Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: `TATA45`
Modul: `TEN1`

Tentamen i Komplex analys (TATA45)

2023-03-17 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Fullständiga lösningar krävs. Varje uppgift ger 0–3 poäng, och för betyg 3/4/5 räcker 8/11/14 poäng och 3/4/5 uppgifter bedömda med minst 2 poäng vardera. Lösningsskisser publiceras på kurshemsidan preliminärt kl 21.00.

1. Bestäm Laurentserien för
$$f(z) = \frac{z}{z^2-4}$$
i följande områden: (a) $|z| > 2$ (b) $1 < |z-1| < 3$. (1p+2p)

2. Beräkna
$$\int_C \frac{dz}{z^3 \cos z}$$
där C är cirkeln $|z-1| = 2$ tagen ett varv i positiv led.

3. Bestäm alla hela analytiska funktioner $f = u + iv$ sådana att
$$u - v = e^y(\cos x + \sin x) + x^2 - 2xy - y^2 \quad \text{och} \quad f(0) = -i.$$
f ska uttryckas i variabeln z, alltså som $f(z)$.

4. Låt Ω vara området i z-planet utanför de båda cirklarna
$$C_1 : |z| = 1 \quad \text{och} \quad C_2 : |z-4| = \sqrt{11/3}.$$
   (a) Avbilda Ω på en cirkelring $1 < |w| < R$ med hjälp av en Möbiusavbildning $w(z)$. Ange speciellt radien R, förenklad så långt som möjligt. (2p)
   (b) Bestäm den stationära temperaturfördelningen $T(z)$ (en harmonisk funktion) i Ω som uppfyller randvillkoren $T = 0$ på C_1 och $T = 100$ på C_2. (1p)

5. Bestäm antalet nollställen som funktionen
$$f(z) = z^2 + e^{-z} + \pi^2$$
har i första kvadranten $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$.

6. Låt Ω vara $\mathbb{C}$ med strålen $z = x \geq -1$ borttagen. Bestäm en gren $f(z)$ till den flervärda funktionen
$$\log(z^2 + z)$$
i Ω sådan att $f(-2) = \ln 2$. Beräkna sedan $f(i)$, $f(-1-i)$, $f'(i)$ och $f'(-1-i)$, alla i rektangulär form.

7. Bestäm alla $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ sådana att $\operatorname{Im} f(z) = 0$ precis på strålen $z = x \geq 0$.

TATA45 Komplex analys 2023-03-17, lösningsskisser

1. Att $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$ när $|q|<1$ ger följande utvecklingar i de två områdena:

(a)
$$\frac{z}{z^2-4} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-4/z^2} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{4}{z^2})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{z^{2n+1}}, \quad |z|>2.$$

(b)
$$\frac{z}{z^2-4} = \frac{z}{(z+2)(z-2)} = \frac{1/2}{z+2}+\frac{1/2}{z-2} = \Big/ \begin{matrix} w=z-1 \\ 1<|w|<3 \end{matrix} \Big/ = \frac{1/2}{w+3}+\frac{1/2}{w-1}$$
$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1+w/3}+\frac{1}{2w}\cdot\frac{1}{1-1/w} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{w}{3})^n + \frac{1}{2w}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{w})^n$$
$$= \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^n}{3^n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+1}}, \quad 1<|z-1|<3.$$

2. Sätt $f(z)=1/(z^3\cos z)$. Förutom i punkten $z=0$ är denna funktion singulär där $\cos z=0$, d.v.s. där $e^{2iz}=-1$, d.v.s. där $2iz=\log(-1)=i\pi+i2n\pi$, d.v.s. där $z=\pi/2+n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$. Innanför $C: |z-1|=2$ finns därför trippelpolen $z=0$ och enkelpolen $z=\pi/2$.

Standardutvecklingarna $\cos z = 1-z^2/2!+\mathcal{O}(z^4)$ och $(1-w)^{-1}=1+w+\mathcal{O}(w^2)$ ger

$$\frac{1}{z^3\cos z} = \frac{1}{z^3}\cdot\frac{1}{1-z^2/2+\mathcal{O}(z^4)} = \Big/ \begin{matrix} w=z^2/2+\mathcal{O}(z^4), \\ \mathcal{O}(w^2)=\mathcal{O}(z^4) \end{matrix} \Big/$$
$$= \frac{1}{z^3}\Big(1+\big(z^2/2+\mathcal{O}(z^4)\big)+\mathcal{O}(z^4)\Big) = \frac{1}{z^3}+\frac{1/2}{z}+\mathcal{O}(z), \quad 0<|z|<\pi/2,$$

så $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 1/2$.

Vidare,

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi/2} f(z) = \frac{1/z^3}{\frac{d}{dz}(\cos z)}\Big|_{z=\pi/2} = \frac{1/z^3}{-\sin z}\Big|_{z=\pi/2} = -\frac{8}{\pi^3},$$

så residysatsen medför att

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{2}-\frac{8}{\pi^3}\right) = i\left(\pi-\frac{16}{\pi^2}\right) = \underline{\text{svar}}.$$

3. Derivering m.a.p. x respektive y och användning av Cauchy-Riemanns ekvationer $u'_x = v'_y$ och $u'_y=-v'_x$ ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} u'_x - v'_x = e^y(\cos x-\sin x)+2x-2y = u'_x+u'_y, \\ u'_y-v'_y = e^y(\cos x+\sin x)-2x-2y = u'_y-u'_x, \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} u'_x = -e^y\sin x+2x \quad (1), \\ u'_y = \;\; e^y\cos x - 2y \quad (2). \end{cases}$$

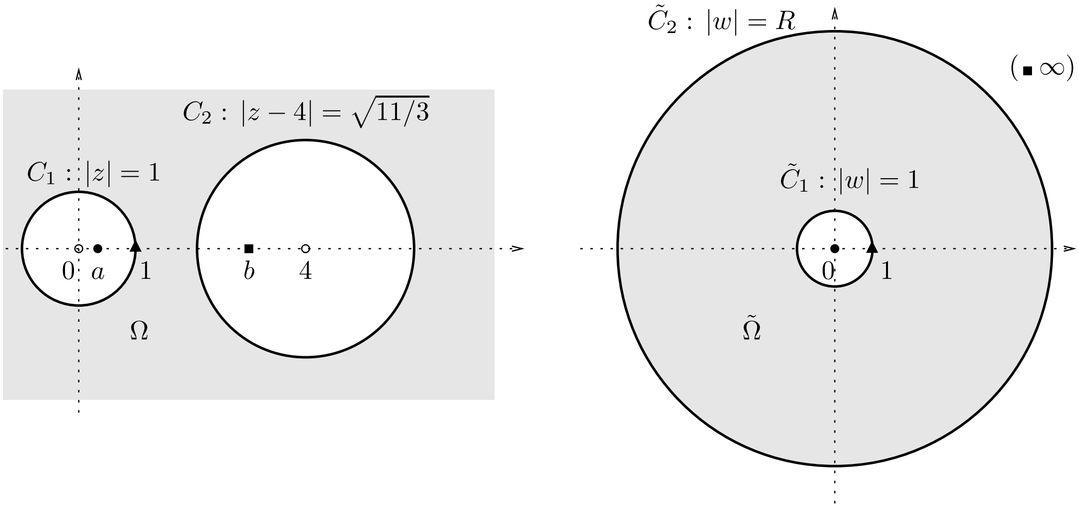
Integration av (1) m.a.p. x ger $u=e^y\cos x + x^2+\varphi(y)$, där φ är en reellvärd funktion av en reell variabel. Derivering m.a.p. y och insättning i (2) ger sedan $\varphi'(y)=-2y$, alltså $\varphi(y)=-y^2+A$, där A är en reell konstant, och därmed $u=e^y\cos x+x^2-y^2+A$. Vi får sedan $v=u-\big(e^y(\cos x+\sin x)+x^2-2xy-y^2\big) = -e^y\sin x+2xy+A$, så

$$f=u+iv=(e^y\cos x+x^2-y^2+A)+i\,(-e^y\sin x+2xy+A), \quad A\in\mathbb{R}.$$

f är alltså en hel funktion, och på realaxeln $z=x$ är $f(x)=\cos x+x^2+A-i\sin x+iA = e^{-ix}+x^2+(1+i)A$. Sätt $g(z)=e^{-iz}+z^2+(1+i)A$. Då är också g hel, och eftersom $f(x)=g(x)$ för alla reella x medför entydighetssatsen för analytiska funktioner att $f(z)=g(z)$ överallt. Kravet $f(0)=-i$ ger slutligen $A=-1$.

<u>Svar</u>: $f(z)=e^{-iz}+z^2-(1+i)$.

4. (a) Genom att med en Möbiusavbildning $w(z)$ avbilda de *gemensamma* spegelpunkterna m.a.p. C_1 och C_2 på $w = 0$ respektive $w = \infty$, som ju är de gemensamma spegelpunkterna m.a.p. alla cirklar med centrum i origo, kommer Ω att avbildas på en cirkelring med centrum i origo, enligt egenskaper hos Möbiusavbildningar.



Geometrin (se figur ovan) medför att de gemensamma spegelpunkterna är $z = a$ och $z = b$ för några reella tal a och b sådana att $0 < a < b < 4$. Vidare är

$$\begin{aligned}(a-0)(b-0) &= 1^2 = 1,\\(4-a)(4-b) &= (\sqrt{11/3})^2 = 11/3,\end{aligned}$$

och detta system löses av $a = 1/3$, $b = 3$.

Om vi låter $w(1/3) = 0$ och $w(3) = \infty$, och kompletterar med att avbilda någon punkt på C_1 på någon punkt på enhetscirkeln $|w| = 1$, säg $w(1) = 1$, får vi via ansatsen $(w-0)/1 = k(z-1/3)/(z-3)$ avbildningen

$$w(z) = \frac{1-3z}{z-3}.$$

C_1 avbildas nu på $\tilde{C}_1 : |w| = 1$, och C_2 avbildas på någon cirkel $\tilde{C}_2 : |w| = R$, där R kan bestämmas genom att sätta in valfri punkt på C_2, t.ex. $z = 4 + \sqrt{11/3}$, i $w(z)$:

$$R = \left|w(4+\sqrt{11/3})\right| = \frac{11+3\sqrt{11/3}}{1+\sqrt{11/3}} = \frac{(11+3\sqrt{11/3})(\sqrt{11/3}-1)}{11/3-1} = 3\sqrt{11/3} = \sqrt{33}.$$

Ω avbildas därför på cirkelringen $\tilde{\Omega} : 1 < |w| < \sqrt{33}$.

(b) Låt $w(z)$ och $\tilde{\Omega}$ vara som ovan. I ringen $\tilde{\Omega}$ finns harmoniska funktioner

$$T = A\ln|w| + B$$

som är konstanta på cirklar $|w| = r$. Kraven $T = 0$ då $|w| = 1$ och $T = 100$ då $|w| = \sqrt{33}$ ger $B = 0$ och sedan $A = 100/(\ln\sqrt{33}) = 200/(\ln 33)$, så

$$T(z) = \frac{200}{\ln 33}\ln|w(z)| = \frac{200}{\ln 33}\ln\left|\frac{1-3z}{z-3}\right|.$$

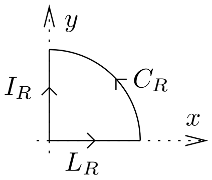
Svar: (a) $w(z) = \dfrac{1-3z}{z-3}$ (t.ex.), $R = \sqrt{33}$ (entydigt); (b) $T(z) = \dfrac{200}{\ln 33}\ln\left|\dfrac{1-3z}{z-3}\right|$ (entydigt).

5. Vi studerar argumenttillskottet för $f(z) = z^2 + e^{-z} + \pi^2$ när z genomlöper kurvan $\Gamma_R = L_R + C_R - I_R$ (se figur nere till vänster).

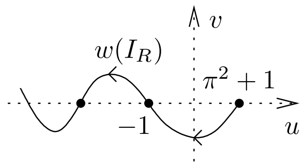
På L_R är $f(z) = f(x) = x^2 + e^{-x} + \pi^2 \geq \pi^2$ och därmed reellt och positivt, så $\Delta_{L_R} \arg f(z) = 0$.

På C_R noterar vi att $\left|e^{-z}\right| = e^{-x} \leq 1$, så $\left|(e^{-z}+\pi^2)/z^2\right| \leq (1+\pi^2)/|z|^2 \to 0$ då $|z| \to +\infty$, varför $\Delta_{C_R} \arg f(z) = \Delta_{C_R} \arg z^2 + \Delta_{C_R} \arg(1 + (e^{-z} + \pi^2)/z^2) \to 2 \cdot \pi/2 + 0 = \pi$ då $R \to \infty$.

På I_R får vi $f(z) = f(iy) = (\pi^2 - y^2 + \cos y) + i(-\sin y) = u + iv$, $y : 0 \to R$, och därmed nedanstående tabell samt kurva $w = f(z)$ då z genomlöper I_R; notera att $u(0) = \pi^2 + 1 > 0$, $u(\pi) = -1 < 0$ och $u(y) < 0$ för $y \geq 2\pi$.



y	0	$<$	π	$<$	2π	$<$
u	$+$	?	$-$	?	$-$	$-$
v	0	$-$	0	$+$	0	?
halvplan		u		ö		v



Dessutom gäller $u \to -\infty$ då $y \to \infty$, och eftersom $|v| \leq 1$ får vi att $v/u \to 0$ då $y \to \infty$, d.v.s. att u drar mer än v, så $\Delta_{I_R} \arg f(z) \to -\pi$ då $R \to \infty$. Antalet nollställen i första kvadranten blir därför $(1/2\pi) \lim_{R\to\infty} \Delta_{L_R + C_R - I_R} \arg f(z) = \big(0 + \pi - (-\pi)\big)/2\pi = 1$.

<u>Svar</u>: Ett.

6. Eftersom

$$\log(z^2 + z) = \log(z+1) + \log z$$

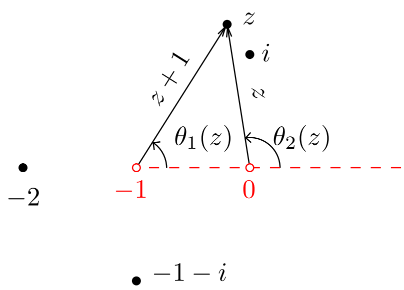
som mängder låter vi

$$g(z) = \ln|z+1| + i\,\theta_1(z)$$

och

$$h(z) = \ln|z| + i\,\theta_2(z)$$

vara grenar till $\log(z+1)$ respektive $\log z$ i Ω, där $\theta_{1,2}(z)$ varierar kontinuerligt i Ω och $\theta_{1,2}(-2) = \pi$, som ju är *ett* argument för -1 respektive -2, se figuren till höger.



Då är

$$f_n(z) = g(z) + h(z) + 2n\pi i = \ln\left|z^2 + z\right| + i\big(\theta_1(z) + \theta_2(z) + 2n\pi\big)$$

alla grenar till $\log(z^2+z)$ i Ω, numrerade med $n \in \mathbb{Z}$, och $f(z)$ är en av dessa. Kravet $f(-2) = \ln 2$ ger

$$\ln 2 = f_n(-2) = \ln 2 + i(\pi + \pi + 2n\pi), \quad \text{så } n = -1.$$

Alltså är

$$f(z) = f_{-1}(z) = \ln\left|z^2 + z\right| + i\big(\theta_1(z) + \theta_2(z) - 2\pi\big), \quad z \in \Omega,$$

så

$$f(i) = \bigg/ \begin{matrix} \theta_1(i) = \pi/4 \\ \theta_2(i) = \pi/2 \\ i^2 + i = -1 + i \end{matrix} \bigg/ = \ln|-1+i| + i\Big(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - 2\pi\Big) = \frac{\ln 2}{2} - \frac{5\pi i}{4}$$

och

$$f(-1-i) = \bigg/ \begin{matrix} \theta_1(-1-i) = 3\pi/2 \\ \theta_2(-1-i) = 5\pi/4 \\ (-1-i)^2 + (-1-i) = -1 + i \end{matrix} \bigg/ = \ln|-1+i| + i\Big(\frac{3\pi}{2} + \frac{5\pi}{4} - 2\pi\Big) = \frac{\ln 2}{2} + \frac{3\pi i}{4}.$$

Eftersom $f(z)$ är en gren till $\log(z^2 + z)$ ger kedjeregeln slutligen

$$f'(z) = \frac{2z+1}{z^2+z}, \quad \text{så} \quad f'(i) = \frac{2i+1}{-1+i} = \frac{1-3i}{2} \quad \text{och} \quad f'(-1-i) = \frac{-1-2i}{-1+i} = -\frac{1-3i}{2}.$$

<u>Svar</u>: $f(i) = \dfrac{\ln 2}{2} - \dfrac{5\pi i}{4}$, $f(-1-i) = \dfrac{\ln 2}{2} + \dfrac{3\pi i}{4}$, $f'(i) = \dfrac{1-3i}{2}$, $f'(-1-i) = -\dfrac{1-3i}{2}$.

7. Skriv $f = u + iv$ som vanligt. Eftersom f är hel analytisk är f, och därmed v, kontinuerlig i $\mathbb{C}$. Enligt förutsättningarna är $v = 0$ precis då $z = x \geq 0$, och därför måste v ha ett och samma tecken i resten av $\mathbb{C}$, ty denna rest är sammanhängande; antag att $v > 0$ där.

Medelvärdessatsen för analytiska funktioner ger bland annat

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(r\,e^{i\theta})\,d\theta, \quad r > 0, \qquad \text{och därmed} \qquad v(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(r\,e^{i\theta})\,d\theta, \quad r > 0,$$

eftersom integrationsvariabeln θ är reell. Men $v(r\,e^{i\theta}) > 0$ i integranden förutom då $\theta = 0$, och vi får därför motsägelsen

$$0 = v(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(r\,e^{i\theta})\,d\theta > 0, \quad r > 0.$$

Alltså kan ingen sådan funktion f existera.

Resonemanget blir helt analogt om i stället $v < 0$ utanför strålen.

<u>Svar</u>: Ingen sådan funktion finns.