Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: `TATA45`
Modul: `TEN1`

Tentamen i Komplex analys (TATA45)

2019-08-29 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Fullständiga lösningar krävs. Varje uppgift ger 0–3 poäng, och för betyg 3/4/5 räcker 8/11/14 poäng och 3/4/5 uppgifter bedömda med minst 2 poäng vardera. Lösningsskisser publiceras på kurshemsidan preliminärt kl 21.00.

1. (a) Bestäm alla hela analytiska funktioner $f = u + iv$ sådana att
$$u = \operatorname{Re} f = x + y + \cosh x \cos y \qquad \text{och} \qquad f(0) = 1 + 2i.$$
f ska uttryckas i variabeln z, alltså som $f(z)$. (2p)

   (b) Låt $f = u + iv = x^2 + iy^2$. Bestäm alla punkter där f är (komplext) deriverbar samt alla punkter där f är analytisk. (1p)

2. Bestäm antalet nollställen som polynomet
$$p(z) = z^5 + 5iz^4 - 3z^2 + (5 - 12i)z + 1$$
har i ringen $1 < |z| < 2$.

3. Beräkna
$$\int_C \frac{\operatorname{Log}\big(z + \sqrt{3}\big)}{z^4 - iz^3 + 2z^2}\, dz$$
där C är cirkeln $|z| = \sqrt{2}$ tagen ett varv i positiv led och $\operatorname{Log} w$ som vanligt är principallogaritmen. Svara i rektangulär form, d.v.s. i formen $a + ib$, där $a, b \in \mathbb{R}$.

4. Bestäm Laurentserien för
$$\frac{1}{z^2 + 9}$$
i följande områden: (a) $|z| < 3$ (b) $|z + 4| > 5$ (1p+2p)

5. Låt $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z + i| < \sqrt{2}, \operatorname{Im} z > 0\}$.

   (a) Bestäm en Möbiusavbildning $w(z)$ som tar Ω på en sektor $0 < \operatorname{Arg} w < \alpha$. Ange också vinkeln α.

   (b) Bestäm en avbildning $s(z)$ som tar Ω konformt på enhetsskivan $|s| < 1$.
   Ledning: Använd (a) och gå via halvplan.

6. Beräkna
$$\hat{u}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-st}}{\cosh t}\, dt, \qquad -1 < \operatorname{Re} s < 1,$$
genom att för varje fixt s i denna remsa integrera $f(z) = e^{-sz}/\cosh z$ längs rektangeln med hörn $\pm R$ och $\pm R + i\pi$. Ange speciellt värdet då $s = i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$, i förenklad form.

   (Detta ger de s.k. Laplace- och Fouriertransformerna av $u(t) = 1/\cosh t$.)

7. Antag att $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ och att $f(z + 2\pi i) = f(z)$ för alla $z \in \mathbb{C}$. Visa att det finns en funktion $h \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^*)$ sådan att $f(z) = h(e^z)$. (Här är $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, som vanligt.)

TATA45 Komplex analys 2019-08-29, lösningsskisser

1. (a) Cauchy-Riemanns ekvationer ger först $u'_x = 1 + \sinh x \cos y = v'_y$, som integrerad m.a.p. y ger $v = y + \sinh x \sin y + \varphi(x)$, där φ är en reellvärd funktion av en reell variabel. Derivering m.a.p. x och insättning i $u'_y = -v'_x$ ger sedan $\varphi'(x) = -1$, alltså $\varphi(x) = -x + A$, där A är en reell konstant. Vi får

$$f = u + iv = (x + y + \cosh x \cos y) + i(y + \sinh x \sin y - x + A),$$

och eftersom $1+2i = f(0) = u(0,0)+i\,v(0,0) = 1+iA$ får vi $A = 2$. f är alltså en hel funktion, och på realaxeln $z = x$ sammanfaller den med den hela funktionen $g(z) = z+\cosh z-iz+2i = (1-i)z + \cosh z + 2i$. Entydighetssatsen ger därför att $f(z) = g(z)$ överallt.

<u>Svar</u>: $f(z) = (1-i)z + \cosh z + 2i$.

(b) Funktionerna $u = x^2$ och $v = y^2$ är båda $\mathcal{C}^1$, så f' existerar $\Leftrightarrow$ $u'_x = v'_y$ och $u'_y = -v'_x$ $\Leftrightarrow$ $2x = 2y$ och $0 = -0$ $\Leftrightarrow$ $y = x$, som är en rät linje.

Eftersom f' inte existerar i någon hel omgivning till någon enda punkt på linjen $y = x$ är f inte analytisk någonstans.

<u>Svar</u>: f är deriverbar på linjen $y = x$ men är inte analytisk någonstans.

2. På cirkeln $|z| = 1$ sätter vi

$$f(z) = (5-12i)z \qquad \text{och} \qquad g(z) = z^5 + 5iz^4 - 3z^2 + 1.$$

Eftersom $|f(z)| = |5-12i||z| = 13$ och $|g(z)| \le |z|^5 + 5|z|^4 + 3|z|^2 + 1 = 10 < 13$ då $|z| = 1$ (och därmed $|f(z)| > |g(z)|$ där) ger Rouchés sats att $f(z)+g(z)$, alltså $p(z)$, har lika många nollställen i $|z| \le 1$ som $f(z)$, d.v.s. ett.

På cirkeln $|z| = 2$ gör vi i stället uppdelningen

$$f(z) = 5iz^4 \qquad \text{och} \qquad g(z) = z^5 - 3z^2 + (5-12i)z + 1.$$

På denna cirkel är $|f(z)| = 5|z|^4 = 80$ och $|g(z)| \le |z|^5 + 3|z|^2 + 13|z| + 1 = 71 < 80$, så Rouché ger att $p(z)$ har lika många nollställen i $|z| < 2$ som $f(z)$, d.v.s. fyra.

Sammantaget har $p(z)$ således $4 - 1 = 3$ nollställen i $1 < |z| < 2$.

<u>Svar</u>: Tre.

3. Låt

$$f(z) = \frac{\operatorname{Log}(z+\sqrt{3})}{z^4 - iz^3 + 2z^2} = \frac{\operatorname{Log}(z+\sqrt{3})}{z^2(z^2 - iz + 2)} = \frac{\operatorname{Log}(z+\sqrt{3})}{z^2(z-2i)(z+i)}.$$

f är analytisk utom längs strålen $]-\infty, -\sqrt{3}]$ och i punkterna 0, $2i$ och $-i$, så f är analytisk på och innanför cirkeln $C: |z| = \sqrt{2}$ förutom i dubbelpolen $z = 0$ och enkelpolen $z = -i$. Residysatsen och sedvanlig residyberäkning ger

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\,dz &= 2\pi i\big(\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-i} f(z)\big) = 2\pi i \left(\frac{d}{dz}\Big(\frac{\operatorname{Log}(z+\sqrt{3})}{z^2 - iz + 2}\Big)\Big|_{z=0} + \frac{\operatorname{Log}(z+\sqrt{3})}{z^2(z-2i)}\Big|_{z=-i} \right) \\
&= 2\pi i \left(\Big(\frac{1/(z+\sqrt{3})}{z^2 - iz + 2} - \frac{\operatorname{Log}(z+\sqrt{3})\cdot(2z-i)}{(z^2-iz+2)^2}\Big)\Big|_{z=0} + \frac{\operatorname{Log}(\sqrt{3}-i)}{(-1)(-3i)} \right) \\
&= 2\pi i \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{i\ln\sqrt{3}}{4} + \frac{\ln 2 - i\pi/6}{3i} \right) = \underline{\underline{2\pi\Big(\frac{\ln 2}{3} - \frac{\ln 3}{8}\Big) + i\pi\Big(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{9}\Big)}}.
\end{aligned}$$

4. Eftersom $1/(1-q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ när $|q| < 1$ (geometriska serien med kvot q) får vi

(a)
$$\frac{1}{z^2+9} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1+z^2/9} = \Big/\, q = -\frac{z^2}{9} \,\Big/ = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{z^2}{9}\Big)^n = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{9^{n+1}}}}, \quad |z| < 3.$$

(b)
$$\frac{1}{z^2+9} = \frac{1}{(z+3i)(z-3i)} = \frac{i/6}{z+3i} + \frac{-i/6}{z-3i} = \Big/\, \begin{matrix} w = z+4 \\ |w| > 5 \end{matrix} \,\Big/$$
$$= \frac{i/6}{w-(4-3i)} + \frac{-i/6}{w-(4+3i)} = \frac{i}{6w}\left(\frac{1}{1-(4-3i)/w} - \frac{1}{1-(4+3i)/w}\right)$$
$$= \Big/\, \left|\frac{4\pm 3i}{w}\right| = \frac{5}{|w|} < 1 \,\Big/ = \frac{i}{6w}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{4-3i}{w}\Big)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{4+3i}{w}\Big)^n\right)$$
$$= \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i(4-3i)^n - i(4+3i)^n}{6\,(z+4)^{n+1}}}}, \quad |z+4| > 5.$$

5. (a) Randen $\partial\Omega$ till Ω består av sträckan $[-1,1]$ längs realaxeln tillsammans med cirkelbågen $|z+i| = \sqrt{2}$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ (rita figur!). Om $w(z)$ är en Möbiusavbildning som är sådan att $w(-1) = 0$ och $w(1) = \infty$ kommer därför både sträckan och cirkelbågen i z-planet att avbildas på strålar utgående ifrån origo i w-planet; om vi dessutom väljer $w(0) = 1$ (eller något annat tal > 0) kommer sträckan att avbildas på positiva realaxeln.

Trippeln $(-1,1,0) \mapsto (0,\infty,1)$ ger med standardmetoder $w(z) = (1+z)/(1-z)$ (redovisa detaljerna!).

För att bestämma vilken stråle som cirkelbågen avbildas på kan vi använda att $w(i(\sqrt{2}-1)) = /\text{förenkla!}/ = (1+i)/\sqrt{2} = e^{i\pi/4}$, så $\alpha = \pi/4$.

<u>Svar</u>: $w(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ (t.ex.); $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ (entydigt bestämt).

(b) Sektorn $0 < \operatorname{Arg} w < \pi/4$ avbildas konformt via $\zeta = w^4$ (ej Möbius) på övre halvplanet $\operatorname{Im}\zeta > 0$ (som ju kan skrivas $0 < \operatorname{Arg}\zeta < \pi$), som i sin tur via en Möbiusavbildning $s(\zeta)$ kan avbildas på $|s| < 1$ på följande sätt:

Sätt $s(i) = 0$. Eftersom $\zeta = i$ och $\zeta = -i$ är spegelpunkter m.a.p. realaxeln $\operatorname{Im}\zeta = 0$ och $s = 0$ och $s = \infty$ är spegelpunkter m.a.p. enhetscirkeln $|s| = 1$ måste $s(-i) = \infty$. Om vi kompletterar med $s(0) = 1$ (randpunkt på randpunkt) kommer den så erhållna Möbiusavbildningen $s(\zeta) = (i-\zeta)/(i+\zeta)$ att avbilda på önskat sätt.

Sammantaget blir
$$s = \frac{i-\zeta}{i+\zeta} = \frac{i-w^4}{i+w^4} = \frac{i - \big((1+z)/(1-z)\big)^4}{i + \big((1+z)/(1-z)\big)^4} = \underline{\underline{\frac{i(1-z)^4 - (1+z)^4}{i(1-z)^4 + (1+z)^4}}} \qquad \text{(t.ex.)}.$$

6. Låt $\Gamma_R = L_R^1 + V_R^1 + L_R^2 + V_R^2$ för $R > 0$ vara rektangeln med hörn $\pm R$ och $\pm R + i\pi$, med delsträckor i tur och ordning $[-R, R]$, $[R, R+i\pi]$, $[R+i\pi, -R+i\pi]$ och $[-R+i\pi, -R]$ (rita figur!). Funktionen $f(z) = e^{-sz}/\cosh z$ är analytisk utom där

$$\cosh z = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{2z} = -1 \;\Leftrightarrow\; 2z = \log(-1) = i\pi + i2n\pi \;\Leftrightarrow\; z = i\pi/2 + in\pi, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

så f är analytisk på och innanför Γ_R utom i punkten $z = i\pi/2$. Residysatsen ger därför att

$$(*) \qquad \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i\pi/2} \frac{e^{-sz}}{\cosh z} = 2\pi i \frac{e^{-sz}}{\frac{d}{dz}(\cosh z)}\Big|_{z=i\pi/2} = 2\pi i \frac{e^{-sz}}{\sinh z}\Big|_{z=i\pi/2} = 2\pi e^{-i\pi s/2}.$$

Parametriseringarna $z = t$, $t : -R \to R$ av L_R^1 och $z = t + i\pi$, $t : R \to -R$ av L_R^2 ger nu

$$\int_{L_R^1 + L_R^2} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{-st}}{\cosh t}\,dt + \int_{R}^{-R} \frac{e^{-s(t+i\pi)}}{\cosh(t+i\pi)}\,dt = (1 + e^{-i\pi s}) \int_{-R}^{R} \frac{e^{-st}}{\cosh t}\,dt.$$

Låt $s = \sigma + i\omega$. På $V_R^{1,2}$, där $z = x + iy$, $x = \pm R$, $0 \le y \le \pi$, är

$$|e^{-sz}| = e^{\operatorname{Re}(-sz)} = e^{\omega y - \sigma x} \le e^{|\omega|\pi + |\sigma| R}$$

och

$$|\cosh z| = \frac{|e^z + e^{-z}|}{2} \ge \frac{\big||e^z| - |e^{-z}|\big|}{2} = \frac{|e^x - e^{-x}|}{2} = \frac{e^R - e^{-R}}{2},$$

så ML-uppskattning ger, eftersom $|\operatorname{Re} s| = |\sigma| < 1$ enligt förutsättningarna,

$$\left| \int_{V_R^{1,2}} f(z)\,dz \right| \le \frac{e^{|\omega|\pi + |\sigma| R}}{(e^R - e^{-R})/2} \cdot \pi = \frac{2\pi\, e^{|\omega|\pi}}{e^{(1-|\sigma|)R}} \cdot \frac{1}{1 - e^{-2R}} \to 0, \qquad R \to \infty.$$

Genom att låta $R \to \infty$ i $(*)$ får vi därför

$$(1 + e^{-i\pi s}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-st}}{\cosh t}\,dt = 2\pi e^{-i\pi s/2}, \qquad |\operatorname{Re} s| < 1,$$

så

$$\hat{u}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-st}}{\cosh t}\,dt = 2\pi \frac{e^{-i\pi s/2}}{1 + e^{-i\pi s}} = \frac{\pi}{(e^{i\pi s/2} + e^{-i\pi s/2})/2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{\cos(\pi s/2)}}}, \qquad |\operatorname{Re} s| < 1,$$

som i specialfallet $s = i\omega$ ger

$$\hat{u}(i\omega) = \frac{\pi}{\cos(i\pi\omega/2)} = \underline{\underline{\frac{\pi}{\cosh(\pi\omega/2)}}}, \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

7. Definiera $h(s) = f(\log s)$ för $s \in \mathbb{C}^*$. Eftersom $f(z + 2\pi i) = f(z)$ för alla $z \in \mathbb{C}$ enligt förutsättningarna och värdena på $\log s$ skiljer sig åt just med heltalsmultipler av $2\pi i$ är h är en envärd funktion i $\mathbb{C}^*$. Vidare är $h(e^z) = f(\log e^z) = f(z)$ då $z \in \mathbb{C}$ eftersom z är ett av värdena på $\log e^z$.

   Det återstår att visa att h är analytisk i $\mathbb{C}^*$. Fixera $s_0 \in \mathbb{C}^*$ och sätt $r = |s_0|$. Då är $r > 0$ och cirkelskivan $D : |s - s_0| < r$ innehåller inte origo, så vi kan definiera en analytisk gren $L(s)$ till $\log s$ i D (genom att klippa upp planet längs en stråle från origo som inte nuddar D). I skivan D är $h(s) = f(L(s))$, en sammansättning av analytiska funktioner, så h är själv analytisk i D och därmed också i s_0. Men $s_0 \in \mathbb{C}^*$ var godtyckligt, så h är analytisk i $\mathbb{C}^*$. Beviset är klart.

TATA45 Komplex analys 2019-08-29, kommentarer

Tänk på att *fullständiga lösningar* krävs. Man kan alltså inte utelämna detaljer – som t.ex. beräkningar av derivator – om man vill ha full poäng.

1. (a) Några tror att $(\cosh x)' = -\sinh x$ (FEL) i stället för det korrekta som är $(\cosh x)' = \sinh x$. Om man inte gör något ytterligare fel får man i ett senare steg $\varphi'(x) = -1 + 2\cosh x \sin y$, vilket är en ORIMLIG ekvation eftersom högerledet här även beror på y.

   (b) Alternativt kan man bevisa att f inte är analytisk någonstans på följande vis, som någon också gjorde: Om f är analytisk, så är $u = \operatorname{Re} f$ (och även $v = \operatorname{Im} f$) harmonisk. Men $u = x^2 \Rightarrow \Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = 2 \neq 0$ överallt, så u är inte harmonisk någonstans; f är därför inte analytisk någonstans.

   Vid undersökningen av var f är (komplext) deriverbar får flera rätt ekvationssystem: $2x = 2y$ och $0 = -0$, men tror att detta är ekvivalent med att $x = y = 0$ (FEL) i stället för $x = y$.

2. I denna Rouchéuppgift förekommer det ett antal ”klassiska” fel i lösningarna. Se kommentarerna till uppgift 3b på tentamen 2018-01-10 för en allmän diskussion.

   En kommentar om språk: Flera skriver *innanför* $|z| < 2$ när de rimligen menar *i* $|z| < 2$; det finns ju inget innanför en cirkelskiva! Några skriver också *innanför* $1 < |z| < 2$ när de rimligen menar *i* $1 < |z| < 2$; här blir det riktigt skumt, eftersom det faktiskt finns något innanför $1 < |z| < 2$, nämligen den slutna skivan $|z| \leq 1$.

3. Några får fel värde på $\operatorname{Log}(\sqrt{3} - i)$, typiskt $\ln 2 - i\pi/3$, $\ln 2 + i\pi/6$ eller $\ln 4 - i\pi/6$ (alla FEL) i stället för det korrekta $\ln 2 - i\pi/6$. Bäst är att rita $\sqrt{3} - i$ i en figur och läsa av längd och principalargument där!

4. Det går bra att svara med flera serier i både (a) och (b).

   Några få tror att $z^2 + 9 = (z+3)(z-3)$ (FEL) i stället för det korrekta $z^2 + 9 = (z+3i)(z-3i)$.

   (a) Om man använder partialbråksuppdelning även här får man serien

   $$\frac{1}{z^2+9} = \frac{1}{18}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+(-1)^n)z^n}{(3i)^n} \quad \left(= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{9^{n+1}} \right).$$

   (Den sökta Laurentserien är faktiskt en Maclaurinserie i denna deluppgift.)

   (b) Det krävs inte, men det kan vara intressant att notera att koefficienterna även här är reella tal eftersom

   $$i(4-3i)^n - i(4+3i)^n = 2\operatorname{Im}\big((4+3i)^n\big).$$

5. (a) Om man ska få en sektor med spets i origo i w-planet måste $(-1,1) \mapsto (0,\infty)$ (som i lösningsskissen) eller $(-1,1) \mapsto (\infty, 0)$. Om man väljer det senare, och dessutom väljer $w(0) = 1$, vilket några har gjort, får man $w(z) = (1-z)/(1+z)$ som visar sig ge sektorn $-\pi/4 < \operatorname{Arg} w < 0$, vilket ju inte är en sektor på formen $0 < \operatorname{Arg} w < \alpha$; man kan dock lätt få en sådan sektor genom att multiplicera ovanstående $w(z)$ med $e^{i\pi/4}$ (vilket ju svarar mot en vridning vinkeln $\pi/4$ i positiv led runt origo): $w(z) = e^{i\pi/4}(1-z)/(1+z)$.

   Att vinkeln i w-planet blir just $\pi/4$ kan alternativt ses direkt i z-planet, som skärningsvinkeln mellan cirkeln och realaxeln vid $z = -1$ (eller vid $z = 1$, om man har valt $w(1) = 0$), eftersom Möbiusavbildningar är konforma och alltså bevarar skärningsvinklar till storlek och orientering. Att α blir just $\pi/4$ måste i så fall naturligtvis motiveras, t.ex. i en figur m.h.a. att triangeln med hörn $-1, 0, i$ är en halv kvadrat; att bara *påstå* att $\alpha = \pi/4$ duger inte.

   (b) Inget att kommentera.

6. Inget att kommentera.

7. Inget att kommentera.

Lars Alexandersson, 25 september 2019