Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA45
Modul: TEN1

# Tentamen i Komplex analys

**2025-01-18 kl 14.00–19.00**

Inga hjälpmedel. Fullständiga lösningar krävs, om inget annat sägs i uppgifterna.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 3 uppgifter, numrerade 1–3, värda 3 poäng var.
- **Del B** består av 3 uppgifter, numrerade 4–6, värda 3 poäng var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2 poäng.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1 och K2, där

K1: 1 poäng på uppgift $n$ eller – men inte för överbetyg – UPG$n$ godkänd ($n = 1, 2, 3$).

K2: 3/4/5 godkända uppgifter och 8/11/14 poäng totalt, där 1/2 bonuspoäng upp till 8 poäng för betyg 3 erhålls vid behov om 2/3 UPG-omgångar är godkända.

**Notera:** Rättningen kan komma att avbrytas ifall det står klart att kraven för godkänt betyg inte längre kan uppfyllas.

Svar finns preliminärt kl 21.00 på kursens hemsida.

---

## Del A

1. (a) Bestäm alla hela analytiska funktioner $f = u + iv$ sådana att
$$u = \operatorname{Re} f = x^2 y + e^x \cos y.$$
   (b) Lös ekvationen
$$\sinh z = -\frac{3}{4}.$$
   Svaret ska ges i rektangulär form $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.

   (c) Låt $\Omega$ vara $\mathbb{C}$ med positiva imaginäraxeln borttagen och låt $g(z)$ vara den gren till $\log z$ i $\Omega$ som uppfyller $g(1) = 0$. Bestäm $g(-2)$ och $g'(-2)$ i rektangulär form.

2. Låt
$$f(z) = \frac{z+3}{z^2 - z - 2}.$$
   (a) Bestäm Maclaurinserien för $f$, och ange seriens konvergensradie $R$. (1p)

   (b) Bestäm Laurentserien för $f$ i cirkelringen $1 < |z-1| < 2$. (2p)

3. Bestäm antalet nollställen som polynomet
$$p(z) = z^4 + 5iz^2 + 25z - 16$$
   har i följande områden: (a) $\operatorname{Re} z < 0$, (b) $|z| < 1$. (2p+1p)

---

**Var god vänd!**

## Del B

4. Beräkna med residykalkyl

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+9)}.$$

5. Låt $\Omega$ vara området mellan cirklarna $|z| = 2$ och $|z-1| = 1$ i $z$-planet.

   (a) Bestäm en Möbiusavbildning som avbildar $\Omega$ på remsan $0 < \operatorname{Im} w < 1$. (1p)

   (b) Bestäm en konform avbildning som avbildar $\Omega$ på cirkelskivan $|w| < 1$. (2p)

6. Beräkna

$$I(a,\omega) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{i\omega t}\, dt, \qquad 0 < a < 1,\ \omega > 0,$$

genom att integrera en lämpligt vald funktion längs randen till en indragen kvarts-cirkelskiva

$$\{z = r\, e^{i\theta} \in \mathbb{C} :\ \epsilon < r < R,\ \alpha < \theta < \alpha + \pi/2\}$$

för en lämpligt vald vinkel $\alpha$. Svaret får innehålla den så kallade gammafunktionen

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \qquad x > 0.$$

---

## TATA45 Komplex analys 2025-01-18, lösningsskisser

1. (a) Eftersom

$$\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = (2y + e^x \cos y) + (-e^x \cos y) = 2y \neq 0$$

utanför linjen $y = 0$ är $u$ inte harmonisk i $\mathbb{R}^2$ och därför finns ingen hel analytisk $f$ sådan att $u = \operatorname{Re} f$. <u>Svar</u>: Ingen sådan $f$ finns.

(b) Sätt $w = e^z$. Då är $w \neq 0$ och

$$-\frac{3}{4} = \sinh z = \frac{w - 1/w}{2} \quad \Leftrightarrow \quad w^2 + \frac{3w}{2} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w = \frac{1}{2} \text{ eller } w = -2,$$

vilket är ekvivalent med att $z = \log(1/2)$ eller $z = \log(-2)$, d.v.s.:
<u>Svar</u>: $z = -\ln 2 + i2n\pi$ eller $z = \ln 2 + i(\pi + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$.

(c) Varje gren till $\log z$ i $\Omega$ kan skrivas $g(z) = \ln|z| + i\,\theta(z)$, där $\theta(z)$ är ett kontinuerligt varierande argument för $z$ i $\Omega$. Kravet $0 = g(1) = \ln|1| + i\,\theta(1)$ ger $\theta(1) = 0$, vilket är ett argument för $z = 1$. Eftersom vi inte kan passera positiva imaginäraxeln (rita figur!) måste vi gå medurs till $z = -2$, och därför är $\theta(-2) = -\pi$. Till sist, $g'(z) = 1/z$, så vi får:
<u>Svar</u>: $g(-2) = \ln 2 - i\pi$ och $g'(-2) = -1/2$.

2. Att $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ när $|q| < 1$ och att $f(z) = \dfrac{z+3}{z^2 - z - 2} = \dfrac{z+3}{(z+1)(z-2)} = \dfrac{-2/3}{z+1} + \dfrac{5/3}{z-2}$ ger oss följande utvecklingar i de två områdena:

(a) $f$ har singulariteter (poler) i $z = -1$ och $z = 2$, så Maclaurinseriens konvergensskiva är $|z| < 1$, d.v.s. dess konvergensradie $R = 1$. Vidare,

$$f(z) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1+z} - \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{1 - z/2} = -\frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n - \frac{5}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$$= \underline{\underline{-\frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n - \frac{5}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}}}, \qquad |z| < 1, \qquad \underline{\underline{R = 1}}.$$

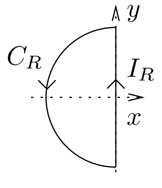
(b)

$$f(z) = \frac{-2/3}{z+1} + \frac{5/3}{z-2} = \Big/ \begin{array}{c} w = z - 1 \\ 1 < |w| < 2 \end{array} \Big/ = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{w+2} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{w-1}$$

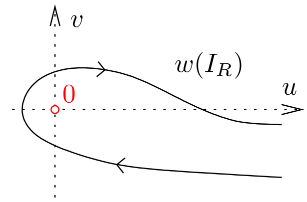
$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + w/2} + \frac{5}{3w} \cdot \frac{1}{1 - 1/w} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{w}{2}\right)^n + \frac{5}{3w} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{w}\right)^n$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^n}{2^n} + \frac{5}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^{n+1}}}}, \qquad 1 < |z - 1| < 2.$$

3. (a) Vi studerar argumenttillskottet för $p(z) = z^4 + 5iz^2 + 25z - 16$ när $z$ genomlöper kurvan $\Gamma_R = C_R + I_R$ (se figur nere till vänster).
På $C_R$ får vi tillskottet $\Delta_{C_R} \arg p(z) = \Delta_{C_R} \arg z^4 + \Delta_{C_R} \arg(1 + 5i/z^2 + 25/z^3 - 16/z^4) \to 4 \cdot \pi + 0 = 4\pi$ då $R \to \infty$.
På $I_R$ får vi $p(z) = p(iy) = (y^4 - 16) + i(25y - 5y^2) = (y^4 - 16) + i\,5y(5 - y) = u + iv$, $y : -R \to R$, och nedanstående teckentabell samt kurva $w = p(z)$ då $z$ genomlöper $I_R$:




| $y$ | $<$ | $-2$ | $<$ | $0$ | $<$ | $2$ | $<$ | $5$ | $<$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $v$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |




Dessutom får vi av gradskäl att $v/u \to 0$ då $y \to \pm\infty$ ($u$ drar mer än $v$), och detta tillsammans med tabellen ovan ger skissen ovan till höger, där vi ser att $\Delta_{I_R} \arg p(z) \to -2\pi$ då $R \to \infty$. Eftersom poler saknas blir antalet nollställen i vänstra halvplanet därför $(1/2\pi) \lim_{R\to\infty} (\Delta_{C_R} \arg p(z) + \Delta_{I_R} \arg p(z)) = (4\pi - 2\pi)/2\pi = 1$, enligt argumentprincipen.
<u>Svar</u>: Ett.

(b) Sätt $f(z) = 25z$ och $g(z) = z^4 + 5iz^2 - 16$. På hela cirkeln $|z| = 1$ är $|f(z)| = |25||z| = 25$ och $|g(z)| \le |z|^4 + |5i||z|^2 + |-16| = 22 < 25$, så $|f(z)| > |g(z)|$ för alla $z$ på denna cirkel. Enligt Rouchés sats har därför $p(z) = f(z) + g(z)$ lika många nollställen i $|z| < 1$ som $f(z)$, d.v.s. ett. Svar: Ett.

4. Eftersom integranden är jämn kan vi skriva den sökta integralen

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+9)} = \frac{J}{2}, \quad \text{där} \quad J = \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+9)}.$$

Sätt $f(z) = 1/\big((z^2+1)^2(z^2+9)\big)$. Låt $L_R$ vara sträckan från $-R$ till $R$ och $C_R^+$ halvcirkeln från $R$ till $-R$ i övre halvplanet och sätt $\Gamma_R = L_R + C_R^+$ (rita figur!). Om $R > 3$ så är $f$ analytisk på och innanför $\Gamma_R$ förutom i dubbelpolen $z = i$ och i enkelpolen $z = 3i$. Enligt residysatsen och sedvanlig residyberäkning är därför

$$\begin{aligned}
\int_{L_R + C_R^+} f(z)\,dz &= 2\pi i \Big(\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=3i} f(z)\Big) = \Big/ f(z) = \frac{(z+i)^{-2}(z^2+9)^{-1}}{(z-i)^2} = \frac{(z^2+1)^{-2}}{z^2+9} \Big/ \\
&= 2\pi i \left( \frac{d}{dz}\big((z+i)^{-2}(z^2+9)^{-1}\big)\Big|_{z=i} + \frac{(z^2+1)^{-2}}{\frac{d}{dz}(z^2+9)}\Big|_{z=3i} \right) \\
&= 2\pi i \left( \big(-2(z+i)^{-3}(z^2+9)^{-1} - (z+i)^{-2}(z^2+9)^{-2}2z\big)\Big|_{z=i} + \frac{(z^2+1)^{-2}}{2z}\Big|_{z=3i} \right) \\
&= 2\pi i \left( \frac{2}{64i} - \frac{1}{2\cdot 64i} + \frac{1}{6\cdot 64i} \right) = \frac{5\pi}{96}, \qquad R > 3. \qquad (*)
\end{aligned}$$

Vidare,

$$\int_{L_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^R f(t)\,dt \to J, \qquad R \to \infty,$$

och en ML-uppskattning ger, eftersom $|z^2+1| \ge |z|^2 - |1| = R^2 - 1 > 0$ och $|z^2+9| \ge R^2 - 9 > 0$ på $C_R^+$ om $R > 3$, att

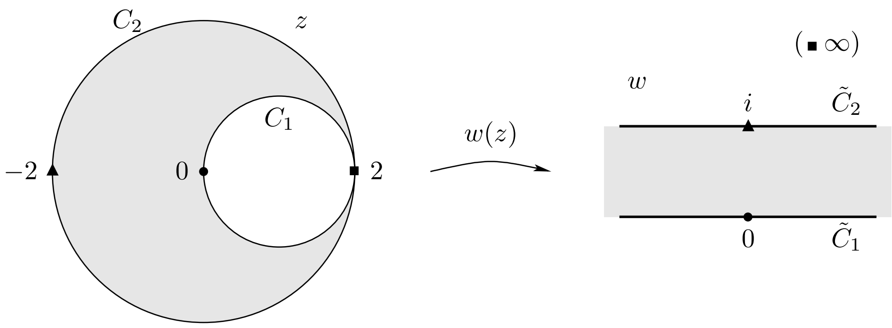
$$\left| \int_{C_R^+} f(z)\,dz \right| \le \frac{1}{(R^2-1)^2(R^2-9)} \cdot \pi R \to 0, \qquad R \to \infty,$$

av gradskäl, så $\int_{C_R^+} f(z)\,dz \to 0$ då $R \to \infty$.

Låt nu $R \to \infty$ i $(*)$. Då får vi att $J + 0 = 5\pi/96$, så $I = J/2 = 5\pi/192$.

Svar: $\dfrac{5\pi}{192}$.

5. (a)




Rand avbildas på rand under Möbius, så vi ska avbilda $C_1 : |z-1| = 1$ och $C_2 : |z| = 2$ på linjerna $\tilde{C}_1 : \operatorname{Im} w = 0$ respektive $\tilde{C}_2 : \operatorname{Im} w = 1$ (omvänt skulle också ha gått bra). $C_1$ och $C_2$ har precis en gemensam punkt, $z = 2$, som därför måste avbildas på den gemensamma punkten för $\tilde{C}_1$ och $\tilde{C}_2$, alltså $w = \infty$.

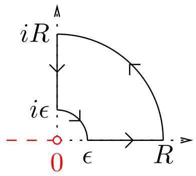
Med $w(2) = \infty$ kommer $\tilde{C}_1$ och $\tilde{C}_2$ bli två parallella linjer. Om vi dessutom väljer $w(0) = 0$ och $w(-2) = i$, så att $(2, 0, -2) \mapsto (\infty, 0, i)$, får vi med standardmetoder $w(z) = 2iz/(z-2)$, och nu vet vi att $\tilde{C}_1$ och $\tilde{C}_2$ är två parallella linjer för vilka $0 \in \tilde{C}_1$ och $i \in \tilde{C}_2$, men vi måste också motivera att linjerna är vågräta. Det kan vi t.ex. göra genom att avbilda tredje punkter på $C_1$ och $C_2$: t.ex. $1 + i \in C_1 \Rightarrow w(1+i) = 2 \in \tilde{C}_1$ och $2i \in C_2 \Rightarrow w(2i) = 1 + i \in \tilde{C}_2$. Eftersom slutligen t.ex. $w(-1) = 2i/3$ (inre punkt på inre punkt) ser vi att avbildningen avbildar rätt.

Svar: T.ex. $w(z) = \dfrac{2iz}{z-2}$.

(b) Låt $\zeta(z) = 2iz/(z-2)$ vara avbildningen i (a). Remsan $0 < \operatorname{Im}\zeta < 1$ kan avbildas konformt på övre halvplanet $\operatorname{Im} s > 0$ med $s(\zeta) = e^{\pi\zeta}$. Sedan kan övre halvplanet $\operatorname{Im} s > 0$ avbildas på $|w| < 1$ med en Möbiusavbildning som bestäms av att t.ex. $(i, -i, \infty) \mapsto (0, \infty, 1)$, eftersom $s = i$ (inre punkt) och $s = -i$ är spegelpunkter m.a.p. linjen $\operatorname{Im} s = 0$ och $w = 0$ (inre punkt) och $w = \infty$ är spegelpunkter m.a.p. cirkeln $|w| = 1$, och $s = \infty$ och $w = 1$ är punkter på linjen $\operatorname{Im} s = 0$ respektive cirkeln $|w| = 1$; med standardmetoder får man $w(s) = (s-i)/(s+i)$, och sammansättningen $w(s(\zeta(z)))$ avbildar $\Omega$ konformt på $|w| < 1$.

Svar: T.ex. $w(z) = \dfrac{e^{\pi\zeta(z)} - i}{e^{\pi\zeta(z)} + i}$, där $\zeta(z) = \dfrac{2iz}{z-2}$.

6. Sätt $f(z) = \widetilde{z^{a-1}} \cdot e^{i\omega z} = \exp\big((a-1)L(z)\big) \cdot e^{i\omega z}$, där $L(z)$ är en gren till $\log z$. Med tanke på vilken integral vi vill räkna ut måste den ena av de två sträckorna i randen till den indragna kvartscirkelskivan ligga på positiva realaxeln. Eftersom $|e^{i\omega z}| = e^{-\omega y} \le 1$ då $y \ge 0$ och $\omega > 0$ väljer vi $\alpha = 0$ och studerar därför konturen $L_{\epsilon,R} + C_R + I_{\epsilon,R} + C_\epsilon$ till höger, och väljer grenen $L(z) = \operatorname{Log} z$ (principalgrenen), som är analytisk på och innanför konturen.




Vi får då, med parametriseringen $z = t$, $t : \epsilon \to R$, på den vågräta sträckan $L_{\epsilon,R}$

$$\int_{L_{\epsilon,R}} f(z)\,dz = \int_\epsilon^R t^{a-1} e^{i\omega t} dt$$

och med $z = it$, $t : R \to \epsilon$, på den lodräta sträckan $I_{\epsilon,R}$

$$\int_{I_{\epsilon,R}} f(z)\,dz = \int_R^\epsilon t^{a-1} e^{i(a-1)\pi/2} e^{-\omega t}\, i\,dt = -e^{ia\pi/2} \int_\epsilon^R t^{a-1} e^{-\omega t} dt = /u = \omega t,\ \omega > 0/$$
$$= -e^{ia\pi/2} \int_{\omega\epsilon}^{\omega R} \Big(\frac{u}{\omega}\Big)^{a-1} e^{-u} \frac{du}{\omega} = -\frac{e^{ia\pi/2}}{\omega^a} \int_{\omega\epsilon}^{\omega R} u^{a-1} e^{-u} du \to -\frac{e^{ia\pi/2}}{\omega^a} \Gamma(a)$$

då $\epsilon \to 0^+$ och $R \to \infty$, om $a > 0$.

På den lilla kvartscirkeln $C_\epsilon$ är $|f(z)| = |z|^{a-1} e^{-\omega y} \le \epsilon^{a-1} \cdot 1$, så ML-uppskattning ger

$$\left| \int_{C_\epsilon} f(z)\,dz \right| \le \epsilon^{a-1} \cdot \pi\epsilon/2 = \pi\epsilon^a/2 \to 0$$

då $\epsilon \to 0^+$, om $a > 0$, så $\int_{C_\epsilon} f(z)\,dz \to 0$ då.

På den stora kvartscirkeln $C_R$ är $|f(z)| = R^{a-1}|e^{i\omega z}|$, så med Jordans lemma får vi, eftersom $\omega > 0$ och kvartscirkeln $C_R$ är en del av halvcirkeln $C_R^+$ från $z = R$ till $z = -R$ i övre halvplanet,

$$\left| \int_{C_R} f(z)\,dz \right| \le R^{a-1} \int_{C_R} |e^{i\omega z}||dz| \le R^{a-1} \int_{C_R^+} |e^{i\omega z}||dz| \le R^{a-1} \cdot \frac{\pi}{\omega} \to 0$$

då $R \to \infty$, om $a < 1$, så $\int_{C_R} f(z)\,dz \to 0$ då.

Slutligen, eftersom $f$ är analytisk på och innanför konturen $L_{\epsilon,R} + C_R + I_{\epsilon,R} + C_\epsilon$ är

$$\int_{L_{\epsilon,R}} f(z)\,dz = -\int_{C_R} f(z)\,dz - \int_{I_{\epsilon,R}} f(z)\,dz - \int_{C_\epsilon} f(z)\,dz, \qquad 0 < \epsilon < R,$$

så

$$\int_\epsilon^R t^{a-1} e^{i\omega t} dt \to 0 + \frac{e^{ia\pi/2}}{\omega^a}\Gamma(a) + 0 = \frac{e^{ia\pi/2}}{\omega^a}\Gamma(a)$$

då $\epsilon \to 0^+$ och $R \to \infty$, om $0 < a < 1$ och $\omega > 0$.

Svar: $\dfrac{e^{ia\pi/2}}{\omega^a}\Gamma(a)$