TATA45 Komplex analys 2025-03-20, kommentarer

1. Några tror att bilden av halvplanet $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 0$ bara blir en $\hat{\mathbb{C}}$-cirkel, typiskt cirkeln $|w - i| = \sqrt{2}$ (FEL), men det är ju en alldeles för tunn mängd; bilden blir ett helt område ($|w - i| > \sqrt{2}$).

2. (a) Alternativt kan man använda maximumprincipen för att inse att maximum av $|z^2 + 2i|$ på $|z| \leq 1$ antas någonstans på randen $|z| = 1$, och via parametriseringen $z = e^{i\theta}$, $\theta : 0 \to 2\pi$, få

$$|z^2 + 2i|^2 = |e^{i2\theta} + 2i|^2 = (\cos 2\theta)^2 + (\sin 2\theta + 2)^2 = 5 + 4 \sin 2\theta,$$

som ju maximeras då $\sin 2\theta = 1$, d.v.s. då $\theta = \pi/4$ eller $\theta = 5\pi/4$ i intervallet $[0, 2\pi]$.

(b) Några tror att $5 - 4\cos z \neq 0$ för alla $z \in \mathbb{C}$ (FEL, förmodligen en sammanblandning med att $|\cos x| \leq 1$ för $x \in \mathbb{R}$) och får därför att $R = \infty$ (FEL).

3. (a) I denna Rouchéuppgift förekommer ett antal vanliga fel, se kommentarerna till uppgift 3b på tentan 2025-01-18.

(b) Några säger att $\operatorname{Log}(1 + z)$ är singulär i $z = -1$, vilket i och för sig är sant, men det viktiga i sammanhanget är att den är analytisk utom längs strålen $z = x \leq -1$ på realaxeln.

Residyn i $z = 0$ kan alternativt beräknas med den vanliga formeln

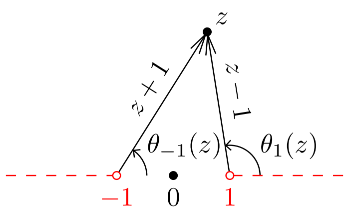
$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) &= \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\operatorname{Log}(1+z)}{z^2 \cos \pi z} = \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\big(\operatorname{Log}(1+z)\big)/(\cos \pi z)}{z^2} = \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{g(z)}{z^2} \\ &= g'(0) = \left(\frac{1}{1+z} \cdot \frac{1}{\cos \pi z} + \operatorname{Log}(1+z) \cdot \frac{\pi \sin \pi z}{\cos^2 \pi z} \right)_{|z=0} = 1,\end{aligned}$$

vilket också de allra flesta gjorde. Punkten $z = 0$ är visserligen en enkelpol för $f(z)$, och inte en dubbelpol, men formeln gäller så länge $f(z) = g(z)/z^2$ för någon funktion $g(z)$ som är analytisk i $z = 0$, och att $g(0) = 0$ gör inget, se Anmärkning 5.6 i kompendiet.

4. Några försöker integrera $(\cos az)/(z^4 + 4)$ över samma kontur som i lösningsskissen, men problemet med det är ju att $\cos az$ inte är begränsad i övre halvplanet (inte heller i undre halvplanet, för övrigt) när $a > 0$, se Anmärkning 5.21 i kompendiet.

5. Alternativt kan man börja med att ta fram *alla* grenar till $\log(z + 1)$ och $\log(z - 1)$ i Ω:

$$\begin{aligned} g_m(z) &= \ln|z+1| + i(\theta_{-1}(z) + 2\pi m), \\ h_n(z) &= \ln|z-1| + i(\theta_1(z) + 2\pi n), \end{aligned}$$



där $-\pi < \theta_{-1}(z) < \pi$ och $0 < \theta_1(z) < 2\pi$, se figur, och $m, n \in \mathbb{Z}$. Då kan alla grenar till $(z+1)^{1/3} + (z-1)^{1/3}$ i Ω skrivas

$$f_{m,n}(z) = \exp\big(g_m(z)/3\big) + \exp\big(h_n(z)/3\big), \quad m, n \in \{0, 1, 2\},$$

och f blir då en av dessa. Kravet $i\sqrt{3} = f_{m,n}(0) = e^{i2\pi m/3} + e^{i(\pi + 2\pi n)}$ ger sedan $m = 1$ och $n = 0$, som i lösningsskissen, så $f = f_{1,0}$. Observera att θ_{-1} i figuren är θ_{-1} i lösningsskissen minus 2π.

6. Undersökningen av hur u och v beter sig på de fyra sträckorna L_1, L_2, L_3 och L_4 kräver således endast funktionsundersökningar som i Envariabelanalys 1, men viktiga resonemang får naturligtvis inte utelämnas, lika lite som i den kursen. Att bara påstå att $e^x - x$ är strängt växande på $[0, 1]$ eller att $\sin y - y$ är strängt avtagande på $[0, \pi/2]$ räcker inte, utan det måste motiveras, enklast med derivata. Dessutom påstod någon att $e \sin y - y$ är strängt växande på $[0, \pi/2]$ vilket är FEL; derivatan är ju $e \cos y - 1$, som uppvisar teckenväxlingen $+ 0 -$ på $[0, \pi/2]$.

Lars Alexandersson, 24 mars 2025