Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA45
Modul: TEN1

Tentamen i Komplex analys (TATA45)

2020-01-15 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Fullständiga lösningar krävs. Varje uppgift ger 0–3 poäng, och för betyg 3/4/5 räcker 8/11/14 poäng och 3/4/5 uppgifter bedömda med minst 2 poäng vardera. Lösningsskisser publiceras på kurshemsidan preliminärt torsdag 16/1 kl 10.00.

1. Beräkna med residykalkyl
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{5 - 3\cos\theta}.$$

2. Låt $p(z) = z^5 + 5z^3 + 4z^2 + 4z + 9$.
   (a) Bestäm antalet nollställen som p har i högra halvplanet $\operatorname{Re} z > 0$. (2p)
   (b) Bestäm en radie r sådan att alla nollställen till p finns i skivan $|z| < r$. (1p)

3. Bestäm en Möbiusavbildning $w(z)$ som avbildar området $|z - 1| > 2$ på högra halvplanet $\operatorname{Re} w > 0$ samtidigt som $w(3) = \infty$ och $w(4) = 5 + i$. Bestäm sedan bilden i w-planet av linjen $\operatorname{Im} z = 2$ i z-planet.

4. (a) Beräkna $\int_C z \sin z \, dz$, där C är sträckan (d.v.s. raka spåret) från $z = i$ till $z = \pi/2$. Svaret ska ges i rektangulär form, alltså i formen $a + ib$ där $a, b \in \mathbb{R}$.
   (b) Lös ekvationen $\tan z = 5i/4$. Svara i rektangulär form,
   (c) Bestäm maximum av $\left| \dfrac{z^4 + 1}{2z^3 + i} \right|$ då $|z| = 1$, samt ange var maximum antas.

5. Utveckla funktionen
$$f(z) = \frac{8 - 3z}{z^4 - 2z^3 + 5z^2 - 8z + 4}$$
i en Laurentserie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ i största möjliga område som innehåller punkten $z = 1 - i$.

6. Låt C_R^+ som vanligt vara halvcirkeln från $z = R$ till $z = -R$ i övre halvplanet. Undersök
$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R^+} \frac{z \sin z}{(z^2 + 1)^2} \, dz.$$

7. Antag att $p(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$ är ett polynom av grad $n \in \mathbb{N}$ och att $|p(z)| \leq 1$ för alla z på enhetscirkeln $|z| = 1$.
   (a) Visa att $|c_k| \leq 1$ för $k = 0, \ldots, n$.
   (b) Visa att $|p(z)| \leq |z|^n$ då $|z| > 1$. Du får använda resultatet i (a) även om du inte har lyckats bevisa det.

TATA45 Komplex analys 2020-01-15, lösningsskisser

1. Med $z = e^{i\theta}$ får vi, där C är den positivt orienterade enhetscirkeln $|z| = 1$ tagen ett varv,

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{5 - 3\cos\theta} = \int_C \frac{dz/iz}{5 - 3(z + z^{-1})/2} = \frac{2}{i} \int_C \frac{dz}{10z - 3z^2 - 3}.$$

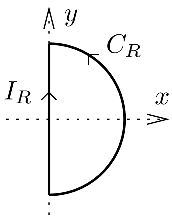
Integranden har endast singulariteten $z = 1/3$ (enkelpol) innanför C – enkelpolen $z = 3$ ligger ju utanför – så residysatsen och sedvanlig residyberäkning ger

$$I = \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=1/3} \frac{1}{10z - 3z^2 - 3} = \frac{4\pi}{\frac{d}{dz}(10z - 3z^2 - 3)}\Big|_{z=1/3} = \frac{4\pi}{10 - 6z}\Big|_{z=1/3} = \frac{\pi}{2} = \underline{\text{Svar}}.$$

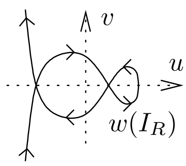
2. (a) Vi studerar argumenttillskottet för $p(z) = z^5 + 5z^3 + 4z^2 + 4z + 9$ när z genomlöper den positivt orienterade konturen $\Gamma_R = C_R - I_R$ (se figur nere till vänster).

På C_R får vi tillskottet $\Delta_{C_R} \arg p(z) = \Delta_{C_R} \arg z^5 + \Delta_{C_R} \arg(1 + 5/z^2 + 4/z^3 + 4/z^4 + 9/z^5) \to 5 \cdot \pi + 0 = 5\pi$ då $R \to \infty$.

På I_R får vi $p(z) = p(iy) = (9 - 4y^2) + iy(y^2 - 1)(y^2 - 4) = u + iv$, $y : -R \to R$, och därmed nedanstående teckentabell då $y \geq 0$ (observera att u är jämn och v udda), samt kurva $w = p(z)$ då z genomlöper I_R:



y	0	<	1	<	3/2	<	2	<
u (jämn)	+	+	+	+	0	−	−	−
v (udda)	0	+	0	−	−	−	0	+



Dessutom får vi av gradskäl att $u/v \to 0$ då $y \to \pm\infty$ (v drar mer än u), och detta tillsammans med tabellen ovan ger skissen ovan till höger, där vi ser att $\Delta_{I_R} \arg p(z) \to -3\pi$ då $R \to \infty$. Eftersom poler saknas blir, enligt argumentprincipen, antalet nollställen i högra halvplanet $(1/2\pi) \lim_{R\to\infty}(\Delta_{C_R} \arg p(z) - \Delta_{I_R} \arg p(z)) = (5\pi + 3\pi)/2\pi = 4$. <u>Svar</u>: Fyra.

(b) $p(z)$ är av grad 5 och har därför 5 nollställen i $\mathbb{C}$. Sätt

$$f(z) = z^5 \quad \text{och} \quad g(z) = 5z^3 + 4z^2 + 4z + 9.$$

Då är $p(z) = f(z) + g(z)$, och på cirkeln $|z| = r$, där $r > 0$, är $|f(z)| = |z|^5 = r^5$ och $|g(z)| \leq 5|z|^3 + 4|z|^2 + 4|z| + 9 = 5r^3 + 4r^2 + 4r + 9$. Om t.ex. $r = 3$ är $|f(z)| = 3^5 = 243$ och $|g(z)| \leq 5 \cdot 27 + 4 \cdot 9 + 4 \cdot 3 + 9 = 192 < 243$ på cirkeln $|z| = 3$, så enligt Rouchés sats har $p(z) = f(z) + g(z)$ lika många nollställen i $|z| < 3$ som $f(z) = z^5$, d.v.s. 5. Således har $p(z)$ alla sina nollställen i skivan $|z| < 3$. <u>Svar</u>: $r = 3$ duger.

3. Att $w(4) = 5 + i$ ger med nödvändighet $w(7/3) = -5 + i$, eftersom 4 och $7/3$ är spegelpunkter m.a.p. cirkeln $|z - 1| = 2$, och $5 + i$ och $-5 + i$ är spegelpunkter m.a.p. linjen $\operatorname{Re} w = 0$ (rita figurer och redovisa detaljerna; *fullständiga lösningar krävs!*). Eftersom dessutom $w(3) = \infty$ (randpunkt på randpunkt) är Möbiusavbildningen entydigt bestämd: $w(z) = \big((1 + i)z + (1 - 3i)\big)/(z - 3)$. Denna avbildar cirkeln $|z - 1| = 2$ på linjen $\operatorname{Re} w = 0$, och eftersom $w(4) = 5 + i$ avbildar den dessutom området $|z - 1| > 2$ på halvplanet $\operatorname{Re} w > 0$ (inre punkt avbildas på inre punkt).

Låt L vara linjen $\operatorname{Im} z = 2$ i z-planet och $\tilde{L}$ den $\hat{\mathbb{C}}$-cirkel i w-planet som L avbildas på under $w(z)$ ovan. Eftersom $w(3) = \infty$ och $3 \notin L$ är $\tilde{L}$ en vanlig cirkel $|w - c| = r$, där centrum $c = w(3 + 4i) = 1$ eftersom 3 och $3 + 4i$ är spegelpunkter m.a.p. L och ∞ och c är spegelpunkter m.a.p. $\tilde{L}$. Vidare, $2i \in L$ ger $w(2i) = (1 + 5i)/13 \in \tilde{L}$, så $r = \big|(1 + 5i)/13 - 1\big| = \big|-12 + 5i\big|/13 = 1$, så $\tilde{L}$ är cirkeln $|w - 1| = 1$.

<u>Svar</u>: $w(z) = \dfrac{(1 + i)z + (1 - 3i)}{z - 3}$; bilden är cirkeln $|w - 1| = 1$.

4. (a) Med partiell integration får vi en primitiv $F(z) = \sin z - z\cos z$ till $f(z) = z\sin z$ i hela $\mathbb{C}$, speciellt i en omgivning till sträckan $[i, \pi/2]$, så

$$\int_C z\sin z\,dz = F\big(\frac{\pi}{2}\big) - F(i) = 1 - (\sin i - i\cos i) = 1 - (i\sinh 1 - i\cosh 1) = \underline{\underline{1 + \frac{i}{e}}}.$$

(b) Att

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{(e^{iz} - e^{-iz})/2i}{(e^{iz} + e^{-iz})/2} = \frac{1}{i}\cdot\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} = \frac{5i}{4}$$

ger, med $w = e^{2iz}$, ekvationen $(w-1)/(w+1) = -5/4$, alltså $w = -1/9$, så

$$z = \frac{1}{2i}\log(-1/9) = \frac{1}{2i}\big(\ln(1/9) + \pi i + 2n\pi i\big) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} + n\pi + i\ln 3,\ n \in \mathbb{Z}.}}$$

(c) Triangelolikheterna ger

$$\text{(T)}\qquad |z^4 + 1| \le |z^4| + |1| = |z|^4 + 1 = 2, \quad |z| = 1,$$

och

$$\text{(N)}\qquad |2z^3 + i| \ge \big||2z^3| - |i|\big| = \big|2|z|^3 - 1\big| = 1, \quad |z| = 1,$$

så

$$\left|\frac{z^4 + 1}{2z^3 + i}\right| = \frac{|z^4 + 1|}{|2z^3 + i|} \le \frac{2}{1} = 2,$$

med likhet $\Leftrightarrow$ det råder likhet *samtidigt* i (T) och (N). Vi har likhet i (T) $\Leftrightarrow$ z^4 och 1 är *lika* riktade, och $|z| = 1$, d.v.s. $\Leftrightarrow$ $z^4 = 1$, och vi har likhet i (N) $\Leftrightarrow$ $2z^3$ och i är *motsatt* riktade, och $|z| = 1$, d.v.s. $\Leftrightarrow$ $z^3 = -i$. Ekvationen $z^4 = 1$ har de fyra lösningarna $1, i, -1, -i$, och precis en av dessa, i, löser även ekvationen $z^3 = -i$ (verifiera detta genom direkt insättning i $z^3 = -i$). Således antas verkligen värdet 2, och det sker i punkten $z = i$, och bara där.

<u>Svar</u>: Maximum är 2, och det antas i punkten $z = i$.

5. Prövning ger att $z = 1$ är dubbelt nollställe till nämnaren, så faktorisering av nämnaren och partialbråksuppdelning av bråket (som i Envariabelanalys 1) ger

$$f(z) = \frac{8 - 3z}{z^4 - 2z^3 + 5z^2 - 8z + 4} = \frac{8 - 3z}{(z-1)^2(z^2+4)} = \frac{z}{z^2+4} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2}.$$

$f(z)$ är analytisk förutom i polerna $z = 1$ (dubbel) och $z = \pm 2i$ (enkla), så konvergensområdena med centrum i $z = 0$ för Laurentserierna till $f(z)$ är $|z| < 1$, $1 < |z| < 2$ och $|z| > 2$. Eftersom serien ska konvergera i punkten $z = 1 - i$ och $|1 - i| = \sqrt{2}$ inser vi att rätt konvergensområde är $1 < |z| < 2$. Vi får nu, med geometriska serier $1/(1-q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ för $|q| < 1$, att

$$\frac{z}{z^2+4} = \frac{z}{4}\cdot\frac{1}{1 + z^2/4} = \frac{z}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\big(-\frac{z^2}{4}\big)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{4^{n+1}}, \qquad |z| < 2,$$

och

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1 - 1/z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\big(\frac{1}{z}\big)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}, \qquad |z| > 1;$$

termvis derivering av den sista serien ger sedan

$$\frac{1}{(z-1)^2} = -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{z^{n+2}}, \qquad |z| > 1,$$

så, efter en liten förenkling i sista steget nedan,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{4^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{z^{n+2}} = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{4^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-1}{z^{n+1}}}}, \qquad 1 < |z| < 2.$$

6. Om vi som vanligt låter C_R^- vara halvcirkeln från $z = -R$ till $z = R$ i *undre* halvplanet och $C_R = C_R^+ + C_R^-$ vara hela cirkeln $|z| = R$ tagen ett varv moturs får vi

$$
\begin{aligned}
2i \int_{C_R^+} \frac{z \sin z}{(z^2+1)^2}\, dz &= \int_{C_R^+} \frac{z\, e^{iz}}{(z^2+1)^2}\, dz - \int_{C_R^+} \frac{z\, e^{-iz}}{(z^2+1)^2}\, dz \\
&= \underbrace{\int_{C_R^+} \frac{z\, e^{iz}}{(z^2+1)^2}\, dz}_{\mathrm{I}} - \underbrace{\int_{C_R} \frac{z\, e^{-iz}}{(z^2+1)^2}\, dz}_{\mathrm{II}} + \underbrace{\int_{C_R^-} \frac{z\, e^{-iz}}{(z^2+1)^2}\, dz}_{\mathrm{III}} .
\end{aligned}
$$

Eftersom $|e^{iz}| = e^{-y} \le 1$ på C_R^+ och $|e^{-iz}| = e^{y} \le 1$ på C_R^- ger ML-uppskattningar

$$
|\mathrm{I}| \le \frac{R \cdot 1}{(R^2-1)^2} \cdot \pi R \to 0 \quad \text{och} \quad |\mathrm{III}| \le \frac{R \cdot 1}{(R^2-1)^2} \cdot \pi R \to 0 \quad \text{då } R \to \infty,
$$

av gradskäl. II beräknas med residysatsen. Låt $g(z) = z\, e^{-iz}/(z^2+1)^2 = z\, e^{-iz}(z+i)^{-2}(z-i)^{-2}$. Om $R > 1$ får vi, eftersom integranden har dubbelpoler i $z = \pm i$ innanför C_R,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{II}}{2\pi i} &= \operatorname*{Res}_{z=i} g(z) + \operatorname*{Res}_{z=-i} g(z) = \frac{d}{dz}\big(z\, e^{-iz}(z+i)^{-2}\big)\Big|_{z=i} + \frac{d}{dz}\big(z\, e^{-iz}(z-i)^{-2}\big)\Big|_{z=-i} \\
&= (i - iz^2)\, e^{-iz}(z+i)^{-3}\Big|_{z=i} + (-i - 2z - iz^2)\, e^{-iz}(z-i)^{-3}\Big|_{z=-i} = -\frac{e^1}{4} + \frac{e^{-1}}{4},
\end{aligned}
$$

så $\mathrm{II} = -i\pi \sinh 1$. Alltså,

$$
\int_{C_R^+} \frac{z \sin z}{(z^2+1)^2}\, dz = \frac{\mathrm{I} - \mathrm{II} + \mathrm{III}}{2i} = \frac{\mathrm{I} + i\pi \sinh 1 + \mathrm{III}}{2i} \to \frac{\pi \sinh 1}{2}, \qquad R \to \infty.
$$

<u>Svar</u>: Gränsvärdet existerar, och dess värde är $(\pi \sinh 1)/2$.

7. (a) Eftersom $p(z)$ är hel analytisk ger integralformeln för Maclaurinkoefficienterna på cirkeln $C_\rho : |s| = \rho$, $\rho > 0$, att

$$
|c_k| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{p(s)}{s^{k+1}}\, ds \right| \le \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\max_{|s|=\rho} |p(s)|}{\rho^{k+1}} \cdot 2\pi\rho = \frac{\max_{|s|=\rho} |p(s)|}{\rho^k}, \quad k \in \mathbb{N}.
$$

Enligt förutsättningen är $|p(s)| \le 1$ då $|s| = 1$, så med $\rho = 1$ ovan får vi att $|c_k| \le 1/1^k = 1$, $k = 0, \ldots, n$, vilket skulle bevisas.

(b) Fixera z med $|z| > 1$ och tag $R > |z|$. Funktionen $f(s) = p(s)/s^n$ är analytisk i $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, speciellt i en omgivning till den slutna och begränsade cirkelringen $1 \le |s| \le R$. På cirkeln $|s| = 1$ är $|f(s)| = |p(s)|/|s|^n \le 1/1^n = 1$, och på cirkeln $|s| = R$ är

$$
\begin{aligned}
|f(s)| = \left| \frac{p(s)}{s^n} \right| &= \frac{|c_0 + c_1 s + \ldots + c_n s^n|}{R^n} \le \frac{|c_0| + |c_1| R + \ldots + |c_n| R^n}{R^n} \\
&\overset{\text{(a)}}{\le} \frac{1 + R + \ldots + R^n}{R^n} = 1 + \frac{1}{R} + \ldots + \frac{1}{R^n}.
\end{aligned}
$$

Enligt maximumprincipen i begränsade områden är därför, för vårt fixa z som ju ligger i ringen $1 < |s| < R$,

$$
|f(z)| \le \max\left(1\,,\, 1 + \frac{1}{R} + \ldots + \frac{1}{R^n}\right) = 1 + \frac{1}{R} + \ldots + \frac{1}{R^n}.
$$

Men detta gäller ju för varje $R > |z|$, och eftersom $1 + 1/R + \ldots + 1/R^n \to 1$ då $R \to \infty$ följer det att $|f(z)| \le 1$, d.v.s. att $|p(z)| \le |z|^n$, vilket skulle bevisas.

TATA45 Komplex analys 2020-01-15, kommentarer

1. (Notera att integraler av denna typ är ämnet för kompendiets kapitel 5.2.)

   Integralen är tydligt positiv, så icke-reella svar eller svar ≤ 0 är orimliga.

   Flera tror att

   $$\frac{1}{5 - 3\cos\theta} = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{5 - 3\,e^{i\theta}}\right), \quad \text{som om det funnes en regel} \quad \frac{1}{\operatorname{Re} w} = \operatorname{Re}\frac{1}{w} \qquad \text{(FEL).}$$

   Visserligen är $5 - 3\cos\theta = \operatorname{Re}(5 - 3\,e^{i\theta})$, men detta uttryck står ju i *nämnaren*, och med $w = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}$, är ju $\operatorname{Re}(1/w) = \operatorname{Re}\big(1/(u + iv)\big) = \operatorname{Re}\big((u - iv)/(u^2 + v^2)\big) = u/(u^2 + v^2)$ medan $1/\operatorname{Re} w = 1/u$.

   Flera faktoriserar fel, typiskt

   $$-3z^2 + 10z - 3 = (z - 3)(z - 1/3) \qquad \text{(FEL)}$$

   i stället för det korrekta

   $$-3z^2 + 10z - 3 = (-3) \cdot (z - 3)(z - 1/3);$$

   observera koefficienten för z^2. Om inget ytterligare fel görs får man ett negativt värde på den sökta integralen, vilket alltså är orimligt, och då måste man gå tillbaka och leta fel i sin lösning.

   Några försöker integrera funktionen $f(z) = 1/(5 - 3\cos z)$ m.a.p. z, ofta oklart längs vilken kurva. f måste i så fall integreras längs realaxeln från $z = -\pi$ till $z = \pi$, vilket ju inte är en sluten kurva. I princip oberoende av vilken kurva man sedan lägger till detta intervall för att få en sluten kurva får man hopplösa räkningar på den tillagda kurvan, och den sökta integralens värde blir oåtkomligt.

2. (a) Som vanligt räcker det att faktorisera endast en av u och v vid undersökningen längs imaginäraxeln, se Anmärkning 6.7 (6.6) i kompendiets upplaga 2019 (2017). Notera dock att man i så fall måste ta med tecknen för u och v för stora negativa och positiva y i tabellen, lämpligen markerade med kolumner $y = -\infty$ respektive $y = +\infty$ där.

   Man måste inte utnyttja att u är jämn och v är udda, utan det går naturligtvis bra att ta med alla $y \in \mathbb{R}$ i sin tabell.

   (b) Det räcker alltså att hitta *en* radie $r > 0$ som duger, vilken som helst. (Någon minsta sådan radie finns för övrigt inte, eftersom $|z| < r$ är en öppen mängd och nollställena är ändligt många.)

   I denna Rouchéuppgift förekommer det ett antal ”klassiska” fel i lösningarna. Se kommentarerna till uppgift 3b på tentamen 2018-01-10 för en allmän diskussion.

3. Några har inte använt spegelpunkter utan har kompletterat de givna $w(3) = \infty$ och $w(4) = 5 + i$ med att avbilda en andra punkt på cirkeln $|z - 1| = 2$ på en andra punkt på linjen $\operatorname{Re} w = 0$, typiskt $w(-1) = 0$ eller $w(1+2i) = 0$; valet $w(-1) = 0$ ger fel avbildning medan valet $w(1+2i) = 0$ RÅKAR ge rätt avbildning, men utan ytterligare argument duger inte en sådan lösning.

   Det effektivaste sättet att bestämma bilden $\tilde{L}$ i w-planet av linjen $L : \operatorname{Im} z = 2$ är att använda sig av spegelpunkter, som i lösningsskissen. Alternativt kan man välja tre punkter på L och se vad de avbildas på i w-planet, t.ex. $w(1 + 2i) = 0$, $w(\infty) = 1 + i$ och $w(3 + 2i) = 1 - i$, och sedan konstruera bildcirkeln geometriskt, vilket några också har gjort.

4. (a) Att använda primitiven $F(z)$, och insättningsformeln, är klart enklast, men det finns åtminstone två alternativ, som några också har använt sig av:

   i. Parametrisering av sträckan $C : z = (1 - t)i + t\pi/2$, $t : 0 \to 1$. Det blir klart jobbigare, men är genomförbart.

   ii. Användande av Cauchys integralsats för att i stället integrera längs sträckorna $[i, 0]$ och $[0, \pi/2]$ på de båda koordinataxlarna, med parametriseringar $z = iy$, $y : 1 \to 0$ respektive $z = x$, $x : 0 \to \pi/2$. Man tvingas då göra två partialintegrationer i stället för en.

Flera tror att $\int_C z\sin z\,dz = \operatorname{Im}\int_C z\,e^{iz}dz$ (FEL); detta fungerar i princip endast om C är ett intervall på realaxeln.

(b) Alternativt kan man substituera $w = e^{iz}$, som många också har gjort; då får man ekvationen $w^2 = -1/9$, med rötterna $w = \pm i/3$, som man sedan går vidare med. Bytet $w = e^{2iz}$, som i lösningsskissen, är dock bättre eftersom ekvationen då blir linjär i w och man slipper att lösa en kvadratisk ekvation (som, med andra siffror, hade kunnat bli värre: $w^2 = 2 + i$, t.ex.).

(c) Några tror att det faktum att $|z^4+1| \le 2$ och $|2z^3+i| \ge 1$ på cirkeln $C : \ |z| = 1$, och därmed att kvoten $|(z^4+1)/(2z^3+i)| \le 2$ där, med automatik medför att maximum av denna kvot på C är just 2 (FELSLUT). Att ett största värde antas är i och för sig klart, eftersom funktionen är reellvärd och kontinuerlig på C och C är kompakt, men ännu så länge säger inget att maximum är just 2; det enda vi till att börja med vet är att det är högst 2.

Många visar att värdet 2 antas i punkten $z = i$, men bevisar inte att detta är den enda punkten där maximum antas.

Några blandar in maximumprincipen, men den är inte relevant här eftersom mängden i fråga är sin egen rand – C är ju en kurva. Vi är alltså på randen redan från början!

5. De största områdena där Laurentserier av typen $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ konvergerar är alltså områden med centrum i origo. Att, som ett fåtal har gjort, försöka utveckla funktionen i områden med annat centrum kommer inte att ge en serie av efterfrågad typ.

Vid partialbråksuppdelningen går det också bra att faktorisera även z^2+4 och sedan dela upp:

$$f(z) = \frac{8-3z}{(z-1)^2(z^2+4)} = \frac{8-3z}{(z-1)^2(z+2i)(z-2i)} = \frac{1/2}{z+2i} + \frac{1/2}{z-2i} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2}.$$

Några gör fel vid bestämningen av serien för $1/(z-1)^2$, som man lämpligen får genom derivering, som i lösningsskissen. Några tror att, då $|z| > 1$,

$$\frac{1}{(1-1/z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{z}\Big)^{2n} \quad \text{(FEL);} \qquad \text{i själva verket är ju} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{z}\Big)^{2n} = \frac{1}{1-1/z^2} \quad \text{då.}$$

Några nöjer sig med att kvadrera serien för $1/(z-1)$ och stanna där:

$$\frac{1}{(z-1)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}\right)^2 \qquad \text{(DUGER INTE)}$$

Detta är ju inte en serie på formen $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, och man måste i så fall skriva om den till den formen.

6. Även här gör många felet att tro att man kan byta ut $\sin z$ mot e^{iz} och sedan ta imaginärdelar.

Alternativt kan man lösa uppgiften genom att integrera $f(z) = (z\sin z)/(z^2+1)^2$ längs $C_R^+ + L_R$, där L_R är sträckan från $z = -R$ till $z = R$. Man får att $\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = -i(\cosh 1)/4$ och att $\int_{L_R} f(z)\,dz \to \pi/2e$ då $R \to \infty$ (en Fourierintegral, se uppgift 2 på tentamen 2019-01-15), vilket tillsammans ger det sökta gränsvärdet $2\pi i(-i)(\cosh 1)/4 - \pi/2e = \pi(\sinh 1)/2$, vilket ett par studenter också gjorde.

7. (a) Förvånande många – nästan alla som lämnat in, faktiskt – skriver så här:

$$|p(z)| = |c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n| \le |c_0| + |c_1||z| + \ldots + |c_n||z|^n = |c_0| + |c_1| + \ldots + |c_n| \overset{*}{\le} 1 \quad \text{(FEL).}$$

Att $|p(z)| \le 1$ då $|z| = 1$ är givet i uppgiften, och allt förutom steg $*$ ovan är också rätt, men detta sista steg är fel: Att $A \le 1$ och $A \le B$ medför självklart inte att $B \le 1$; testa med $B = 2$, t.ex.

(b) Inget att kommentera.

Lars Alexandersson, 26 januari 2020