowskiavbildningen. En avbildning som är av intresse i strömningsmekanik är Joukowskiavbildningen:



Här följer en (namnlös) avbildning som tar en remsa på området utanför två parallella strålar:

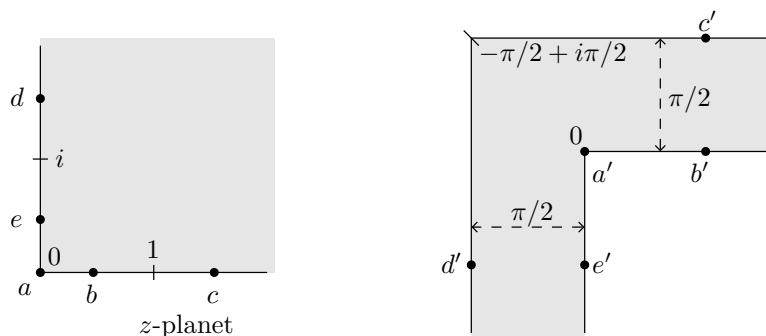


Schwarz-Christoffel-liknande avbildningar. Tidigare har vi avbildat övre halvplanet på

- likbenta trianglar (Exempel 9.5)
- rektanglar (Exempel 9.6)
- en halvremsa (Exempel 9.9)
- området ovanför ett trappsteg (Exempel 9.10)
- en remsa (Exempel 9.11)
- området utanför en stråle (Exempel 9.11)
- ett trekvartsplan med hinder (Exempel 9.12)
- en liksidig triangel med hinder (Exempel 9.13)
- ett avlopp (Exempel 9.14)
- området utanför en kofot (Exempel 9.15).

På nästa sida följer ytterligare några avbildningar som kan härledas med Schwarz-Christoffels metod.

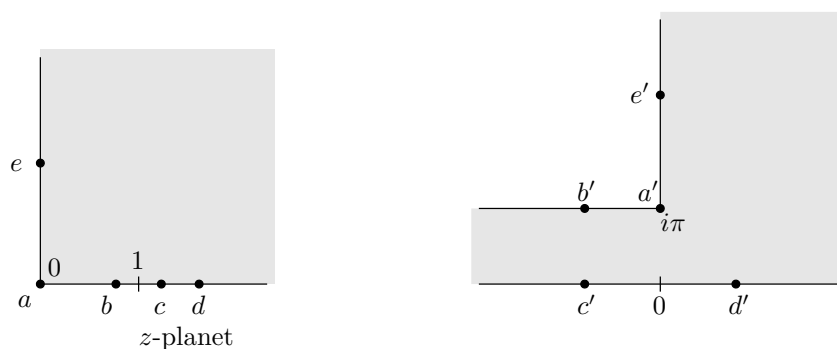
Första kvadranten (eller övre halvplanet, om vi börjar med en kvadratrots däriifrån) kan avbildas på en rätvinklig krök, med samma bredd före och efter kröken, på följande eleganta sätt:



$$w = \operatorname{Artanh} z - \operatorname{Arctan} z$$

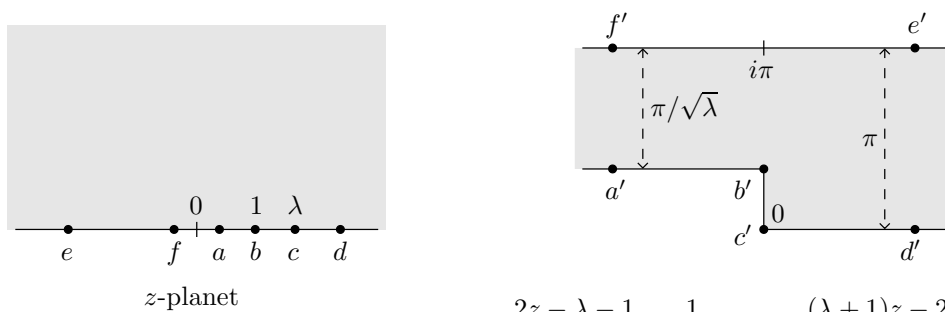
Man kan också få olika bredd på armarna, med $w = \operatorname{Artanh} z - (1/k) \operatorname{Arctan} kz$ för $k > 0$.

Första kvadranten (eller övre halvplanet, om vi börjar med en kvadratrots däriifrån) kan avbildas på området nere till höger så här:



$$w = 2z + \operatorname{Log} \frac{z-1}{z+1}$$

Avslutningsvis kan övre halvplanet avbildas på en plötsligt breddad remsa så här:



$$w = \operatorname{Arcosh} \frac{2z - \lambda - 1}{\lambda - 1} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{Arcosh} \frac{(\lambda + 1)z - 2\lambda}{(\lambda - 1)z}$$

Svar till övningar

- 1.1** (a) $10i$ (b) $-7 + 24i$ (c) $-2/5$
- 1.2** (a) $z = 1 + 2i$ (b) $z = x + i, x \in \mathbb{R}$ (c) Saknar lösning
- 1.3** $w_{1,2} = \pm(2 - i)$
- 1.4** (a) Belopp 2, argument $-\pi/3 + 2\pi n$ (b) Belopp $\sqrt{5}$, argument $\pi - \arctan 2 + 2\pi n$
(c) Belopp $\sqrt{2}/32$, argument $\pi/4 + 2\pi n$ (d) Belopp 1, argument $7\pi/6 + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$)
- 1.7** $z_n = 2e^{\pi i/10 + 2n\pi i/5}$, $n = -2, -1, 0, 1, 2$ (z_1 är alltså $2i$)
- 1.8** $p(z) = (z + 1 - i)(z + 1 + i)(z - 1 - i)(z - 1 + i) = (z^2 + 2z + 2)(z^2 - 2z + 2)$
- 1.9** (a) $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -1 - i$ (b) $z_{1,2} = 2$, $z_{3,4} = -1 + i\sqrt{3}$, $z_{5,6} = -1 - i\sqrt{3}$
(c) $z_n = e^{2\pi i n/5}$, $n = 1, 2, 3, 4$ (d) $z_{1,2} = \pm i$, $z_{3,4} = (-1 \pm \sqrt{5})i/2$
- 1.10** (a) Cirkelringen med centrum $1 - i$, innerradie 1, ytterradie 4; yttercirkeln men inte innercirkeln tillhör mängden (b) Linjen $y = -3$ (c) Linjen $x + y = 0$ (d) Området på och utanför cirkeln med centrum $-(4 + i)/3$ och radie $2\sqrt{2}/3$ (e) Cirkeln med centrum $1/4$ och radie $1/4$, origo undantaget (f) Ellipsen $(x/3)^2 + (y/5)^2 = 1$ (brännpunkter $\pm 4i$)
- 1.11** (c) $4 \arctan 2 = \pi + \arctan(24/7)$
- 1.13** Likheter råder precis då (a) z är reellt (b) z är imaginärt
(c) vänstra olikheten: z är reellt eller imaginärt; högra: $z = 0$
- 1.15** $C_{\min} = \sqrt{2}$
- 1.16** $\pi/2$ på övre halvan ($\operatorname{Im} z > 0$) och $-\pi/2$ på undre halvan ($\operatorname{Im} z < 0$)
- 1.17** Absolutbelopp $2 \cos(\theta/2)$, principalargument $\theta/2$
- 1.19** $\operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_3$ -koordinaten för $(x_1, y_1, 0) \times (x_2, y_2, 0)$
- 1.20** (a) -2 (b) 0 (c) Existerar ej
- 1.21** $D_f = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$. $f(i) = 3i/2$, men $f(-i)$ kan inte definieras så att f blir kontinuerlig i $-i$
- 1.23** (a) $u(x, y) = (\ln(x^2 + y^2))/2$ och $v(x, y) = \arctan(y/x)$ då $x > 0$.
 $u'_x = x/(x^2 + y^2)$, $u'_y = y/(x^2 + y^2)$, $v'_x = -y/(x^2 + y^2)$, $v'_y = x/(x^2 + y^2)$
(b) (Hur kan man uttrycka f' m.h.a. de partiella derivatorna när f' existerar?)
- 1.26** (d) u och v är C^1 och uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer, och $f' = 1/(re^{i\theta}) = 1/z$

- 1.28** (a) f är deriverbar på linjen $y = x$ (b) f är inte analytisk någonstans
- 1.29** $f(z) = z^3 - iz^2 + iA$, där A är en reell konstant
- 1.30** $f(z) = Az + C$, där $A \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{C}$
- 1.31** (a) $-iz - z^2 + A + i$ (b) Saknas (c) $Az - iz^3 + C$ (d) $ze^z + iA$ ($A \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{C}$)
- 1.32** $a = -1$, och då blir $f(z) = -iz^2 + 2iz - 1 - i$
- 1.33** $f(z) = (1 - 2i)(z^3 - 3iz^2)/5$
- 1.36** u och v konstanta
- 2.1** Parabeln $u = (v/2b)^2 - b^2$, $v \in \mathbb{R}$, om $b \neq 0$; strålen $u \geq 0$, $v = 0$ om $b = 0$
- 2.2** (a) $\log(-1) = \pi i + 2n\pi i$, $\text{Log}(-1) = \pi i$
 (b) $\log 2i = \ln 2 + \pi i/2 + 2n\pi i$, $\text{Log} 2i = \ln 2 + \pi i/2$
 (c) $\log(-1 + i) = (\ln 2)/2 + 3\pi i/4 + 2n\pi i$, $\text{Log}(-1 + i) = (\ln 2)/2 + 3\pi i/4$
 (d) $\log(-\sqrt{3} - i) = \ln 2 + 7\pi i/6 + 2n\pi i$, $\text{Log}(-\sqrt{3} - i) = \ln 2 - 5\pi i/6$ ($n \in \mathbb{Z}$)
- 2.3** (a) Sann (b) Falsk; $-2\pi i$ (c) Falsk; $-2\pi i$ (d) Falsk; $4\pi i$
- 2.4** $f(-1 - i) = \frac{\ln 2}{2} + i\frac{5\pi}{4}$, $g(-1 - i) = \frac{\ln 2}{2} - i\frac{19\pi}{4}$, $h(-1 - i) = \frac{\ln 2}{2} + i\frac{5\pi}{4}$
- 2.5** $f(1) = -2\pi i$. Gränsvärdena är $3(\ln 2)/2 - i15\pi/4$ respektive $3(\ln 2)/2 - i7\pi/4$
 $(f(z) = \ln |z| + i\theta(z))$, där $-15\pi/4 < \theta(z) < -7\pi/4$
- 2.6** (a) Cirkeln $|w| = e^a$ (b) Strålen $w = re^{ib}$, $r > 0$
 (c) Övre halvplanet $v > 0$ (d) Första kvadranten $u > 0$, $v > 0$ utanför cirkeln $|w| = 1$
- 2.7** (a) $\pi i + 2n\pi i$ (b) $\pi i + 2n\pi i$ (c) $\pi i + 4n\pi i$ ($n \in \mathbb{Z}$)
 (d) $1 + 4i$ (e) $1 + 4i + 2n\pi i$ (f) $1 + 4i$ (g) $1 + 4i - 2\pi i$
- 2.8** I svaren nedan är, i samtliga deluppgifter, $\theta_1(z)$ och $\theta_2(z)$ kontinuerligt varierande argument för $(z + i)$ respektive $(z - i)$ i aktuellt område.
- (a) $f(z) = \ln |z^2 + 1| + i(\theta_1(z) + \theta_2(z) + 2\pi)$, där $-3\pi/2 < \theta_{1,2} < \pi/2$; $f(1) = \ln 2 + 2\pi i$
 (b) $g(z) = \ln |z^2 + 1| + i(\theta_1(z) + \theta_2(z))$, där $-\pi/2 < \theta_1 < 3\pi/2$, $-3\pi/2 < \theta_2 < \pi/2$; $g(1) = \ln 2$
 (c) $h(z) = \ln |z^2 + 1| + i(\theta_1(z) + \theta_2(z))$, där $\theta_1(-1) = -5\pi/4$ och $\theta_2(-1) = 5\pi/4$; gränsvärdena blir $\ln 2 - 2\pi i$ respektive $\ln 2 + 2\pi i$
- 2.9** $z = \pm(1 + i)\sqrt{\pi/4 + n\pi}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ eller $z = \pm(1 - i)\sqrt{-\pi/4 + n\pi}$, $n = 1, 2, 3, \dots$
- 2.10** Området mellan de två kurvorna $r = \exp(\pm\sqrt{\pi^2 - \theta^2})$, $-\pi < \theta \leq \pi$, där $z = re^{i\theta}$
- 2.11** (a) $(1 \pm i\sqrt{3})/2$ och -1 ; $\text{PV} = (1 + i\sqrt{3})/2$ (b) $e^{2n\pi^2 + i\pi \ln 2}$, $n \in \mathbb{Z}$; $\text{PV} = e^{i\pi \ln 2}$
 (c) $e^{-\pi/2 + 2n\pi}$, $n \in \mathbb{Z}$; $\text{PV} = e^{-\pi/2}$ (d) $-2 + 2i$ (enda värdet, tillika PV)

2.12 $(\sqrt{3} + i)/6$

2.13 (a) $1^z = e^{-2n\pi y + i2n\pi x}$, $n \in \mathbb{Z}$; PV = 1
(b) Alla värden har belopp 1 $\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$; principalvärdet är enda värdet $\Leftrightarrow z \in \mathbb{Z}$

2.14 (a) $e^{2m\pi i/3} + e^{n\pi i/2}$, $m = 0, 1, 2$, $n = 0, 1, 2, 3$, d.v.s. följande tolv olika värden:
 $2, 0, 1 \pm i, (1 \pm i\sqrt{3})/2, (-3 \pm i\sqrt{3})/2, (-1 \pm i(2 \pm \sqrt{3}))/2$ (fyra st.)
(b) $f(e^{i\varphi}) = e^{i\varphi/3} - e^{i\varphi/4}$ för $-\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$; $f(-1) = -(\sqrt{2} - 1)/2 + i(\sqrt{3} - \sqrt{2})/2$

2.16 (e) T.ex. $\alpha = 1/2$, $n = 2$, $z = i \Rightarrow (z^n)^\alpha = (-1)^{1/2} = \pm i$, men $z^{\alpha n} = i^1 = i$
(f) T.ex. $\alpha = 1/2 = \beta$, $z = -1 \Rightarrow z^\alpha z^\beta = (\pm i)(\pm i) = \pm 1$, men $z^{\alpha+\beta} = (-1)^1 = -1$

2.19 (a) $\cosh(z + w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w$
(b) $\sinh(z + w) = \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w$
(c) $\tanh(z + w) = (\tanh z + \tanh w)/(1 + \tanh z \tanh w)$
(d) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

2.20 (a) ie (b) $(\cosh 1)/\sqrt{2} + i(\sinh 1)/\sqrt{2}$ (c) $(15 + 8i)/17$

2.21 (a) $z = 2n\pi \pm i \ln(2 + \sqrt{3})$ (b) $z = \pi/4 + n\pi - i(\ln 2)/2$ ($n \in \mathbb{Z}$)

2.22 $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$, $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$

2.23 (a) Ellipsen $(u/\cosh b)^2 + (v/\sinh b)^2 = 1$ om $b \neq 0$; sträckan $|u| \leq 1$, $v = 0$ om $b = 0$
(b) Hyperbelgrenen $(u/\cos a)^2 - (v/\sin a)^2 = 1$, $u > 0$
(c) Den del av högra halvplanet $u > 0$ som ligger utanför strålen $v = 0$, $u \geq 1$

2.24 (a) $z = \log w$, $w \neq 0$ (b) $z = -i \log(w + (w^2 - 1)^{1/2})$, alla w
(c) $z = -i \log(iw + (1 - w^2)^{1/2})$, alla w (d) $z = \frac{i}{2} \log \frac{1 - iw}{1 + iw}$, $w \neq \pm i$

2.26 $z = \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, eller $z = \pm \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi + i \ln \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$, $n \in \mathbb{Z}$

2.27 $f'(0) = -1/2$

3.1 $2 + i \left(= \int_0^1 (3(t - it^2) + i(t + it^2))(1 + 2it) dt \right)$

3.2 (a) $I = -4$, $J = 4i$ (b) $I = -4$, $J = 2\pi i$ (c) $I = -4$, $J = -6\pi i$

3.3 $F_n(z) = \begin{cases} \frac{z^{n+1}}{n+1}, & n \neq -1, \\ \text{Log } z, & n = -1. \end{cases} \quad I_n = \begin{cases} \frac{i^{n+1} - 1}{n+1}, & n \neq -1, \\ i\pi/2, & n = -1. \end{cases}$

3.4 $(\ln 2)/2 - 5\pi i/4$; nej

3.5 $-2i$; en primitiv är $-(1 + \text{Log } z)/z$

3.6 $2 - i\pi$

$$3.7 \quad \left(1 + \frac{2}{e}\right) - i \left(\frac{\pi + 2}{e} + 2\right)$$

$$3.9 \quad (b) |I(r)| \leq 2\pi r \cdot \frac{\pi + \ln(1/r)}{1 - r^2} \text{ då } 0 < r < 1, \text{ så } I(r) \rightarrow 0 \text{ även då } r \rightarrow 0^+.$$

$$3.10 \quad (a) I_1 = 2\pi i, I_2 = 0 \quad (b) I_1 = 0, I_2 = 0 \quad (c) I_1 = 2\pi i, I_2 = 0$$

$$3.11 \quad (c) 0$$

$$3.12 \quad 2\pi i \cos 2 \text{ respektive } -2\pi i \sin 2$$

$$3.13 \quad 2\pi i \sin 1$$

$$3.14 \quad 6\pi iz \text{ om } z \text{ ligger innanför } C \text{ och } 0 \text{ om } z \text{ ligger utanför } C$$

$$3.15 \quad -4\pi i/3$$

$$3.16 \quad \pi/3 - 4\sqrt{3}$$

$$3.17 \quad -i$$

$$3.18 \quad (a) \left| f\left(\pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \right| = 3 \quad (b) |f(\pm i)| = \frac{1}{2} \quad (c) \left| f\left(\frac{-1 \pm i2\sqrt{2}}{3}\right) \right| = \frac{16\sqrt{3}}{9}$$

$$3.19 \quad \text{Maximum} = 27\sqrt{2}/4, \text{ minimum} = 0 \\ (\text{Observera att } \textit{minimum} \text{ i detta exempel antas i inre punkter, } z = -1/2 \text{ och } z = 1)$$

$$4.1 \quad (a) 32/3 \quad (b) 4 - 2\sqrt{2} \quad (c) \text{Divergent} \quad (d) -57/4$$

$$4.2 \quad \text{Konvergent men ej absolutkonvergent}$$

$$4.3 \quad (a) \text{Ja, konvergent} \quad (b) \text{Ja, divergent} \quad (c) \text{Nej, divergent} \quad (d) \text{Nej, konvergent}$$

$$4.4 \quad (a) \infty \quad (b) 2 \quad (c) 0 \quad (d) \sqrt{3} \quad (e) e^{1/3}$$

$$4.5 \quad \ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \dots; \quad \text{konvergensradie } R = 1$$

$$4.6 \quad (a) \frac{x}{(1-x)^2} \text{ då } |x| < 1, \text{ divergent då } |x| \geq 1$$

$$(b) 2 \quad (c) \text{divergent } (= \infty) \quad (d) 6 \quad (e) 4 \ln \frac{4}{3} \quad (f) 36 \ln \frac{3}{2} - \frac{57}{4}$$

$$4.7 \quad e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$4.8 \quad (a) \text{Abs.konv.} \quad (b) \text{Div.} \quad (c) \text{Div.} \quad (d) \text{Abs.konv.} \quad (e) \text{Konv., ej abs.konv.}$$

$$4.9 \quad (a) 1/5 \quad (b) \sqrt{3} \quad (c) \sqrt{2}$$

$$4.10 \quad (a) \frac{z}{(1-z)^2} \quad (b) \frac{z+z^2}{(1-z)^3} \quad (c) -\text{Log}(1-z)$$

$$4.11 \quad \sum_{n=0}^{\infty} e^{nz} = \frac{1}{1-ez} \text{ där } \operatorname{Re} z < 0, \text{ div. annars; gränsvärdet} = \begin{cases} 0, & \beta/\pi \in \mathbb{Z}, \\ (\cot(\beta/2))/2, & \beta/\pi \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

4.13

$$\begin{aligned} \cosh z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots, & z \in \mathbb{C} \\ \sinh z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots, & z \in \mathbb{C} \\ \cos z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots, & z \in \mathbb{C} \\ \sin z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots, & z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

$$4.14 \quad (a) f(z) = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} + \dots, |z| < \frac{\pi}{2} \quad (b) f(z) = 1 - \frac{z}{2} - \frac{9z^2}{8} + \dots, |z| < 1$$

$$(c) f(z) = -4 + 8z^2 - \frac{50z^4}{3} + \dots, |z| < \ln 2$$

4.15 $20!/10!$

$$4.16 \quad (a) \frac{1}{z} = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n (z-2i)^n = -\frac{i}{2} + \frac{z-2i}{4} + \frac{i(z-2i)^2}{8} + \dots, |z-2i| < 2$$

$$(b) \frac{1}{z^2} = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{i}{2}\right)^n (z-2i)^n = -\frac{1}{4} - \frac{i(z-2i)}{4} + \frac{3(z-2i)^2}{16} + \dots, |z-2i| < 2$$

$$(c) \operatorname{Log} z = \ln 2 + \frac{i\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{(z-2i)^n}{n} = \ln 2 + \frac{i\pi}{2} - \frac{i(z-2i)}{2} + \frac{(z-2i)^2}{8} + \dots, |z-2i| < 2$$

$$4.17 \quad (a) \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1} z^n = \frac{1}{z} - 1 + z - z^2 + \dots \quad (b) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n z^{-n} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5} + \dots$$

$$(c) -\sum_{n=-1}^{\infty} (z+1)^n = -\frac{1}{z+1} - 1 - (z+1) - (z+1)^2 - \dots$$

$$(d) \sum_{n=2}^{\infty} (z+1)^{-n} = \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{(z+1)^3} + \frac{1}{(z+1)^4} + \frac{1}{(z+1)^5} + \dots$$

$$(e) -\sum_{k=0}^{\infty} 4^{k+1} (z+1/2)^{2k} = -4 - 16(z+1/2)^2 - 64(z+1/2)^4 - 256(z+1/2)^6 - \dots$$

$$(f) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(z-2)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{(-3)^{n+1}} = \left(\frac{1}{z-2} - \frac{2}{(z-2)^2} + \dots \right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{z-2}{9} - \dots \right)$$

$$(g) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(-1-i)^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^{n-1}}{(z-i)^n} \quad \text{i ringen } 1 < |z-i| < \sqrt{2}$$

$$4.18 \quad (a) \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}} + \frac{1}{72} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-2(-1)^n}{3^n} z^n \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) z^n$$

$$(c) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{1}{z^{2k}} + \frac{1}{z^{2k+1}} \right) = 1 + \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^2} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^4} + \frac{1}{5!z^5} - \dots$$

4.19 $|f^{(4)}(0)| \leq 6e^2$

4.24 (a) 3 (b) 1 (c) 2 (d) 60

4.25 Ja, eftersom hopningspunkten inte ligger i Ω

4.26 (a) Nej (inte ens en kontinuerlig f) (b) Nej (c) Ja, t.ex. $f(z) = (\sin \pi z)/(\pi z)$

4.27 (a) $f(z) = z^2$ (b) $f(z) = 4z$ (c) Finns ingen (d) $f(z) = (z^2 - iz)/2$

4.30 $f(0) = 1$; $R = 2\pi$

4.31 (b) $a = 1$, $b = 0$, $c = 1/6$, $r = \pi$

4.32 (a) $z = 0$ (dubbelpol), $z = -1$ (hävbar)
 (b) $z = 0$ (väsentlig)
 (c) $z = \pm i$ (enkelpoler)
 (d) $z = 0$ (enkelpol), $z = 2n\pi i$, $n \neq 0$ (dubbelpoler)
 (e) $z = \pi/2 + n\pi$ (enkelpoler) ($n \in \mathbb{Z}$)

4.35 (c) Nej (och därmed inte heller någon analytisk funktion)

5.1 (a) $1/24$ (b) 0 (c) 0 (d) $\cos 1$

5.2 Nej, inte nödvändigtvis: ett motexempel är $f(z) = 1/(z - z_0)^2$

5.3 (a) $\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = (1 - i)/4$, $\operatorname{Res}_{z=-2-i} f(z) = (-1 + i)/4$
 (b) $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 0$, $\operatorname{Res}_{z=\pm i} f(z) = \pm(i \cosh 1)/2$
 (c) $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 1$, $\operatorname{Res}_{z=-1} f(z) = -5/2e$
 (d) $\operatorname{Res}_{z=n\pi i} f(z) = n\pi i/2$ (hävbar singularitet i $z = 0$)
 (e) $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 1/6$ (jfr övning 4.31), $\operatorname{Res}_{z=n\pi} f(z) = (-1)^n/(n\pi)^2$, $n \neq 0$
 (f) $\operatorname{Res}_{z=2n\pi i} f(z) = -1$ ($n \in \mathbb{Z}$)

5.4 (a) $(1 + i)\pi/2$ (c) $i\pi(2 - 5/e)$ (d) 0 (f) $-6\pi i$

5.5 (a) $\pi i \sinh \pi$ (b) $2\pi i$ (c) $-2\pi i/3$

5.6 (a) $c_{-1} = 1$ (b) $c_{-1} = -1$

5.7 (a) $\frac{2\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{8}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $(a - \sqrt{a^2 - 1})\pi$ (e) $\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$

5.8 $\pi i/3$

5.11 (a) $\pi\sqrt{2}$ (b) $\pi/6$ (c) $3\pi/16$

5.12 $\pi\sqrt{2}$

5.13 (a) $I_1 = \frac{3\pi i}{2e}$, $I_2 = \frac{\pi i}{2e}$, $I_3 = \frac{I_1 + I_2}{2} = \frac{\pi i}{e}$, $I_4 = \frac{I_1 - I_2}{2i} = \frac{\pi}{2e}$ (b) $\frac{\pi e^{-|a|/2}}{2}$

5.14 (a) $\frac{\pi \cos 2}{2e^4}$ (b) $\frac{\pi(\cos 1 + \sin 1)}{e}$

5.15 (a) π (b) π då $|\omega| < 1$; $\pi/2$ då $\omega = \pm 1$; 0 då $|\omega| > 1$.

5.16 (a) $\alpha = 2\pi/5$

5.17 (a) $\frac{\pi}{16}$ (b) $\frac{\pi}{2 \cos(\pi a/2)}$ (kan också skrivas, lite mindre elegant, som $\frac{\pi \sin(\pi a/2)}{\sin(\pi a)}$)

5.18 $\pi^4/15$

5.20 $\sqrt{2\pi}/4$ (båda två)

5.21 $\pi^2/4$

5.22 $\pi^2/6$

5.23 (b) Nej, $|I_\epsilon(\pi)|$ behöver inte bli obegränsad när $\epsilon \rightarrow 0^+$ (låt t.ex. $f(z) = 1/z^3$).

6.1 $\Delta_{\Gamma_1} \arg w = -\pi/2$, $\Delta_{\Gamma_2} \arg w = 2\pi$, $\Delta_{\Gamma_3} \arg w = 0$

6.3 1

6.4 2

6.5

	$A < 0$	$A = 0$	$0 < A < 6$	$A = 6$	$A > 6$
I vänstra halvplanet $\operatorname{Re} z < 0$:	3	3	4	2	2
På imaginäraxeln $\operatorname{Re} z = 0$:	0	1	0	2	0
I högra halvplanet $\operatorname{Re} z > 0$:	1	0	0	0	2

6.6 Två nollställen om $-2 < A < 0$, ett om $A \leq -2$ eller $A > 0$, men inget om $A = 0$

6.7 (a) 3 (b) 0 (c) 4 (d) 3 (e) 1

6.8 (a) 1 (b) 2 (c) 2 (d) 2 (e) 2

6.9 $A = \frac{\text{längd}(C)}{2\pi} \cdot \frac{\max_C |fg' - f'g|}{\min_C (|f| - |g|)^2}$ duger; $\varphi(t) - \varphi(s) = \frac{t-s}{2\pi i} \int_C \frac{(f(z)g'(z) - f'(z)g(z)) dz}{(f(z) + tg(z))(f(z) + sg(z))}$.

6.10 (a) $p_0 = y^3$, $p_1 = y^2 + 1$, $p_2 = y$, $p_3 = -1$; Sturmkedja; två nollställen i vänstra halvplanet, inget på imaginäraxeln.

(b) $p_0 = y^5 + 6y$, $p_1 = -3y^2 + 2$, $p_2 = -58y/9$, $p_3 = -2$; Sturmkedja; tre nollställen i vänstra halvplanet, inget på imaginäraxeln.

(c) $p_0 = y^5 - 10y^3 + 25y$, $p_1 = y^4 - 10y^2 + 25$; ej Sturmkedja, ty $p_1(\pm\sqrt{5}) = 0$ (dubbla nollställen); $p(z) = (z^2 + 5)^2(z + 1)$; ett nollställe i vänstra halvplanet, fyra på imaginäraxeln.

(d) $p_0 = y^7 - 3y^5 + 4y^3 - 5y$, $p_1 = 2y^6 - 2y^4 + y^2 - 6$, $p_2 = 2y^5 - 7y^3/2 + 2y$, $p_3 = -3y^4/2 + y^2 + 6$, $p_4 = 13y^3/6 - 10y$, $p_5 = 77y^2/13 - 6$, $p_6 = 601y/77$, $p_7 = 6$; Sturmkedja; fem nollställen i vänstra halvplanet, inget på imaginäraxeln.

- (e) $p_0 = y^4 + y^3 - 2y^2$, $p_1 = y^3 - y^2 - 3y + 1$, $p_2 = -3y^2 - 5y + 2$, $p_3 = -19y/9 + 7/9$, $p_4 = 90/361$; Sturmkedja; två nollställen i vänstra halvplanet, inget på imaginäraxeln.
- (f) $p_0 = y^5 + y^4 + y^3 - 2y^2 - 3y - 2$, $p_1 = 2y^4 + 2y^3 + 5y^2 + y + 2$, $p_2 = 3y^3/2 + 5y^2/2 + 4y + 2$, $p_3 = -(17/9)(y^2 + y + 2)$; Sturmkedja; tre nollställen i vänstra halvplanet, inget på imaginäraxeln.
- (g) $p_0 = y^6 - 3y^3 - y^2 + y + 2$, $p_1 = 2y^5 + 3y^3 - 4y^2 + y - 2$, $p_2 = 3y^4/2 + y^3 + 3y^2/2 - 2y - 2$, $p_3 = -(17/9)(y^3 + y - 2)$; ej Sturmkedja ty $p_3(1) = 0$ (enkelt nollställe); $p(z) = (z - i)q(z)$, där $q(z) = z^5 + (2 + i)z^4 + (-1 + 2i)z^3 + (-5 + 2i)z^2 + (-3 - i)z + (2 - 2i)$, alltså polynomet i (f); tre nollställen i vänstra halvplanet, ett på imaginäraxeln.
- (h) $p_0 = y^8 + 2y^5 + y^3$, $p_1 = y^7 + y^5 + 2y^4 + 3y^2 + 1$, $p_2 = y^6 + 2y^3 + y$, $p_3 = -y^5 - 2y^2 - 1$; ej Sturmkedja, ty p_3 har precis ett reellt nollställe α (enkelt, $-2 < \alpha < -1$, ses med funktionsundersökning); faktorisering ger, m.h.a. p_3 , $p(z) = (z^3 + z^2 - 1)(z^5 - 2iz^2 + i) = (z^3 + z^2 - 1)(z - i\alpha)(z^4 + i\alpha z^3 - \alpha^2 z^2 - i(\alpha^3 + 2)z + (\alpha^4 + 2\alpha))$, och dessa tre faktorer har i tur och ordning 2, 0, 2 nollställen i vänstra halvplanet och 0, 1, 0 på imaginäraxeln, så p har totalt fyra nollställen i vänstra halvplanet och ett på imaginäraxeln.
- 6.11** (a) $p_1 = 8 - 4z + 2z^2 + 4z^3$, $p_2 = 48 - 40z + 32z^2$, $p_3 = 1280 - 640z$, $p_4 = 1228800$; ja.
(Som synes blir koefficienterna snabbt gigantiska, men detta kan undvikas genom att dividera med lämpliga *positiva* faktorer: vi får (nya) $p_2 = S_3(p_1/2) = 12 - 10z + 8z^2$, $p_3 = S_2(p_2/2) = 80 - 40z$, $p_4 = S_1(p_3/40) = 48$.)
- (b) $p_1 = 3 + (2 - 3i)z + (-3 + i)z^2$, $p_2 = -1 + (15 - 2i)z$, $p_3 = -228$; nej.
- 7.1** (a) $C_0 + (C_1 - C_0) \operatorname{Re} w$ (b) $C_0 + (C_1 - C_0)(\operatorname{Arg} w)/\pi$ (c) $C_0 + (C_1 - C_0)(\ln |w|)/(\ln R)$
- 7.3** (a) $z = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$; f fördubblar skärningsvinklar där.
(b) $z_{1,2} = (\pm\sqrt{3} + i)/2$ (fördubblar), $z_3 = -i$ (fördubblar) och $z_4 = 0$ (femfaldigar).
- 7.4** $c = 0$: 1 med $z_0 = b/a$ följd av 2 med $\sigma = a/d$;
 $c \neq 0$: 1 med $z_0 = d/c$ följd av 3 följd av 2 med $\sigma = -(ad - bc)/c^2$ följd av 1 med $z_0 = a/c$.
- 7.5** (a) $w = \frac{z+1}{z-3}$ (b) $w = 1 - z$ (c) $w = \frac{2z}{z-1}$ (d) $w = -\frac{(1+i)z}{z+1}$ (alla entydiga)
- 7.6** (b) Medurs (c) $|w| > 1$
- 7.7** (a) 2 (b) $2i$ (c) $i/2$ (d) $2i$ (e) $18i$ (f) ∞ (g) $(4 + 2i)/5$
- 7.8** (a) $\operatorname{Im} w = 0$ (b) $|w| < 1$ (c) $\operatorname{Re} w = 0$ (d) $|w - 5/3| \geq 4/3$ (e) $|w - (-1 + 2i)| = 2$
- 7.9** (a) finns ingen
(b) t.ex. $w = 2 + 2i \frac{1-z}{1+z}$ ($w = 2 + 2i \frac{\lambda-z}{\lambda+z}$, $|\lambda| = 1$, $\lambda \mapsto 2$, ger alla)
(c) t.ex. $w = \frac{1-z}{2z-8}$ ($w = -\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{z-1}{z-4}$, $|\lambda| = 1$, $3 \mapsto \lambda$, ger alla)
- 7.10** $\left| w + \frac{4}{3}(1+i) \right| > \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{Re} w > \operatorname{Im} w$
- 7.13** (a) $(3 - \sqrt{5})/2$ (entydigt, enligt övning 7.12)

$$\mathbf{7.14} \quad (\text{a}) \ w(z) = \frac{3z-6}{2z} \quad (\text{t.ex.}) \quad (\text{b}) \ h(x, y) = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{2x}{x^2 + y^2} \right) \quad (\text{entydigt})$$

$$\mathbf{7.15} \quad \vartheta(z) = \frac{100}{\ln(7/5)} \ln \left| \frac{z-5}{5z-1} \right| \quad [^\circ\text{C}]$$

$$\mathbf{7.16} \quad (\text{a}) \ \text{t.ex. } w = i \frac{1-z}{1+z} \quad (\text{b}) \ \text{t.ex. } w = \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{1/2} \quad (\text{principalgrenen till } (\cdot)^{1/2})$$

$$\mathbf{7.17} \quad \text{T.ex. } w = \frac{e^{i\pi z} - i}{e^{i\pi z} + i} \quad (\text{enda friheten är multiplikation av högerledet med } \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1)$$

$$\mathbf{7.18} \quad w = \frac{(1+z)^2 + (3-4i)(1-z)^2}{(1+z)^2 + (3+4i)(1-z)^2} \quad (\text{entydigt})$$

$$\mathbf{7.19} \quad \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w \geq 0, w \neq \pm i\}$$

$$\mathbf{7.20} \quad (\text{a}) \ 4 \sinh 2 \quad (\text{b}) \ 2 \min(C, \pi) \sinh 2$$

$$\mathbf{7.21} \quad (\text{Gränsvärdet från högra}) - (\text{gränsvärdet från vänstra}) = -\pi$$

Sakregister

- algebrans fundamentalsats, **82**
- analytisk fortsättning, 79
- analytisk funktion, **13**, 59
 - hel, *se* hel funktion
- andragradsekvation, 1
- arcusfunktioner, **169**
- argument, 4
 - principal-, **4**
 - principen, **137**, 182
 - tillskott, **135**
- begränsad mängd, 6
- Bernoullitalen, 131
- binomisk ekvation, 4, 27
- bågelement, *se* $|dz|$
- båglängdsintegral, 7, **40**
- bågvis sammanhängande mängd, **7**
- Cauchy-Goursats sats, **51**
- Cauchy-Riemanns ekvationer, **10**
 - geometrisk tolkning, 14
 - i polär form, *12*
- Cauchyindex, **145**
- Cauchys
 - integralformel, **47**, 71
 - för derivata, **48**, 71
 - integralsats, **46**
 - olikheter, **82**
- $\hat{\mathbb{C}}$ -cirkel, **158**
- cirkelskiva, 6
 - punkterad, **6**
 - sluten, 6
 - öppen, *se* cirkelskiva
- cirkeltåg, *se* kedja av cirkelskivor
- $\mathcal{C}^k$, 9
- $D(c, r)$, *se* cirkelskiva
- derivata, 9
- de Moivres formel, 3
- differentierbar funktion, 10
- divergenstestet, 59
- enkelt sammanhängande, *se* område
- entydighetssatsen, 13, **85**
- Euklides algoritm, 146
- Eulers
 - formler, 3
 - identitet, 3
- exponentialfunktionen, 11, **19**
- fjärdegradsekvation, 4
- flertydiga beteckningar, 31
- flervärd funktion, **20**, 26
 - gren till, *se* gren
- Fourierintegral, *se* integral
- Fourierserie, *se* serie
- Fouriertransform, 113
- funktionaldeterminant, *17*
- funktionalmatris, 10, *17*
- funktionselement, 90
- Γ -funktionen, 125
- Goursats sats, *se* Cauchy-Goursats sats
- Greens formel, 46
- gren, **21**, 32
 - till sammansatt funktion, 169
- gränsvärde, 8
- harmonisk funktion, **15**, 153
- hel (analytisk) funktion, **13**
- hopningspunkt, **6**, 85
- hyperboliska funktioner, **33**
- indragen kontur, *se* kontur
- induktion, 2
- inre punkt, 6
- integral
 - av rationell funktion, 106
 - av trigonometrisk funktion, 104
 - Fourier-, 42, **109**
- inversa funktionssatsen, *17*
- isolerad punkt, **6**, 85
- Jordans lemma, **111**, 123
- kedja av cirkelskivor, **7**, 56, 85
- kompakt mängd, 6
- konform avbildning, *17*, *18*, **154**, 182
- kontinuitet, 8
- kontur, **7**
 - indragen, 114
 - nyckelhåls-, 117

- tårtbits-, 108
- konvergens
 - radie, 63
 - ring, 67
 - skiva, 63
 - likformig, 93
- kurva, 6
 - deformation av, 54
 - enkel, 7
 - längd av, 7
 - sluten, 7
 - styckvis C^1 , 7
 - tangent till, 7
- kurvintegral, **40**
- kvotkriteriet, 62
- Laurentserie, 70, **74**
- Liouvilles sats, **82**
- logaritm, **20**
 - existens av lokal, **53**
 - principal-, **20**, 54
 - tillskott, 136
- lokal injektivitet, 92
- Maclaurinserie, 69, **70**
 - konvergensradie, 71, 89
 - standardserier, 72, 95
- Maclaurinutveckling med restterm
 - i integralform, 73
 - i ordoform, 79
- maximumprincipen, **56**, 86
 - i begränsade områden, **57**
- medelvärdesegenskapen, **56**
- medelvärdessatsen, 69
- meromorf funktion, 89
- ML-uppskattning, **42**
- Moreras sats, 31, **52**
- multiplpunkt, 91
- multiplicitet, **84**
- Möbiusavbildning, **156**
 - med reella koefficienter, 161
- nollställe, **84**
 - isolerat, 85
 - multiplicitet av, **84**
- nyckelhålskontur, *se* kontur
- Ω , **7**
- ω , **46**
- omgivning, **6**
- område, **7**
 - enkelt sammanhängande, 15, 43, **53**
 - konvext, **53**
 - stjärnformigt, **53**
- $O(z^n)$, **79**
- parallelogramlagen, 5
- partialbråksuppdelning, 88
- partiell integration, 43
- partiell summation, 70
- Picards sats, 89
- pol, **87**
 - beräkning av residy i, 100
 - ordning av, **87**
- polygontåg, **7**, 13, 180
- polär form, 3
- positiv orientering, 46
- potensfunktion, **25**
- potensserie, **62**
 - dubbelsidig, **67**
 - koefficienter, 62
 - entydighet hos, 68
 - konvergens på randen, 64, **94**
 - konvergensradie, 63
 - likformig konvergens, 93
 - multiplikation, 77
 - termvis derivering, 65, 67
 - termvis integrering, 65
- primitiv funktion, **42**
 - existens av global, **55**
 - existens av lokal, **52**
- printal, 127
- principalargument, *se* argument
- principalgren, 21, 28
- principalkvadratrot, 169
- principallogaritm, *se* logaritm
- principalvärde
 - i Maple, 178
 - på integral, 106
 - på logaritm, 20
 - på potens, 26
 - på serie, 119
- randpunkt, 6
- regularitet, 13, **52**
- rektangulär form, 1
- residy, **99**
 - beräkning, 100
 - satsen, **99**
- Riemannhypotesen, 134
- Riemanns avbildningssats, 155
- Riemannsfären, **155**, 182
- Riemannyta, 29
- rotkriteriet, 62
- Rouchés sats, **142**
- Routh-Hurwitz kriterium, **147**
- Schur-Cohns kriterium, **151**

- Schurtransform, 150
- Schwarz-Christoffelavbildning, **179**
 - från cirkelskiva, 183
 - lista med exempel, 191
- serie, **59**
 - absolutkonvergent, 60
 - divergent, 59
 - dubbelsidig, 61
 - Fourier-, 123
 - geometrisk, 59, 66, 76
 - jämförelse med, 62
 - konvergent, 59
 - potens-, *se* potensserie
- singularitet, 47, **86**
 - isolerad, **86**, 99
 - hävbar, **87**
 - karakterisering med belopp, 88
 - pol, *se* pol
 - väsentlig, **87**
- skiva, *se* cirkelskiva
- sluten mängd, 6
- slutna höljet, **6**, 46
- spiegelpunkt, **162**
- stereografisk projektion, 156
- Sturmkedja, **145**
- submedelvärdesegenskapen, **56**

- Taylorserie, 59, 70, **78**
- topologiska begrepp, 6
- tredjegradslikvation, 4
- triangelolikheterna, **2**
- trigonometriska
 - funktioner, **33**
 - integraler över hel period, **104**
- tårtritskontur, *se* kontur

- variabelbyte
 - vid primitivbestämning, 43
 - vid residyberäkning, 103
 - vid serieutveckling, 78

- ζ -funktionen, 125

- öppen mängd, 6
- öppna avbildningssatsen, **93**