Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA45
Modul: TEN1

Tentamen i Komplex analys

2025-03-20 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Fullständiga lösningar krävs, om inget annat sägs i uppgifterna.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 3 uppgifter, numrerade 1–3, värda 3 poäng var.
- **Del B** består av 3 uppgifter, numrerade 4–6, värda 3 poäng var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2 poäng.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1 och K2, där

K1: 1 poäng på uppgift n eller – men inte för överbetyg – UPGn godkänd ($n = 1, 2, 3$).

K2: 3/4/5 godkända uppgifter och 8/11/14 poäng totalt, där 1/2 bonuspoäng upp till 8 poäng för betyg 3 erhålls vid behov om 2/3 UPG-omgångar är godkända.

Notera: Rättningen kan komma att avbrytas ifall det står klart att kraven för godkänt betyg inte längre kan uppfyllas.

Svar finns preliminärt kl 21.00 på kursens hemsida.

Del A

1. Bestäm en Möbiusavbildning $w(z)$ som avbildar punkterna $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ och $z_3 = \infty$ på i tur och ordning $w_1 = -1$, $w_2 = -3$ och $w_3 = 1$. Bestäm sedan bilderna i w-planet av cirkeln $|z| = 1$ och halvplanet $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 0$ i z-planet.

2. (a) Bestäm maximum av $|z^2 + 2i|$ då $|z| \leq 1$, och ange i vilka punkter maximum antas. (1p)

   (b) Låt
   $$f(z) = \frac{e^{-z}}{5 - 4\cos z}.$$
   Bestäm alla termer av grad högst 3 (rest $\mathcal{O}(z^4)$) i Maclaurinserien för f, och bestäm denna series konvergensradie R. (2p)

3. (a) Bestäm en radie r sådan att $z^4 + iz^3 + (3 - 4i)z^2 + 7 \neq 0$ då $|z| \geq r$. (1p)

   (b) Beräkna
   $$\int_C \frac{\operatorname{Log}(1 + z)}{z^2 \cos \pi z}\, dz,$$
   där C är cirkeln $|z + 1/4| = 1/2$ tagen ett varv moturs. (2p)

Var god vänd!

Del B

4. Beräkna
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^4+4}\,dx, \qquad a \geq 0.$$

5. Låt Ω vara det komplexa planet med de två strålarna $]-\infty, -1]$ och $[1, +\infty[$ på realaxeln borttagna. Bestäm en gren $f(z)$ till den flervärda funktionen
$$(z+1)^{1/3} + (z-1)^{1/3}$$
i Ω sådan att $f(0) = i\sqrt{3}$. Beräkna sedan $f'(0)$ för denna gren.

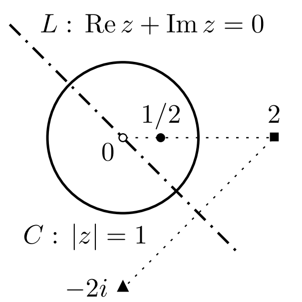
6. Bestäm antalet nollställen som funktionen
$$f(z) = e^z - z$$
har i rektangeln $0 < \operatorname{Re} z < 1$, $0 < \operatorname{Im} z < \pi/2$.

TATA45 Komplex analys 2025-03-20, lösningsskisser

1. Att $(0, \infty) \mapsto (-1, 1)$ ger ansatsen $(w+1)/(w-1) = k(z-0)/1$, och insättning av $1 \mapsto -3$ ger sedan $k = 1/2$; vi får därför $w(z) = (z+2)/(z-2)$.

   För att bestämma bilderna noterar vi först att $\hat{\mathbb{C}}$-cirklar avbildas på $\hat{\mathbb{C}}$-cirklar och att spegelpunkter bevaras under Möbius, samt att $w(2) = \infty$.

   Låt C vara cirkeln $|z| = 1$. Eftersom $2 \notin C$ är bilden $\tilde{C}$ en vanlig cirkel $|w - c| = r$, där $c = w(1/2) = -5/3$ eftersom 2 och 1/2 är spegelpunkter m.a.p. C (ty $(2-0)(1/2-0) = 1^2$) och ∞ och c är spegelpunkter m.a.p. $\tilde{C}$. Vidare, t.ex. $1 \in C$ och $w(1) = -3$, så $r = |(-3) - (-5/3)| = 4/3$; $\tilde{C}$ är därför cirkeln $|w + 5/3| = 4/3$.



   Låt L vara linjen $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 0$ och Ω halvplanet $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 0$. Eftersom $2 \notin L$ är bilden $\tilde{L}$ också en vanlig cirkel $|w - c| = r$, där $c = w(-2i) = i$ eftersom 2 och $-2i$ är spegelpunkter m.a.p. L och ∞ och c är spegelpunkter m.a.p. $\tilde{L}$. Vidare, t.ex. $0 \in L$ och $w(0) = -1$, så $r = |(-1) - i| = \sqrt{2}$; $\tilde{L}$ är därför cirkeln $|w - i| = \sqrt{2}$. Till sist, eftersom t.ex. $1 \in \Omega$ och $w(1) = -3 \in \tilde{\Omega}$, bilden av Ω i w-planet, och $|(-3) - i| = \sqrt{10} > \sqrt{2}$, följer att $\tilde{\Omega}$ ges av $|w - i| > \sqrt{2}$.

   <u>Svar</u>: $w(z) = \dfrac{z+2}{z-2}$; bilderna är $\left|w + \dfrac{5}{3}\right| = \dfrac{4}{3}$ respektive $|w - i| > \sqrt{2}$.

2. (a) $|z^2 + 2i| \le |z^2| + |2i| = |z|^2 + 2 \le 3$ då $|z| \le 1$, med likhet precis då $|z| = 1$ samtidigt som z^2 och $2i$, som vektorer, är parallella och lika riktade; således antas maximum precis då $z^2 = i = e^{i\pi/2}$, så med $z = e^{i\theta}$ får vi

   $$z^2 = i \quad\Leftrightarrow\quad e^{i2\theta} = e^{i\pi/2} \quad\Leftrightarrow\quad 2\theta = \pi/2 + 2n\pi \quad\Leftrightarrow\quad \theta = \pi/4 + n\pi, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

   som ger de två punkterna $z_1 = e^{i\pi/4} = (1+i)/\sqrt{2}$ och $z_2 = e^{i5\pi/4} = (-1-i)/\sqrt{2}$.

   <u>Svar</u>: Maximum $= 3$, antas i $z = \pm(1+i)/\sqrt{2}$.

   (b) Nämnaren $= 5 - 4\cos z$, så med $w = e^{iz}$ får vi $w \neq 0$ och

   $$\begin{aligned} 0 = 5 - 4\cos z = 5 - 2w - 2/w \quad&\Leftrightarrow\quad w^2 - 5w/2 + 1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad w = 2 \text{ eller } w = 1/2 \\ &\Leftrightarrow\quad z = 2n\pi \pm i\ln 2,\ n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

   Täljaren $= e^{-z} \neq 0$ överallt, så i punkterna ovan har f poler, men är analytisk för övrigt. Maclaurinserien för f konvergerar därför i skivan $|z| < R$, där R är avståndet till närmaste pol från origo sett, $\pm i\ln 2$ (två poler ligger lika nära), så $R = \ln 2$.
   Med ansatsen

   $$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \mathcal{O}(z^4)$$

   och standardutvecklingen $e^z = 1 + z + z^2/2 + z^3/6 + \mathcal{O}(z^4)$, som med $-z$ i stället för z ger $e^{-z} = 1 - z + z^2/2 - z^3/6 + \mathcal{O}(z^4)$, tillsammans med att $5 - 4\cos z = 5 - 4(1 - z^2/2! + \mathcal{O}(z^4)) = 1 + 2z^2 + \mathcal{O}(z^4)$, ger

   $$\begin{aligned} 1 - z + z^2/2 - z^3/6 + \mathcal{O}(z^4) &= \big(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \mathcal{O}(z^4)\big)\big(1 + 2z^2 + \mathcal{O}(z^4)\big) \\ &= c_0 + c_1 z + (2c_0 + c_2)z^2 + (2c_1 + c_3)z^3 + \mathcal{O}(z^4), \end{aligned}$$

   och entydighet hos koefficienterna ger $c_0 = 1$, $c_1 = -1$, $2c_0 + c_2 = 1/2$ och $2c_1 + c_3 = -1/6$, d.v.s. $c_0 = 1$, $c_1 = -1$, $c_2 = -3/2$ och $c_3 = 11/6$, så $f(z) = 1 - z - 3z^2/2 + 11z^3/6 + \mathcal{O}(z^4)$.

   <u>Svar</u>: $f(z) = 1 - z - \dfrac{3}{2}z^2 + \dfrac{11}{6}z^3 + \mathcal{O}(z^4)$; $R = \ln 2$.

3. (a) Låt $p(z) = z^4 + iz^3 + (3-4i)z^2 + 7$. Sätt $f(z) = z^4$ och $g(z) = iz^3 + (3-4i)z^2 + 7$. På cirkeln $|z| = r$ är $|f(z)| = |z|^4 = r^4$ och $|g(z)| \le |i||z|^3 + |3-4i||z|^2 + |7| = r^3 + 5r^2 + 7$. Om t.ex. $r = 3$ får vi, på denna cirkel, $|f(z)| = 3^4 = 81$ medan $|g(z)| \le 3^3 + 5 \cdot 3^2 + 7 = 79$, så $|f(z)| > |g(z)|$ för alla z på cirkeln $|z| = 3$. Enligt Rouchés sats har därför $p(z) = f(z) + g(z)$ lika många nollställen i $|z| < 3$ som $f(z)$ har, d.v.s. 4, och eftersom $p(z)$ har grad 4 har $p(z)$ alla sina nollställen i $|z| < 3$ och därmed inget nollställe i $|z| \ge 3$. <u>Svar</u>: T.ex. $r = 3$.

   (b) På och innanför cirkeln $C : |z + 1/4| = 1/2$ är integranden

   $$f(z) = \frac{\operatorname{Log}(1+z)}{z^2 \cos \pi z}$$

analytisk förutom där $z = 0$ och där $\cos \pi z = 0$, och

$$\cos \pi z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{i2\pi z} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{\log(-1)}{2\pi i} = \frac{1}{2} + n, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

så innanför C finns singulariteterna $z = 0$ och $z = -1/2$, och vi behöver därför räkna ut residyerna i dessa två punkter. Eftersom korta Maclaurinutvecklingar ger

$$f(z) = \frac{\operatorname{Log}(1+z)}{z^2 \cos \pi z} = \frac{z + \mathcal{O}(z^2)}{z^2(1+\mathcal{O}(z^2))} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1+\mathcal{O}(z)}{1+\mathcal{O}(z^2)} = \frac{\big(1+\mathcal{O}(z)\big)/\big(1+\mathcal{O}(z^2)\big)}{z} = \frac{g(z)}{z},$$

där $g(z)$ är analytisk i $z = 0$, får vi till att börja med $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = g(0) = 1$.

Vidare,

$$\operatorname*{Res}_{z=-1/2} f(z) = \frac{\big(\operatorname{Log}(1+z)\big)/z^2}{\frac{d}{dz}(\cos \pi z)}\bigg|_{z=-1/2} = \frac{\big(\operatorname{Log}(1+z)\big)/z^2}{-\pi \sin \pi z}\bigg|_{z=-1/2} = \frac{4\ln(1/2)}{\pi},$$

så sammantaget blir, enligt residysatsen,

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\left(1 + \frac{4\ln(1/2)}{\pi}\right) = \underline{\underline{(2\pi - 8\ln 2)i}}.$$

4. Eftersom

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^4+4}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}\left(\frac{e^{iax}}{x^4+4}\right)dx = \operatorname{Re} J(a), \text{ där } J(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^4+4}\,dx,$$

låter vi $f_a(z) = e^{iaz}/(z^4+4)$ för fixt $a \geq 0$; då är

$$J(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_a(t)\,dt = \lim_{R\to\infty} \int_{L_R} f_a(z)\,dz,$$

där L_R är sträckan från $z = -R$ till $z = R$. Vidare, eftersom

$$|e^{iaz}| = e^{-ay} \leq 1 \text{ om } y \geq 0 \text{ och } a \geq 0$$

integrerar vi längs konturen $\Gamma_R = L_R + C_R^+$, där C_R^+ är halvcirkeln från $z = R$ till $z = -R$ i övre halvplanet (rita figur!). ML-uppskattning ger ju, eftersom $|z^4+4| \geq |z|^4 - 4 = R^4 - 4 > 0$ på C_R^+ om $R > \sqrt{2}$,

$$\left|\int_{C_R^+} f_a(z)\,dz\right| \leq \frac{1}{R^4-4} \cdot \pi R \to 0, \qquad R \to \infty, \quad a \geq 0,$$

av gradskäl, så $\int_{C_R^+} f_a(z)\,dz \to 0$ då $R \to \infty$ när $a \geq 0$.

$f_a(z)$ är analytisk i z förutom där $z^4 = -4$. Denna binomiska ekvation löser vi via $z = re^{i\theta}$, som ger $r^4 e^{i4\theta} = 4e^{i\pi}$, d.v.s. $r = \sqrt{2}$ och $\theta = \pi/4 + n\pi/2$, $n \in \mathbb{Z}$, och därmed de fyra rötterna $\pm 1 \pm i$, som samtliga är enkelpoler till $f_a(z)$. Innanför konturen ligger de två enkelpolerna $1+i$ och $-1+i$ när $R > \sqrt{2}$, och residyerna där är

$$\operatorname*{Res}_{z=\pm1+i} f_a(z) = \frac{e^{iaz}}{\frac{d}{dz}(z^4+4)}\bigg|_{z=\pm1+i} = \frac{z\,e^{iaz}}{4z^4}\bigg|_{z=\pm1+i} = \frac{(\pm1+i)\,e^{ia(\pm1+i)}}{4(-4)} = -\frac{(\pm1+i)\,e^{-a}e^{\pm ia}}{16},$$

så när $R > \sqrt{2}$ får vi med residysatsen

$$(*) \qquad \int_{L_R+C_R^+} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=1+i} f_a(z) + \operatorname*{Res}_{z=-1+i} f_a(z)\right) = \frac{\pi e^{-a}}{8}\big((1-i)e^{ia} + (1+i)e^{-ia}\big)$$

$$= \frac{\pi e^{-a}}{4}(\cos a + \sin a).$$

Låt nu $R \to \infty$ i $(*)$; då får vi $J(a) + 0 = \pi e^{-a}(\cos a + \sin a)/4$. Speciellt ser vi att $J(a) \in \mathbb{R}$, så $I(a) = \operatorname{Re} J(a) = J(a) = \pi e^{-a}(\cos a + \sin a)/4$.

<u>Svar</u>: $\dfrac{\pi e^{-a}}{4}(\cos a + \sin a)$, $a \geq 0$.

5. Låt $\theta_{-1}(z)$ och $\theta_1(z)$ vara kontinuerligt varierande argument för $(z+1)$ respektive $(z-1)$ i Ω. Då är $\ln|z+1| + i\,\theta_{-1}(z)$ och $\ln|z-1| + i\,\theta_1(z)$ grenar till $\log(z+1)$ respektive $\log(z-1)$ i Ω, och tillhörande gren $f(z)$ till $(z+1)^{1/3} + (z-1)^{1/3}$ i Ω kan då skrivas

$$f(z) = \underbrace{\exp\left(\frac{\ln|z+1| + i\,\theta_{-1}(z)}{3}\right)}_{f_{-1}(z)} + \underbrace{\exp\left(\frac{\ln|z-1| + i\,\theta_1(z)}{3}\right)}_{f_1(z)},$$

där $f_{-1}(z)$ och $f_1(z)$ alltså är grenar till $(z+1)^{1/3}$ respektive $(z-1)^{1/3}$ i Ω. Eftersom $\arg 1 = 2m\pi$ och $\arg(-1) = \pi + 2n\pi$, där $m, n \in \mathbb{Z}$, är de enda möjliga värdena på $\theta_{-1}(0)$ respektive $\theta_1(0)$ får vi

$$\begin{aligned} f(0) = f_{-1}(0) + f_1(0) &= e^{i\theta_{-1}(0)/3} + e^{i\theta_1(0)/3} = e^{i2m\pi/3} + e^{i(\pi+2n\pi)/3} \\ &= \{1\,,\, -1/2 + i\sqrt{3}/2\,,\, -1/2 - i\sqrt{3}/2\} + \{1/2 + i\sqrt{3}/2\,,\, -1\,,\, 1/2 - i\sqrt{3}/2\}, \end{aligned}$$

totalt 9 olika kombinationer, numrerade med $m = 0, 1, 2$ och $n = 0, 1, 2$ (eller tre andra heltal i följd på vardera platsen). Kombinationen med $m = 1$ och $n = 0$ ger det önskade värdet på $f(0)$:

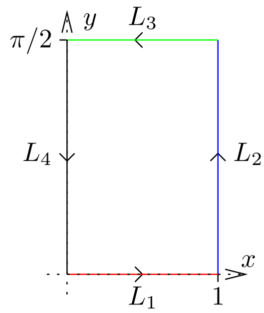
$$f_{-1}(0) = e^{i2\pi/3} = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)/2 \quad \text{och} \quad f_1(0) = e^{i\pi/3} = \left(1 + i\sqrt{3}\right)/2 \quad \text{så att} \quad f(0) = i\sqrt{3},$$

d.v.s. $\theta_{-1}(0) = 2\pi$ och $\theta_1(0) = \pi$ (och, som en konsekvens, $\pi < \theta_{-1}(z) < 3\pi$ och $0 < \theta_1(z) < 2\pi$ i Ω, rita figur!).

Slutligen, $f'(z) = f'_{-1}(z) + f'_1(z)$ då $z \in \Omega$, så

$$f'(0) = \frac{f_{-1}(z)}{3(z+1)} + \frac{f_1(z)}{3(z-1)}\Big|_{z=0} = \frac{e^{i2\pi/3}}{3} - \frac{e^{i\pi/3}}{3} = \underline{\underline{-\frac{1}{3}}}.$$

6. Vi undersöker argumenttillskottet för



$$f(z) = e^z - z = (e^x \cos y - x) + i(e^x \sin y - y) = u + iv$$

när z genomlöper rektangelns rand, med positiv orientering, se figuren intill. Titta gärna på hur tabellen nedan byggs upp parallellt med att du tar del av undersökningarna på de fyra rektangelsidorna. Flera '?' kan ersättas med '+' eller '–' i tabellen, men det behövs inte för att bestämma argumenttillskottet eftersom vi ändå vet i vilket halvplan (förkortat hp) kurvan befinner sig då.

På L_1 är $u = e^x - x$ och $v = 0$, $x: 0 \to 1$. Eftersom $u'(x) = e^x - 1 > 0$ när $x > 0$ är u strängt växande när x växer från 0 till 1.

På L_2 är $u = e\cos y - 1$ och $v = e\sin y - y$, $y: 0 \to \pi/2$. Vi ser att u är strängt avtagande när y växer från 0 till $\pi/2$ och att $u = 0 \Leftrightarrow \cos y = 1/e \Leftrightarrow y = \arccos(1/e) =: \beta$ (som är enda lösningen i intervallet); i denna punkt är $v = e\sin\beta - \beta = \sqrt{e^2-1} - \beta \geq \sqrt{3} - \pi/2 > 0$ (eftersom $e > 2$ och $\pi^2 < 12$).

På L_3 är $u = -x$, $v = e^x - \pi/2$, $x: 1 \to 0$, så u är strängt växande och v är strängt avtagande när x avtar från 1 till 0.

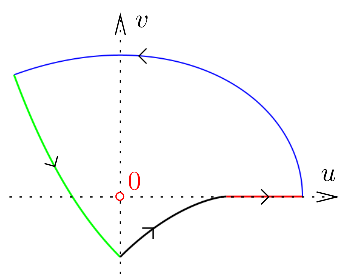
På L_4, slutligen, är $u = \cos y$ och $v = \sin y - y$, $y: \pi/2 \to 0$, så u är strängt växande när y avtar från $\pi/2$ till 0.

Sammantaget ger det nedanstående tabell och kurva i uv-planet, och från kurvan avläser vi att

$$\Delta_{L_1+L_2+L_3+L_4} \arg f(z) = 2\pi,$$

och eftersom f saknar poler får vi att antalet nollställen för f i rektangeln är $N = 2\pi/2\pi = 1$, enligt argumentprincipen (notera att $e - 1 > 0$ och $1 - \pi/2 < 0$).

		L_1			L_2			L_3		L_4	
x	0	$<$	1	1	1	1	1	$>$	0	0	0
y	0	0	0	$<$	β	$<$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$>$	0
u	1	$+$	$e-1$	$+$	0	$-$	-1	$-$	0	$+$	1
v	0	0	0	?	$+$	?	$e-\pi/2$	?	$1-\pi/2$	?	0
hp		höger					vänster			höger	



Svar: Ett.