Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA45
Modul: TEN1

# Tentamen i Komplex analys

**2025-08-28 kl 14.00–19.00**

Inga hjälpmedel. Fullständiga lösningar krävs, om inget annat sägs i uppgifterna.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 3 uppgifter, numrerade 1–3, värda 3 poäng var.
- **Del B** består av 3 uppgifter, numrerade 4–6, värda 3 poäng var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2 poäng.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1 och K2, där

K1: 1 poäng på uppgift $n$ eller – men inte för överbetyg – UPG$n$ godkänd ($n = 1, 2, 3$).

K2: 3/4/5 godkända uppgifter och 8/11/14 poäng totalt, där 1/2 bonuspoäng upp till 8 poäng för betyg 3 erhålls vid behov om 2/3 UPG-omgångar är godkända.

**Notera:** Rättningen kan komma att avbrytas ifall det står klart att kraven för godkänt betyg inte längre kan uppfyllas.

Svar finns preliminärt kl 21.00 på kursens hemsida.

---

## Del A

1. (a) Lös ekvationen
$$\cos z = \frac{13}{12}.$$
Svaret ska ges i rektangulär form $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. (1p)

   (b) Bestäm en Möbiusavbildning $w(z)$ som avbildar halvplanet $\operatorname{Re} z > 1$ på cirkelskivan $|w| < 2$ samtidigt som $w(\infty) = -2i$ och $w(2) = i$. (2p)

2. (a) Bestäm Laurentserien för
$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 3z + 2}$$
i cirkelringen $\sqrt{2} < |z - i| < \sqrt{5}$. (2p)

   (b) Bestäm konvergensradien $R$ för potensserien
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n^2 + 2i}\, z^n. \qquad \text{(1p)}$$

3. Bestäm antalet nollställen som polynomet
$$p(z) = z^4 - z^3 + 10z^2 - 4z + 9$$
har i högra halvplanet $\operatorname{Re} z > 0$.

---

**Var god vänd!**

## Del B

4. Beräkna med residykalkyl
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(5+4\cos\theta)^2}.$$

5. Bestäm alla hela analytiska funktioner $f$ sådana att
$$(\operatorname{Im} f)'_y = \operatorname{Re} f.$$
$f$ ska uttryckas i variabeln $z$, alltså som $f(z)$.

6. Visa att
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sinh x}\, dx = \frac{\pi}{2} \tanh \frac{\pi}{2}$$
genom att integrera
$$f(z) = \frac{e^{iz}}{\sinh z}$$
längs rektangeln med hörn $\pm R$, $\pm R + i\pi$ men med små kringgående halvcirklar med radie $\epsilon$ vid 0 och $i\pi$.

---

## TATA45 Komplex analys 2025-08-28, lösningsskisser

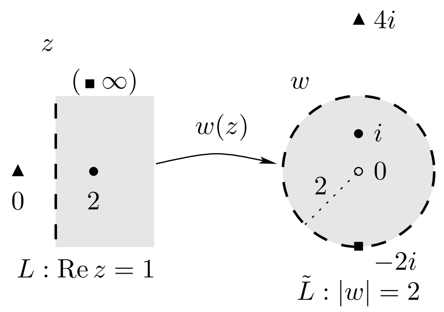
1. (a) Sätt $w = e^{iz}$. Då är $w \neq 0$ och

$$\frac{13}{12} = \cos z = \frac{w + 1/w}{2} \quad \Leftrightarrow \quad w^2 - \frac{13w}{6} + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w = \frac{3}{2} \text{ eller } w = \frac{2}{3},$$

d.v.s. $iz = \log(3/2) = \ln(3/2) + i2\pi n$ eller $iz = \log(2/3) = -\ln(3/2) + i2\pi n$, som ger:

<u>Svar</u>: $z = 2\pi n \pm i \ln(3/2)$, $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Låt $L$ vara linjen $\operatorname{Re} z = 1$ och $\tilde{L}$ cirkeln $|w| = 2$ (streckade i figuren). För att halvplanet $\operatorname{Re} z > 1$ ska kunna avbildas på cirkelskivan $|w| < 2$ med en Möbiusavbildning $w(z)$ måste, till att börja med, rand avbildas på rand, d.v.s. linjen $L$ på cirkeln $\tilde{L}$.




Att $w(2) = i$ ger med nödvändighet $w(0) = 4i$, eftersom 2 och 0 är spegelpunkter m.a.p. linjen $L$ och $i$ och $4i$ är spegelpunkter m.a.p. cirkeln $\tilde{L}$ (ty $i^*$ ligger på strålen från mittpunkten 0 genom $i$, som har avstånd $\ell_1 = 1$ till mittpunkten, och $\ell_1 \ell_2 = r^2 = 2^2$, så $\ell_2 = 4$, och därmed är $i^* = 4i$, se figur).

Eftersom dessutom $w(\infty) = -2i$ (randpunkt på randpunkt) är Möbiusavbildningen entydigt bestämd, och ansatsen $(w - 4i)/(w + 2i) = k(z - 0)/1$ och insätting av $w(2) = i$ ger $k = -1/2$ och därmed $w(z) = (8i - 2iz)/(z + 2)$. Denna avbildar linjen $L$ på cirkeln $\tilde{L}$, och eftersom $w(2) = i$ avbildar den dessutom halvplanet $\operatorname{Re} z > 1$ på cirkelskivan $|w| < 2$ (inre punkt avbildas på inre punkt).

<u>Svar</u>: $w(z) = \dfrac{8i - 2iz}{z + 2}$.

2. (a) Vi ser först att

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 3z + 2} = \frac{1}{(z+1)(z+2)},$$

så $f$ är singulär i punkterna $-1$ och $-2$. Avstånden från punkten $i$ till dessa båda punkter är $|i + 1| = \sqrt{2}$ respektive $|i + 2| = \sqrt{5}$, så $f$ är analytisk i cirkelringen $\sqrt{2} < |z - i| < \sqrt{5}$ och har därmed en Laurentserie där. Partialbråksuppdelning och utveckling i geometriska serier via $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1/(1 - q)$ när $|q| < 1$ ger nu

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} = \Bigg/ \begin{matrix} w = z - i \\ \sqrt{2} < |w| < \sqrt{5} \end{matrix} \Bigg/ = \frac{1}{w + 1 + i} - \frac{1}{w + 2 + i} \\
&= \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{1 + (1+i)/w} - \frac{1}{2+i} \cdot \frac{1}{1 + w/(2+i)} = \frac{1}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(-\frac{1+i}{w}\Big)^n - \frac{1}{2+i} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(-\frac{w}{2+i}\Big)^n \\
&= \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1-i)^n}{(z-i)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(-2-i)^{n+1}}}}, \qquad \sqrt{2} < |z - i| < \sqrt{5}.
\end{aligned}$$

(b) Sätt $a_n = (1+i)^n z^n/(n^2 + 2i)$ för fixt $z \neq 0$. Eftersom

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left| \frac{(1+i)^{n+1} z^{n+1}}{(n+1)^2 + 2i} \Bigg/ \frac{(1+i)^n z^n}{n^2 + 2i} \right| = \big|(1+i)z\big| \cdot \left| \frac{1 + 2i/n^2}{(1 + 1/n)^2 + 2i/n^2} \right| \to \sqrt{2}\,|z|$$

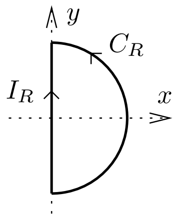
då $n \to \infty$ medför kvotkriteriet att potensserien är absolutkonvergent om $\sqrt{2}\,|z| < 1$, d.v.s. om $|z| < 1/\sqrt{2}$, och att den är divergent om $\sqrt{2}\,|z| > 1$, d.v.s. om $|z| > 1/\sqrt{2}$; således är konvergensradien $R = 1/\sqrt{2}$.

<u>Svar</u>: $R = 1/\sqrt{2}$.

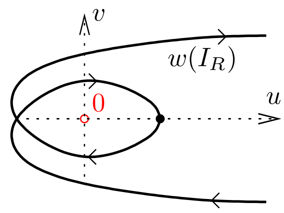
3. Vi studerar argumenttillskottet för $p(z) = z^4 - z^3 + 10z^2 - 4z + 9$ när $z$ genomlöper kurvan $\Gamma_R = C_R - I_R$ (se figur nere till vänster – observera orienteringen!).

På $C_R$ får vi tillskottet $\Delta_{C_R} \arg p(z) = \Delta_{C_R} \arg z^4 + \Delta_{C_R} \arg(1 - 1/z + 10/z^2 - 4/z^3 + 9/z^4) \to 4 \cdot \pi + 0 = 4\pi$ då $R \to \infty$.

På $I_R$ får vi $p(z) = p(iy) = (y^4 - 10y^2 + 9) + i(y^3 - 4y) = (y^2 - 1)(y^2 - 9) + i\,y(y^2 - 4) = u + iv$, $y : -R \to R$, och därmed nedanstående teckentabell då $y \geq 0$ (observera att $u$ är jämn och $v$ är udda), samt kurva $w = p(z)$ då $z$ genomlöper $I_R$ (punkten som svarar mot $y = 0$ är markerad):




| $y$ | 0 | < | 1 | < | 2 | < | 3 | < |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u$ (jämn) | + | + | 0 | − | − | − | 0 | + |
| $v$ (udda) | 0 | − | − | − | 0 | + | + | + |




Dessutom får vi av gradskäl att $v/u \to 0$ då $y \to \pm\infty$ ($u$ drar mer än $v$), och detta tillsammans med tabellen ovan ger skissen ovan till höger, där vi ser att $\Delta_{I_R} \arg p(z) \to -4\pi$ då $R \to \infty$. Eftersom poler saknas blir antalet nollställen i vänstra halvplanet därför $(1/2\pi)\lim_{R\to\infty}(\Delta_{C_R}\arg p(z) - \Delta_{I_R}\arg p(z)) = \big(4\pi - (-4\pi)\big)/2\pi = 4$. Svar: Fyra.

4. Med $z = e^{i\theta}$ får vi, där $C$ är den positivt orienterade enhetscirkeln $|z| = 1$ tagen ett varv,

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(5+4\cos\theta)^2} = \int_C \frac{dz/iz}{\big(5+4(z+z^{-1})/2\big)^2} = \frac{1}{4i}\int_C \frac{z\,dz}{(z^2+5z/2+1)^2}$$
$$= \frac{1}{4i}\int_C \frac{z\,dz}{(z+2)^2(z+1/2)^2} = \Big/ \begin{array}{c}\text{Residysatsen; enda singulariteten}\\ \text{innanför } C \text{ är dubbelpolen } z=-1/2\end{array} \Big/$$
$$= \frac{1}{4i}\cdot 2\pi i \cdot \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z+2)^2}\right)\Big|_{z=-1/2} = \frac{\pi}{2}\big((z+2)^{-2} - 2z(z+2)^{-3}\big)\big|_{z=-1/2} = \frac{\pi}{2}\Big(\frac{4}{9}+\frac{8}{27}\Big) = \underline{\underline{\frac{10\pi}{27}}}.$$

5. Skriv $f = u(x,y) + i\,v(x,y)$; vi ska alltså hitta alla hela analytiska funktioner $f$ sådana att $v'_y = u$. Om $f$ är analytisk är $u'_x = v'_y$, och i så fall är

$$v'_y = u \;\Leftrightarrow\; u'_x = u \;\Leftrightarrow\; u'_x - u = 0 \;\overset{*}{\Leftrightarrow}\; \big(u\,e^{-x}\big)'_x = 0 \;\Leftrightarrow\; u\,e^{-x} = \varphi(y) \;\Leftrightarrow\; u = \varphi(y)e^x,$$

där $\varphi(y)$ är en reellvärd funktion av en reell variabel; i steg $*$ använder vi en integrerande faktor. Eftersom det är nödvändigt att $u$ är harmonisk för att $f$ ska kunna vara analytisk får vi också

$$0 = \Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = \varphi(y)e^x + \varphi''(y)e^x = \big(\varphi(y)+\varphi''(y)\big)e^x \quad\Leftrightarrow\quad \varphi''(y)+\varphi(y) = 0,$$

som ju enligt reell envariabelanalys har allmän lösning $\varphi(y) = a\cos y + b\sin y$, där $a, b \in \mathbb{R}$. Alltså måste $u$ ha formen

$$u(x,y) = (a\cos y + b\sin y)e^x, \quad a,b \in \mathbb{R}.$$

Cauchy-Riemanns ekvationer ger $u'_x = (a\cos y + b\sin y)e^x = v'_y \Leftrightarrow v = (a\sin y - b\cos y)e^x + \psi(x)$, där $\psi$ är en reellvärd funktion av en reell variabel. Insättning i $u'_y = -v'_x$ ger sedan $\psi'(x) = 0$, d.v.s. $\psi(x) = A$, där $A \in \mathbb{R}$. Sammantaget får vi alltså

$$f = u + iv = (a\cos y + b\sin y)e^x + i\big((a\sin y - b\cos y)e^x + A\big), \quad a,b,A \in \mathbb{R},$$

som är en $\mathcal{C}^1$-funktion som uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer och som därmed är analytisk. På realaxeln (där $y = 0$) är $f(x) = (a - ib)e^x + iA = Ce^x + iA$, där vi har satt $C = a - ib$. Om vi låter $g(z) = Ce^z + iA$ ser vi att $f$ och $g$ är hela analytiska och att $f(x) = g(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Entydighetssatsen för analytiska funktioner medför därför att $f(z) = g(z)$ för alla $z \in \mathbb{C}$.

Svar: $f(z) = Ce^z + iA$, $C \in \mathbb{C}$, $A \in \mathbb{R}$.

6. Funktionen

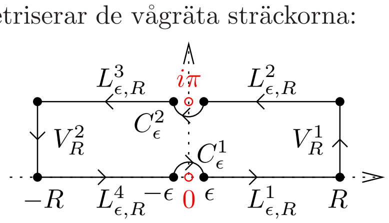
$$f(z) = \frac{e^{iz}}{\sinh z}$$

är analytisk utom där

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{2z} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad z = \frac{\log 1}{2} = in\pi,\; n \in \mathbb{Z}.$$

Låt $\Gamma_{\epsilon,R}$ vara den föreslagna konturen, se figuren. Vi parametriserar de vågräta sträckorna:

$$\begin{cases} L^1_{\epsilon,R}: & z = t,\; t: \epsilon \to R;\; dz = dt,\\ L^2_{\epsilon,R}: & z = t + i\pi,\; t: R \to \epsilon,\; dz = dt,\\ L^3_{\epsilon,R}: & z = -t + i\pi,\; t: \epsilon \to R,\; dz = -dt,\\ L^4_{\epsilon,R}: & z = -t,\; t: R \to \epsilon,\; dz = -dt.\end{cases}$$



Notera att $\sinh(-t) = -\sinh t$, $\sinh(t + i\pi) = -\sinh t$ och $\sinh(-t + i\pi) = \sinh t$, så

$$\int_{L^1_{\epsilon,R}} f(z)\,dz + \int_{L^4_{\epsilon,R}} f(z)\,dz = \int_\epsilon^R \frac{e^{it}}{\sinh t}\,dt + \int_R^\epsilon \frac{e^{-it}}{-\sinh t}\,(-dt) = 2i \int_\epsilon^R \frac{\sin t}{\sinh t}\,dt$$

och

$$\int_{L^2_{\epsilon,R}} f(z)\,dz + \int_{L^3_{\epsilon,R}} f(z)\,dz = \int_R^\epsilon \frac{e^{-\pi} e^{it}}{-\sinh t}\,dt + \int_\epsilon^R \frac{e^{-\pi} e^{-it}}{\sinh t}\,(-dt) = 2i\,e^{-\pi} \int_\epsilon^R \frac{\sin t}{\sinh t}\,dt,$$

varför

$$\int_{L^1_{\epsilon,R}+L^2_{\epsilon,R}+L^3_{\epsilon,R}+L^4_{\epsilon,R}} f(z)\,dz \;\to\; 2i\bigl(1 + e^{-\pi}\bigr) \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sinh t}\,dt \qquad \text{då } \epsilon \to 0^+ \text{ och } R \to \infty.$$

Vidare har $f$ enkelpoler vid 0 och $i\pi$ med residyer

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{e^{iz}}{\frac{d}{dz}(\sinh z)}\Big|_{z=0} = \frac{e^{iz}}{\cosh z}\Big|_{z=0} = 1 \qquad \text{och} \qquad \operatorname*{Res}_{z=i\pi} f(z) = \frac{e^{iz}}{\cosh z}\Big|_{z=i\pi} = -e^{-\pi},$$

så för tillräckligt små $\delta > 0$ (här: $\delta \le \pi$) kan vi skriva

$$f(z) = \frac{1}{z} + g_1(z), \quad 0 < |z| < \delta, \qquad \text{respektive} \qquad f(z) = \frac{-e^{-\pi}}{z - i\pi} + g_2(z), \quad 0 < |z - i\pi| < \delta,$$

där $g_1(z)$ och $g_2(z)$ är analytiska i skivorna $|z| < \delta$ respektive $|z - i\pi| < \delta$. Om $0 < \epsilon < \delta$ får vi därför, med parametriseringarna $z = \epsilon\, e^{it}$, $t : \pi \to 0$, av $C^1_\epsilon$ och $z - i\pi = \epsilon\, e^{it}$, $t : 0 \to -\pi$, av $C^2_\epsilon$,

$$\int_{C^1_\epsilon} f(z)\,dz = \int_\pi^0 \frac{i\,e^{it}}{e^{it}}\,dt + \int_{C^1_\epsilon} g_1(z)\,dz = -i\pi + \int_{C^1_\epsilon} g_1(z)\,dz \to -i\pi \quad \text{då } \epsilon \to 0^+$$

och

$$\int_{C^2_\epsilon} f(z)\,dz = -e^{-\pi} \int_0^{-\pi} \frac{i\,e^{it}}{e^{it}}\,dt + \int_{C^2_\epsilon} g_2(z)\,dz = i\pi e^{-\pi} + \int_{C^2_\epsilon} g_2(z)\,dz \to i\pi e^{-\pi} \quad \text{då } \epsilon \to 0^+.$$

På de lodräta sträckorna $V^{1,2}_R$, där $z = \pm R + it$, $0 \le t \le \pi$, är

$$|e^{iz}| = e^{-t} \le 1 \qquad \text{och} \qquad |\sinh z| = |e^z - e^{-z}|/2 \ge \bigl||e^z| - |e^{-z}|\bigr|/2 = (e^R - e^{-R})/2 = \sinh R,$$

så ML-uppskattning där ger

$$\left| \int_{V^{1,2}_R} f(z)\,dz \right| \le \frac{1}{\sinh R} \cdot \pi \to 0 \quad \text{då } R \to \infty,$$

varför $\int_{V^{1,2}_R} f(z)\,dz \to 0$ då $R \to \infty$.
Eftersom $f$ är analytisk på och innanför $\Gamma_{\epsilon,R}$ får vi

$$0 = \int_{\Gamma_{\epsilon,R}} f(z)\,dz = \int_{L^1_{\epsilon,R}+V^1_R+L^2_{\epsilon,R}+C^2_\epsilon+L^3_{\epsilon,R}+V^2_R+L^4_{\epsilon,R}+C^1_\epsilon} f(z)\,dz,$$

och genom att låta $\epsilon \to 0^+$ och $R \to \infty$ här får vi till slut

$$2i\bigl(1 + e^{-\pi}\bigr) \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sinh t}\,dt + 0 + i\pi\,e^{-\pi} + 0 + (-i\pi) = 0,$$

d.v.s.

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sinh t}\,dt = \frac{i\pi - i\pi\,e^{-\pi}}{2i(1 + e^{-\pi})} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}}{e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}} = \frac{\pi}{2} \tanh \frac{\pi}{2},$$

vilket skulle bevisas.