Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: `TATA45`
Modul: `TEN1`

Tentamen i Komplex analys (TATA45)

2019-04-26 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Fullständiga lösningar krävs. Varje uppgift ger 0–3 poäng, och för betyg 3/4/5 räcker 8/11/14 poäng och 3/4/5 uppgifter bedömda med minst 2 poäng vardera. Lösningsskisser publiceras på kurshemsidan preliminärt kl 21.00.

1. Beräkna med residykalkyl
$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+4)^3}.$$

2. Bestäm en Möbiusavbildning $w(z)$ som avbildar punkterna $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ och $z_3 = \infty$ på i tur och ordning $w_1 = i$, $w_2 = \infty$ och $w_3 = 2$. Bestäm sedan de båda mängder i z-planet som avbildas på cirkeln $|w-1| = 1$ respektive cirkelskivan $|w| < 1$ i w-planet.

3. Bestäm antalet nollställen som polynomet
$$p(z) = z^3 + (-1+8i)z^2 + 8iz + (2+2i)$$
har i (a) övre halvplanet $\operatorname{Im} z > 0$ (b) området $|z| > 2$. (2p+1p)

4. Låt
$$f(z) = \frac{\sin z}{4\cos z + 5}.$$
   (a) Bestäm alla singulariteter till f och avgör deras karaktär. I händelse av pol, ange också ordning.
   (b) Bestäm termerna till och med grad 4 i Maclaurinserien för f och ange seriens konvergensskiva $|z| < R$.

5. Låt Ω vara komplexa planet $\mathbb{C}$ med positiva imaginäraxeln borttagen. Bestäm en gren $f(z)$ till
$$z^{1/2}$$
i Ω som är sådan att $f(-4) = 2i$. Beräkna sedan $f'(1)$ samt integralen $\int_C f(z)\,dz$, där C är en godtycklig styckvis $\mathcal{C}^1$-kurva i Ω från $z = 1$ till $z = -4$.

6. Låt C_R^+ som vanligt vara halvcirkeln från R till $-R$ i övre halvplanet. Visa att
$$\int_{C_R^+} \left| \frac{z \sin z}{(z^2+1)^2} \right| |dz| \to +\infty \quad \text{då} \quad R \to \infty.$$

7. Antag att f är hel analytisk och att
$$2f(2z) = f(z) + f(z+1), \qquad z \in \mathbb{C}.$$
Visa att f är konstant. (Ledning: Undersök f' på det reella intervallet $[0,2]$.)

TATA45 Komplex analys 2019-04-26, lösningsskisser

1. Sätt $f(z) = 1/(z^2+4)^3 = (z+2i)^{-3}(z-2i)^{-3}$; den sökta integralen är $I = \int_0^\infty f(x)\,dx$, och eftersom f är jämn är $I = (1/2)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$. Studera nu konturen $\Gamma_R = L_R + C_R^+$, där L_R är sträckan från $-R$ till R och C_R^+ är halvcirkeln från R till $-R$ i övre halvplanet (rita figur!; figuren finns i lösningen till uppgift 3a nedan). Om R är stort nog ($R > 2$) är f analytisk på och innanför Γ_R utom i trippelpolen $z = 2i$. Residysatsen och sedvanlig residyberäkning ger därför

$$(*) \qquad \int_{L_R + C_R^+} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) = \Big/ f(z) = \frac{(z+2i)^{-3}}{(z-2i)^3} \Big/ = 2\pi i \cdot \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\big((z+2i)^{-3}\big)\Big|_{z=2i}$$
$$= \pi i(-3)(-4)(z+2i)^{-5}\Big|_{z=2i} = \frac{12\pi i}{(4i)^5} = \frac{3\pi}{256}, \qquad R > 2.$$

Vidare, $\int_{L_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(t)\,dt \to 2I$ då $R \to \infty$, och en ML-uppskattning ger

$$\left|\int_{C_R^+} f(z)\,dz\right| \le \frac{\pi R}{(R^2-4)^3} \to 0, \qquad R \to \infty,$$

av gradskäl, så $\int_{C_R^+} f(z)\,dz \to 0$ då $R \to \infty$. Genom att låta $R \to \infty$ i $(*)$ får vi därför till sist $2I + 0 = 3\pi/256$, d.v.s. $I = 3\pi/512$.

<u>Svar</u>: $\dfrac{3\pi}{512}$.

2. Att $(0, 1, \infty) \mapsto (i, \infty, 2)$ ger med standardmetoder (redovisa detaljerna!) $w(z) = (2z-i)/(z-1)$. Invertering ger sedan $z(w) = (w-i)/(w-2)$; vi noterar, för senare bruk, att $w = 2 \mapsto z = \infty$.

Låt $\tilde{C}_1$ vara cirkeln $|w-1| = 1$, och låt C_1 vara den $\hat{\mathbb{C}}$-cirkel i z-planet som avbildas på $\tilde{C}_1$. Eftersom $w = 2 \in \tilde{C}_1$ och därmed $z = \infty \in C_1$ inser vi att C_1 är en linje, och eftersom t.ex. $w = 0 \in \tilde{C}_1$ och $w = 1+i \in \tilde{C}_1$ och därmed $z(0) = i/2 \in C_1$ och $z(1+i) = -1/2 - i/2 \in C_1$ måste C_1 vara linjen $y = 2x + 1/2$ (linjen går ju genom punkterna $(0, 1/2)$ och $(-1/2, -1/2)$).

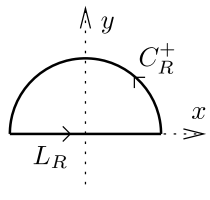
Låt nu $\tilde{C}_0$ vara cirkeln $|w| = 1$, och låt C_0 vara den $\hat{\mathbb{C}}$-cirkel i z-planet som avbildas på $\tilde{C}_0$; $\tilde{C}_0$ är alltså rand till cirkelskivan $|w| < 1$. Eftersom $w = 2 \notin \tilde{C}_0$ och därmed $z = \infty \notin C_0$ är C_0 en vanlig cirkel $|z - c| = r$ där centrum $c = z(1/2) = -1/3 + 2i/3$ eftersom $w = 2$ och $w = 1/2$ är spegelpunkter m.a.p. $\tilde{C}_0$ och $z = \infty$ och $z = c$ är spegelpunkter m.a.p. C_0. Vidare, t.ex. $w = i \in \tilde{C}_0$ så $z(i) = 0 \in C_0$, varför $r = |0 - c| = \sqrt{5}/3$; C_0 är alltså cirkeln $|z - (-1+2i)/3| = \sqrt{5}/3$. Till sist, eftersom $w = 0$ är en inre punkt i $|w| < 1$ och avbildas på $z(0) = i$, och eftersom $|i - (-1+2i)/3| = |(1+i)/3| = \sqrt{2}/3 < \sqrt{5}/3$ är det cirkelskivan $|z - (-1+2i)/3| < \sqrt{5}/3$ som avbildas på $|w| < 1$.

<u>Svar</u>: $w(z) = \dfrac{2z-i}{z-1}$; linjen $y = 2x + \dfrac{1}{2}$ respektive cirkelskivan $\left|z - \dfrac{-1+2i}{3}\right| < \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

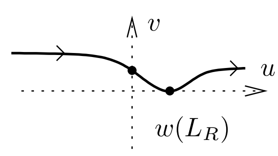
3. (a) Vi studerar argumenttillskottet för $p(z) = z^3 + (-1+8i)z^2 + 8iz + (2+2i)$ när z genomlöper kurvan $\Gamma_R = C_R^+ + L_R$ (se figur nere till vänster).

På C_R^+ får vi $\Delta_{C_R^+} \arg p(z) = \Delta_{C_R^+} \arg z^3 + \Delta_{C_R^+} \arg\big(1 + (-1+8i)/z + 8i/z^2 + (2+2i)/z^3\big) \to 3 \cdot \pi + 0 = 3\pi$ då $R \to \infty$.

På L_R får vi $p(z) = p(x) = (x^3 - x^2 + 2) + i(8x^2 + 8x + 2) = u + iv$, där $u = (x+1)(x^2 - 2x + 2) = (x+1)\big((x-1)^2 + 1\big)$ och $v = 8(x + 1/2)^2$, $x : -R \to R$, och därmed nedanstående teckentabell samt kurva $w = p(z)$ då z genomlöper L_R:



x	$<$	-1	$<$	$-1/2$	$<$
u	$-$	0	$+$	$+$	$+$
v	$+$	$+$	$+$	0	$+$



Dessutom får vi av gradskäl att $v/u \to 0$ då $x \to \pm\infty$ (u drar mer än v), och detta tillsammans med tabellen ovan ger figuren ovan till höger, där vi ser att $\Delta_{L_R} \arg p(z) \to -\pi$ då $R \to \infty$.

Antalet nollställen i övre halvplanet blir därför
$(1/2\pi)\lim_{R\to\infty}\big(\Delta_{C_R^+}\arg p(z)+\Delta_{L_R}\arg p(z)\big)=(3\pi-\pi)/2\pi=1$, eftersom poler saknas.

Svar: Ett.

(b) Sätt $f(z)=(-1+8i)z^2$ och $g(z)=z^3+8iz+(2+2i)$. På hela cirkeln $|z|=2$ är $|f(z)|=|-1+8i||z|^2=\sqrt{65}\cdot 2^2>8\cdot 4=32$ och $|g(z)|\le|z|^3+|8i||z|+|2+2i|=2^3+8\cdot 2+\sqrt{8}<27$, så $|g(z)|<|f(z)|$ på denna cirkel. Enligt Rouchés sats har därför $p(z)=f(z)+g(z)$ lika många nollställen i $|z|\le 2$ som $f(z)$, d.v.s. två, och eftersom $p(z)$ är ett polynom av grad 3 och därför har totalt tre nollställen i $\mathbb{C}$ har $p(z)$ $3-2=1$ nollställe i $|z|>2$.

Svar: Ett.

4. (a) f är singulär precis där nämnaren $4\cos z+5=0 \Leftrightarrow \big/ s=e^{iz}\big/ \Leftrightarrow s^2+5s/2+1=0 \Leftrightarrow s=-2$ eller $s=-1/2 \Leftrightarrow iz=\log(-2)$ eller $iz=\log(-1/2) \Leftrightarrow z=(\pi+2n\pi)\pm i\ln 2$, $n\in\mathbb{Z}$. Vi noterar att täljaren $\sin z\neq 0$ i dessa punkter ($\sin z$ har ju endast reella nollställen) och att nämnaren har enkla nollställen där, då ju $(4\cos z+5)'=-4\sin z\neq 0$ där. Således har f enkelpoler i punkterna i fråga.

Svar: $z=(\pi+2n\pi)\pm i\ln 2$, $n\in\mathbb{Z}$, och de är poler av ordning 1 (enkelpoler).

(b) f är analytisk i origo, och dess enda singulariteter är polerna i (a). Maclaurinserien för f konvergerar därför i skivan $|z|<R$, där R är avståndet till närmaste pol från origo sett, nämligen $\pm\pi\pm i\ln 2$ (fyra poler ligger lika nära), så $R=\sqrt{\pi^2+(\ln 2)^2}$.

Vi noterar att f är en udda funktion, så vi kan göra den enkla ansatsen $f(z)=c_1z+c_3z^3+\mathcal{O}(z^5)$. Multiplikation av $f(z)$ med $4\cos z+5=9-2z^2+\mathcal{O}(z^4)$ och jämförelse med $\sin z=z-z^3/6+\mathcal{O}(z^5)$ ger sambanden $9c_1=1$ och $9c_3-2c_1=-1/6$, d.v.s. $c_1=1/9$ och $c_3=1/162$, så vi får utvecklingen $f(z)=z/9+z^3/162+\mathcal{O}(z^5)$.

Svar: $f(z)=\dfrac{z}{9}+\dfrac{z^3}{162}+\mathcal{O}(z^5)$, konvergensskivan är $|z|<\sqrt{\pi^2+(\ln 2)^2}$.

5. (Rita först en figur över Ω.) Varje gren $f(z)=\widetilde{z^{1/2}}$ till den flervärda funktionen $z^{1/2}$ kan skrivas

$$f(z)=\widetilde{z^{1/2}}=\exp\left(\frac{1}{2}\cdot\widetilde{\log z}\right),\qquad \text{där}\qquad \widetilde{\log z}=\ln|z|+i\,\theta(z)$$

i sin tur är en gren till $\log z$ i Ω; detta betyder att $\theta(z)$ är ett kontinuerligt varierande argument för z i Ω.

Vi har ett krav på $f(-4)$. Till att börja med är $\theta(-4)=\pi+2\pi n$ för något $n\in\mathbb{Z}$, och kravet $f(-4)=2i$ medför nu, eftersom $\widetilde{\log(-4)}=\ln 4+i\,\theta(-4)$, att

$$2i=f(-4)=\exp\left(\frac{\ln 4+i\,\theta(-4)}{2}\right)=2\,e^{i\theta(-4)/2},$$

så om vi väljer t.ex. $\theta(-4)=\pi$ (d.v.s. $n=0$ ovan) blir kravet uppfyllt, ty $e^{i\pi/2}=i$. Eftersom $\theta(z)$ är kontinuerlig i Ω är $\theta(z)$ entydigt bestämt av värdet i $z=-4$, och speciellt är $\theta(1)=2\pi$; vi kan skriva $\pi/2<\theta(z)<5\pi/2$ om vi vill, eftersom området Ω ser ut som det gör.

Nu får vi, eftersom $\widetilde{\log 1}=0+i2\pi$,

$$f'(1)=\frac{1}{2}\,\widetilde{z^{-1/2}}\Big|_{z=1}=\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\widetilde{\log 1}\right)=\frac{1}{2}\,e^{-i\pi}=-\frac{1}{2}$$

och

$$\int_C f(z)\,dz=\int_C\widetilde{z^{1/2}}\,dz=\left[\frac{\widetilde{z^{3/2}}}{3/2}\right]_1^{-4}=\frac{2}{3}\left(\exp\big(\frac{3}{2}\cdot\widetilde{\log(-4)}\big)-\exp\big(\frac{3}{2}\cdot\widetilde{\log 1}\big)\right)$$
$$=\frac{2}{3}\big(8\,e^{i3\pi/2}-1\,e^{i3\pi}\big)=\frac{2}{3}(-8i+1)=\frac{2-16i}{3}.$$

Svar: $f(z)=\exp\left(\dfrac{\ln|z|+i\,\theta(z)}{2}\right)=\sqrt{|z|}\cdot e^{i\theta(z)/2}$, $\dfrac{\pi}{2}<\theta(z)<\dfrac{5\pi}{2}$; $-\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{2-16i}{3}$.

6. På C_R^+, där ju $y \geq 0$, är, med omvända triangelolikheten,

$$|\sin z| = |(e^{iz} - e^{-iz})/2i| \geq \big||e^{iz}| - |e^{-iz}|\big|/2 = |e^{-y} - e^{y}|/2 = (e^y - e^{-y})/2 = \sinh y.$$

På C_R^+ är också $|z| = R$ och $|z^2+1| \leq R^2+1$, så $|z/(z^2+1)^2| \geq R/(R^2+1)^2$ där. Med parametriseringen $z = R\,e^{i\theta}$, $\theta : 0 \to \pi$, av C_R^+ får vi därför (notera att $y = R\sin\theta$ och $|dz| = R\,d\theta$)

$$\begin{aligned}
\int_{C_R^+} \left|\frac{z\sin z}{(z^2+1)^2}\right| |dz| &\geq \int_0^{\pi} \frac{R}{(R^2+1)^2} \sinh(R\sin\theta) R\,d\theta \overset{(1)}{=} \int_0^{\pi/2} \frac{2R}{(R^2+1)^2} \sinh(R\sin\theta) R\,d\theta \\
&\overset{(2)}{\geq} \int_0^{\pi/2} \frac{2R}{(R^2+1)^2} \sinh\big(R\frac{2\theta}{\pi}\big) R\,d\theta = \frac{\pi R}{(R^2+1)^2} \Big[\cosh\big(R\frac{2\theta}{\pi}\big)\Big]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \\
&= \frac{\pi R}{(R^2+1)^2}(\cosh R - 1) = \frac{e^R}{R^3} \cdot \frac{\pi/2}{(1+1/R^2)^2} \cdot (1 + e^{-2R} - 2\,e^{-R}),
\end{aligned}$$

där (1) beror på att $\sin\theta$ är symmetrisk kring $\theta = \pi/2$ och (2) på att $\sin\theta \geq 2\theta/\pi$ då $0 \leq \theta \leq \pi/2$ (se beviset av Jordans lemma i kompendiet) och att sinh är växande. Eftersom $e^R/R^3 \to +\infty$ (standard från envariabel) och de övriga två faktorerna i sista ledet ovan går mot $\pi/2$ respektive 1 då $R \to \infty$ följer påståendet, vilket skulle bevisas.

7. Derivering ger

$$(*) \qquad 4f'(2z) = f'(z) + f'(z+1), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Sätt $M = \max_{[0,2]} |f'|$; maximum antas i någon punkt $c \in [0,2]$ eftersom $|f'|$ är en reell kontinuerlig funktion och intervallet $[0,2]$ är kompakt. Notera att de tre punkterna c, $c/2$ och $c/2+1$ samtliga tillhör $[0,2]$, så med $z = c/2$ i $(*)$ ovan får vi

$$4M = |4f'(c)| = |f'(c/2) + f'(c/2+1)| \leq |f'(c/2)| + |f'(c/2+1)| \leq M + M = 2M,$$

d.v.s. $M \leq 0$, och eftersom definitionen av M trivialt medför att $M \geq 0$ är därmed $M = 0$. Således är den hela analytiska funktionen $f' = 0$ på hela intervallet $[0,2]$, varför $f' = 0$ i hela $\mathbb{C}$ enligt entydighetssatsen för analytiska funktioner. f är därmed en konstant funktion, vilket skulle bevisas.

(Omvänt, om f är en konstant funktion är trivialt $2f(2z) = f(z) + f(z+1)$ för alla $z \in \mathbb{C}$.)

TATA45 Komplex analys 2019-04-26, kommentarer

1. Integralen är tydligt positiv, så icke-reella svar eller svar ≤ 0 är orimliga.

2. För att bestämma C_1, alltså den $\hat{\mathbb{C}}$-cirkel i z-planet som avbildas på cirkeln $\tilde{C}_1 : |w-1| = 2$, kan man också göra så här: C_1 är en linje, ty $w = 2 \in \tilde{C}_1 \Rightarrow z(2) = \infty \in C_1$. Vidare, $w = 1$ (centrum för cirkeln $\tilde{C}_1$) och $w = \infty$ är spegelpunkter m.a.p. $\tilde{C}_1$, så $z(1) = -1 + i$ och $z(\infty) = 1$ är spegelpunkter m.a.p. linjen C_1; denna linje är därmed mittpunktsnormal till sträckan mellan $-1 + i$ och 1, och en enkel figur ger nu ekvationen $y = 2x + 1/2$ för C_1.

   Ekvationen för C_1 kan också skrivas $\operatorname{Im} z = 2 \operatorname{Re} z + 1/2$, däremot inte $\operatorname{Im} z = 2i \operatorname{Re} z + i/2$ (FEL) eller $\operatorname{Im} z = 2 \operatorname{Re} z + i/2$ (FEL); imaginärdelen av ett komplext tal är ju ett reellt tal: $\operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$.

   Man kan också skriva ekvationen för C_1 i parameterform, t.ex. som $z = i/2 + (1 + 2i)t$, $t \in \mathbb{R}$.

3. (a) Som vanligt räcker det att faktorisera endast en av u och v vid undersökningen längs realaxeln, jfr anmärkningen i kompendiet.

   (b) Det går också bra att dela upp $p(z)$ på annat sätt i en summa $p(z) = f(z) + g(z)$, t.ex. med $f(z) = 8iz^2$ och $g(z) = z^3 - z^2 + 8iz + (2 + 2i)$, även om det inte är lika naturligt. Då blir $|f(z)| = 8|z|^2 = 32$ och $|g(z)| \leq |z|^3 + |z|^2 + 8|z| + |2 + 2i| = 28 + \sqrt{8} < 32$ på cirkeln $|z| = 2$, och man kan fortsätta som i lösningsskissen. Om man här i stället gör den sämre – men korrekta – uppskattningen $|2 + 2i| \leq 2 + 2 = 4$ får man $|g(z)| \leq 32$ och därmed endast att $|f(z)| \geq |g(z)|$ på cirkeln $|z| = 2$, men för att kunna använda Rouchés sats måste ju $|f(z)| > |g(z)|$ på cirkeln $|z| = 2$; man måste då visa att i själva verket är $|g(z)| < 32$ genom att motivera att de fem talen z^3, $-z^2$, $8iz$, 2 och $2i$ aldrig kan vara parallella och lika riktade då $|z| = 2$ (vilket ju är lätt att se eftersom 2 och $2i$ inte är det).

   I denna Rouchéuppgift förekommer det också ett antal ”klassiska” fel i lösningarna. Se kommentarerna till uppgift 3b på tentamen 2018-01-10 för en allmän diskussion.

4. (a) Alltför få motiverar att singulariteterna är just enkelpoler. Att täljaren $\neq 0$ i de punkter där nämnaren $= 0$ bevisar bara att punkterna i fråga är poler, inte att de är enkelpoler; för detta måste man dessutom visa att nämnaren har enkla nollställen i punkterna.
   Några försöker, via bytet $s = e^{iz}$ och likheten

   $$f(z) = \frac{\sin z}{4 \cos z + 5} = \frac{(s+1)(s-1)}{4i(s+2)(s+1/2)} = g(s)$$

   och det faktum att $g(s)$ uppenbarligen har enkelpoler i $s = -2$ och $s = -1/2$ dra slutsatsen att även $f(z)$ har enkelpoler i motsvarande z-punkter. Detta resonemang håller inte. Som motexempel kan vi ta $h(z) = 1/(1 - \cos z)$ som via bytet $s = \cos z$ kan skrivas $k(s) = 1/(1 - s)$. Självklart har $k(s)$ enkelpol i $s = 1$, men $h(z)$ har faktiskt dubbelpoler i motsvarande punkter $z = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, eftersom $1 - \cos z$ har nollställen av multiplicitet 2 där.

   (b) Det går naturligtvis bra att göra ansatsen $f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + \mathcal{O}(z^5)$.
   Man får självklart inte slarva med, eller rent av utelämna, $\mathcal{O}(z^n)$-termerna vid härledningen av (början av) Maclaurinserien.
   Några tror att $(\ln 2)^2 = 2 \ln 2$ (grundkurs-FEL).

5. Vi söker *en* gren, så det är OK att *välja* $\theta(-4) = \pi$, d.v.s. $n = 0$, i lösningsskissen.

   Några har angett intervallet $\pi/2 < \theta(z) \leq 5\pi/2$ vid definitionen av grenen, vilket är OLÄMPLIGT eftersom positiva imaginäraxeln (svarande mot $\theta = 5\pi/2$) inte ingår i Ω.

   Derivatan och primitiven kan också skrivas

   $$f'(z) = \frac{1}{2z} \cdot f(z) \qquad \text{respektive} \qquad F(z) = \frac{2z}{3} \cdot f(z)$$

   eftersom $\widetilde{z^{-1/2}} = z^{-1} \cdot \widetilde{z^{1/2}}$ och $\widetilde{z^{3/2}} = z^1 \cdot \widetilde{z^{1/2}}$.

6. Några har försökt uppskatta integralen, kalla den I_R, *uppåt*, men det faktum att $I_R \leq$ något J_R där $J_R \to +\infty$ då $R \to \infty$ bevisar ju inget om I_R:s eventuella gränsvärde då $R \to \infty$.

7. Inget att kommentera.

Lars Alexandersson, 4 maj 2019