

Tentamen i Komplex analys

2026-01-12 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Fullständiga lösningar krävs, om inget annat sägs i uppgifterna.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 3 uppgifter, numrerade 1–3, värda 3 poäng var.
- **Del B** består av 3 uppgifter, numrerade 4–6, värda 3 poäng var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2 poäng.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1 och K2, där

K1: 1 poäng på uppgift n eller – men inte för överbetyg – UPG n godkänd ($n = 1, 2, 3$).

K2: 3/4/5 godkända uppgifter och 8/11/14 poäng totalt, där 1/2 bonuspoäng upp till 8 poäng för betyg 3 erhålls vid behov om 2/3 UPG-omgångar är godkända.

Notera: Rättningen kan komma att avbrytas ifall det står klart att kraven för godkänt betyg inte längre kan uppfyllas.

Svar finns preliminärt kl 21.00 på kursens hemsida.

Del A

1. Bestäm en Möbiusavbildning $w(z)$ som avbildar cirkelskivan $|z| < 1$ på området $|w - i| > 2$ samtidigt som $w(i/2) = \infty$ och $w(1) = 2 + i$. Bestäm sedan bilden i w -planet av realaxeln i z -planet.

2. (a) Beräkna

$$\int_C (z + \cos z) dz$$

där C är kvartscirkeln $z(t) = \pi e^{it}$, $t : \pi/2 \rightarrow 0$. Svara i rektangulär form $a + ib$, där $a, b \in \mathbb{R}$. (1p)

- (b) Låt

$$f(z) = \frac{\operatorname{Log}(1+z)}{\cosh z}.$$

Bestäm alla termer av grad högst 3 (rest $\mathcal{O}(z^4)$) i Maclaurinserien för f , och bestäm denna series konvergensradie R . (2p)

3. Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x - i)^2}$$

med residykalkyl.

Var god vänd!

Del B

4. Bestäm antalet nollställen som polynomet

$$p(z) = z^3 - iz^2 + 3iz - 1$$

har i första kvadranten $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$.

5. Beräkna

$$I(a) = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2ax \, dx, \quad a \in \mathbb{R},$$

genom att integrera e^{-z^2} längs en lämplig axelparallell rektangel. Att integralen $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$ får användas utan bevis.

6. Om $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$, visa att serien

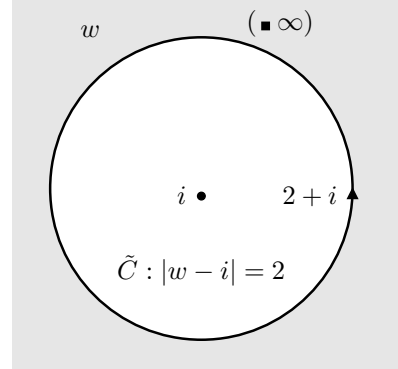
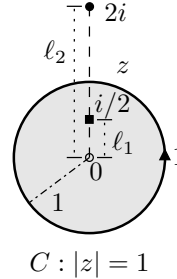
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(4n)}(0)}{(4n)!} = f(0) + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} + \frac{f^{(8)}(0)}{8!} + \dots$$

är konvergent och att dess summa kan uttryckas med hjälp av f :s värden i de fyra punkterna 1 , i , -1 och $-i$. Ge dessutom ett exempel på en funktion f som är analytisk i 0 men som är sådan att ovanstående serie är divergent.

TATA45 Komplex analys 2026-01-12, lösningsskisser

1. Låt C vara cirkeln $|z| = 1$. För att skivan $|z| < 1$ ska kunna avbildas på området $|w - i| > 2$ med en Möbiusavbildning $w(z)$ måste, till att börja med, rand avbildas på rand, d.v.s. cirkeln C på cirkeln $\tilde{C} : |w - i| = 2$.

Att $w(i/2) = \infty$ ger med nödvändighet $w(2i) = i$, eftersom $i/2$ och $2i$ är spegelpunkter m.a.p. cirkeln C (ty $(i/2)^*$ ligger på strålen från mittpunkten 0 genom punkten $i/2$, som har avstånd $\ell_1 = 1/2$ till mittpunkten, och $\ell_1 \ell_2 = r^2 = 1^2$, så $\ell_2 = 2$, och därmed är $(i/2)^* = 2i$, se figur) och ∞ och i är spegelpunkter m.a.p. cirkeln $\tilde{C}$. Eftersom dessutom $w(1) = 2 + i$ (randpunkt på randpunkt) är Möbiusavbildningen entydigt bestämd, och ansatsen



$$\frac{w - i}{1} = k \frac{z - 2i}{z - i/2}$$

och insättning av $w(1) = 2 + i$ ger $k = (2 - i)/(1 - 2i) = (4 + 3i)/5$, så

$$w(z) = i + \frac{4 + 3i}{5} \cdot \frac{z - 2i}{z - i/2} = \frac{(8 + 16i)z + (17 - 16i)}{10z - 5i}$$

(den sista omskrivningen behöver inte göras). Denna avbildar cirkeln C på cirkeln $\tilde{C}$, och eftersom $w(i/2) = \infty$ avbildar den dessutom området $|z| < 1$ på området $|w - i| > 2$ (inre punkt avbildas på inre punkt).

Låt L vara realaxeln $\text{Im } z = 0$ i z -planet och $\tilde{L}$ den $\hat{C}$ -cirkel i w -planet som L avbildas på under $w(z)$ ovan. Eftersom $w(i/2) = \infty$ och $i/2 \notin L$ är $\tilde{L}$ en vanlig cirkel $|w - c| = r$, där centrum $c = w(-i/2) = (4 + 5i)/2$ eftersom $i/2$ och $-i/2$ är spegelpunkter m.a.p. L och ∞ och c är spegelpunkter m.a.p. $\tilde{L}$. Vidare, t.ex. $1 \in L$ ger $w(1) = 2 + i \in \tilde{L}$, så $r = |(2 + i) - (4 + 5i)/2| = 3/2$, så $\tilde{L}$ är cirkeln $|w - (4 + 5i)/2| = 3/2$.

Svar: $w(z) = i + \frac{4 + 3i}{5} \cdot \frac{z - 2i}{z - i/2} = \frac{(8 + 16i)z + (17 - 16i)}{10z - 5i}$; bilden är cirkeln $\left| w - \frac{4 + 5i}{2} \right| = \frac{3}{2}$.

2. (a) $F(z) = z^2/2 + \sin z$ är en primitiv funktion till integranden $f(z) = z + \cos z$ i hela $\mathbb{C}$, speciellt i en omgivning till kurvan C , och eftersom C börjar i punkten $z = i\pi$ och slutar i punkten $z = \pi$ får vi

$$\int_C (z + \cos z) dz = \left[\frac{z^2}{2} + \sin z \right]_{i\pi}^{\pi} = \underline{\underline{\pi^2 - i \sinh \pi}}.$$

- (b) f är analytisk utom på strålen $]-\infty, -1]$ och i de punkter där $\cosh z = 0$; de senare punkterna fås ur $e^{2z} = -1 \Leftrightarrow z = (\log(-1))/2 = i\pi/2 + in\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Den närmaste singulariteten till origo är därför $z = -1$, och eftersom $\text{Log}(1 + z) = \ln|1 + z| + i \text{Arg}(1 + z)$ blir obegränsad när vi närmar oss $z = -1$ inifrån $|z| < 1$ är Maclaurinseriens konvergensradie $R = 1$.

$f(0) = 0$, så vi kan göra den lite enklare ansatsen $f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \mathcal{O}(z^4)$. Standardutvecklingarna för $\text{Log}(1 + z)$ och $\cosh z$ ger nu, eftersom $f(z) \cosh z = \text{Log}(1 + z)$,

$$(c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \mathcal{O}(z^4))(1 + z^2/2 + \mathcal{O}(z^4)) = z - z^2/2 + z^3/3 + \mathcal{O}(z^4),$$

och entydighet hos koefficienterna ger ekvationssystemet $c_1 = 1$, $c_2 = -1/2$, $c_1/2 + c_3 = 1/3$, d.v.s. $c_1 = 1$, $c_2 = -1/2$, $c_3 = -1/6$.

Svar: $f(z) = z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} + \mathcal{O}(z^4)$; $R = 1$.

3. Sätt

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2(z - i)^2} = \frac{1}{(z + i)^2(z - i)^4} = (z + i)^{-2}(z - i)^{-4};$$

vi ser att f är analytisk utom i fyrpolen i och i dubbelpolen $-i$. Vi söker $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$.

Låt L_R vara sträckan från $-R$ till R och låt C_R^- vara halvcirkeln från $-R$ till R i undre halvplanet (rita figur!). Om R är stort nog ($R > 1$) medför residysatsen och sedvanlig residyberäkning (eller Cauchys integralformel för derivata) att (observera orienteringen!)

$$(*) \quad \int_{C_R^- - L_R} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-i} f(z) = 2\pi i \frac{d}{dz} (z - i)^{-4} \Big|_{z=-i} = \frac{2\pi i(-4)}{(-2i)^5} = \frac{\pi}{4}.$$

Parametriseringen $z = t$, $t : -R \rightarrow R$, av L_R ger $\int_{L_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(t) dt \rightarrow I$ då $R \rightarrow \infty$. Vidare, eftersom $|z \pm i| \geq |z| - |\pm i| = R - 1 > 0$ på C_R^- om R är tillräckligt stort får vi ML-uppskattningen

$$\left| \int_{C_R^-} f(z) dz \right| \leq \frac{\pi R}{(R-1)^6} \rightarrow 0 \quad \text{då } R \rightarrow \infty,$$

av gradskäl, så $\int_{C_R^-} f(z) dz \rightarrow 0$ då $R \rightarrow \infty$.

Genom att låta $R \rightarrow \infty$ i $(*)$ får vi slutligen $0 - I = \pi/4$, d.v.s. $I = -\pi/4$.

Svar: $-\frac{\pi}{4}$.

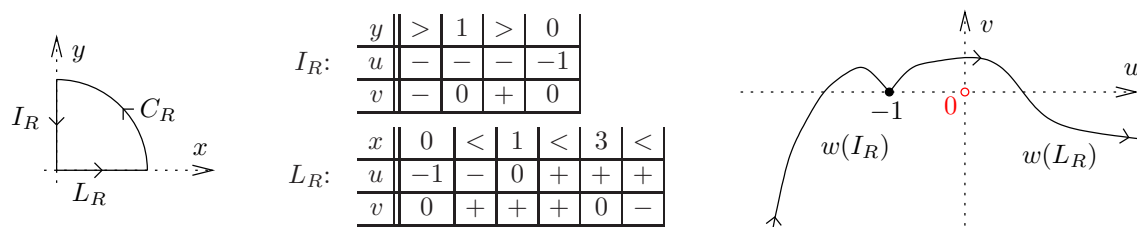
4. Studera argumenttillskottet för $p(z) = z^3 - iz^2 + 3iz - 1$ när z genomlöper den positivt orienterade konturen $C_R + I_R + L_R$ (se figur nedan).

På C_R får vi att $\Delta_{C_R} \arg p(z) = \Delta_{C_R} \arg z^3 + \Delta_{C_R} \arg(1 - i/z + 3i/z^2 - 1/z^3) \rightarrow 3 \cdot \pi/2 + 0 = 3\pi/2$ då $R \rightarrow \infty$.

På I_R är $p(z) = p(iy) = -iy^3 + iy^2 - 3y - 1 = (-1 - 3y) + iy^2(1 - y) = u + iv$, där $y : R \rightarrow 0$, och $u/v \rightarrow 0$ då $y \rightarrow +\infty$ av gradskäl, så v drar mer än u .

På L_R är $p(z) = p(x) = x^3 - ix^2 + 3ix - 1 = (x^3 - 1) + ix(3 - x) = u + iv$, där $x : 0 \rightarrow R$, och $v/u \rightarrow 0$ då $x \rightarrow +\infty$ av gradskäl, så u drar mer än v .

Vi får därför nedanstående teckentabeller och kurva $w = p(z)$ när z genomlöper I_R och L_R :



Från figuren ovan till höger ser vi att $\Delta_{I_R+L_R} \arg p(z) \rightarrow -3\pi/2$ då $R \rightarrow \infty$, och eftersom poler saknas medför argumentprincipen att antalet nollställen för $p(z)$ i första kvadranten är $(1/2\pi) \lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_{C_R+I_R+L_R} \arg p(z) = (3\pi/2 - 3\pi/2)/2\pi = 0$.

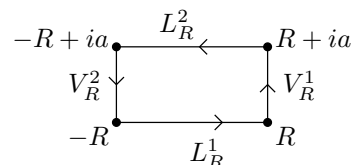
Svar: Noll.

5. Fixera $a \in \mathbb{R}$. Eftersom

$$e^{-z^2} = e^{-(x+iy)^2} = e^{y^2-x^2} e^{-i2xy} = e^{y^2-x^2} (\cos 2xy - i \sin 2xy)$$

väljer vi att integrera e^{-z^2} då $y = 0$ (på realaxeln; vi vet ju att $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$) och då $y = a$.

Låt $\Gamma_R = L_R^1 + V_R^1 + L_R^2 + V_R^2$ vara rektangeln med hörn $\pm R$ och $\pm R + ia$, se figur (som är ritad i fallet $a > 0$, men räkningarna blir desamma ifall $a \leq 0$); eftersom e^{-z^2} är hel analytisk är $\int_{\Gamma_R} e^{-z^2} dz = 0$, enligt Cauchys integralsats.



Parametriseringen $z = t$, $t : -R \rightarrow R$, av L_R^1 ger

$$\int_{L_R^1} e^{-z^2} dz = \int_{-R}^R e^{-t^2} dt = 2 \int_0^R e^{-t^2} dt \rightarrow \sqrt{\pi}, \quad R \rightarrow \infty,$$

och parametriseringen $z = t + ia$, $t : R \rightarrow -R$, av L_R^2 ger

$$\int_{L_R^2} e^{-z^2} dz = -e^{a^2} \int_{-R}^R e^{-t^2} (\cos 2at - i \sin 2at) dt = -2e^{a^2} \int_0^R e^{-t^2} \cos 2at dt \rightarrow -2e^{a^2} I(a), \quad R \rightarrow \infty,$$

där vi har använt att e^{-t^2} och $\cos 2at$ är jämna medan $\sin 2at$ är udda.

På de lodräta sträckorna $V_R^{1,2}$, där $x^2 = R^2$ och $y^2 \leq a^2$, ger ML-uppskattning

$$\left| \int_{V_R^{1,2}} e^{-z^2} dz \right| \leq \int_{V_R^{1,2}} |e^{-z^2}| |dz| \leq e^{a^2-R^2} |a| \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty,$$

så $\int_{V_R^{1,2}} e^{-z^2} dz \rightarrow 0$ då $R \rightarrow \infty$.

När vi till sist låter $R \rightarrow \infty$ i likheten $\int_{\Gamma_R} e^{-z^2} dz = 0$ får vi därför $\sqrt{\pi} + 0 + (-2e^{a^2} I(a)) + 0 = 0$, d.v.s.

$$\text{Svar: } I(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2}.$$

6. f är hel analytisk, så

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

där potensserien (Maclaurinserien) är absolutkonvergent för alla z . Med $|z| = 1$ ser vi speciellt att den positiva serien $\sum_{n=0}^{\infty} |f^{(n)}(0)|/n!$ är konvergent, vilket medför att den utglesade positiva serien $\sum_{n=0}^{\infty} |f^{(4n)}(0)|/(4n)!$ också är konvergent; således är den komplexa serien $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(4n)}(0)/(4n)!$ absolutkonvergent och därmed konvergent.

Vi får nu, eftersom serierna för $f(1)$, $f(i)$, $f(-1)$ och $f(-i)$ är (absolut)konvergenta,

$$f(1) + f(i) + f(-1) + f(-i) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \underbrace{(1^k + i^k + (-1)^k + (-i)^k)}_{a_k},$$

där $a_{4n} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$, $a_{4n+1} = 1 + i - 1 - i = 0$, $a_{4n+2} = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$ och $a_{4n+3} = 1 - i - 1 + i = 0$. Alltså överlever bara termerna med nummer $k = 4n$, och

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(4n)}(0)}{(4n)!} = \frac{f(1) + f(i) + f(-1) + f(-i)}{4}.$$

Till sist, om t.ex. $f(z) = (z+1)^{-1}$ så är f analytisk i 0, $f^{(n)}(z) = (-1)^n n! (z+1)^{-n-1}$ och $f^{(n)}(0)/n! = (-1)^n$, så

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(4n)}(0)}{(4n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{4n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1$$

som är divergent enligt divergenstestet eftersom termerna inte går mot noll då $n \rightarrow \infty$.