Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA45
Modul: TEN1

Hemtentamen i Komplex analys (TATA45)

2020-03-19 kl 14.00–19.00

Observera att andra regler än normalt gäller. Följ instruktionerna noggrant.

- Hjälpmedel är tillåtna (böcker, miniräknare, dator o.s.v.), men det är naturligtvis **inte** tillåtet att på något sätt samarbeta med eller ta hjälp av annan person.
- Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt **handskrivna** – om inte särskilda skäl såsom funktionshinder föreligger – och avslutade med ett svar. (Det är också tillåtet att skriva för hand med ritpenna på ritplatta eller surfplatta, men endast handskriven text.) **Även om räknehjälpmedel är tillåtna ska uträkningar redovisas lika noga som vanligt, d.v.s. som om man inte hade några hjälpmedel.**
- Använd inte rödpenna. Lös högst en uppgift per sida (deluppgifter får dock samsas på samma sida). Numrera sidorna, och sortera dem i uppgiftsordning.

Jourhavande lärare: Se `http://courses.mai.liu.se/GU/TATA45/`

Då du är **klar med tentan**, gör följande:

1. Märk varje sida med utbildningskod, namn och personnummer, t.ex.

   `TATA45 Anna Andersson 900101-0000.`

2. Fotografera (eller skanna) varje sida. Kontrollera att bilderna är så pass tydliga att text och symboler går att läsa (annars kan vi inte rätta tentan).
3. Mejla bilderna till

   mai-tenta@mai.liu.se (obs! **MAI**.liu.se)

   Skriv utbildningskod, namn och personnummer även i ämnesraden på ditt mejl. Mejlet får inte vara större än 25 MB (annars kommer det inte fram). Om nödvändigt, dela upp i flera mejl – meddela i så fall detta i varje mejl.
4. Tentan måste ha inkommit till MAI senast 30 minuter efter skrivtidens slut, alltså kl. 19.30 om du inte har förlängd skrivtid. Observera att dessa 30 extra minuter **inte är skrivtid** utan avsedda för att hantera ovanstående punkter.

Det är ditt eget ansvar att **läsliga** bilder/filer skickas in **i tid** i enlighet med ovanstående instruktioner.

VÄND!

Fullständiga lösningar krävs. Varje uppgift ger 0–3 poäng, och för betyg 3 räcker 8 poäng och 3 uppgifter bedömda med minst 2 poäng vardera.

1. Lös ekvationen
$$e^{2iz} + (2-i)\,e^{iz} = 3+3i.$$
Svara i rektangulär form, alltså i formen $z = a + ib$, där $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Bestäm en Möbiusavbildning $w(z)$ som avbildar punkterna $z_1 = -i$, $z_2 = \infty$ och $z_3 = 4$ på i tur och ordning $w_1 = 0$, $w_2 = 1$ och $w_3 = 4+i$. Bestäm sedan bilderna i w-planet av cirkeln $|z-9| = 3$ respektive halvplanet $\operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z$ i z-planet.

3. Beräkna integralerna
$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x^2-2x+5)^2} \qquad \text{och} \qquad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\,dx}{(x^2-2x+5)^2}.$$

4. Bestäm alla termer av grad ≤ 2 (d.v.s. alla termer $c_n z^n$ för $n \leq 2$) i Laurentserien för funktionen
$$f(z) = \frac{1+\sinh z}{z\cos z}$$
i största möjliga område $0 < |z| < r$ där serien konvergerar (bestäm r). Beräkna även $\int_{C_\rho} f(z)\,dz$, där $0 < \rho < r$ och C_ρ är cirkeln $|z| = \rho$ tagen ett varv moturs.

5. Bestäm antalet nollställen som polynomet
$$p(z) = z^3 + az^2 + bz + c$$
har i vänstra halvplanet $\operatorname{Re} z < 0$ för alla värden på parametrarna a, b, c sådana att $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Observera att tentan endast har 5 uppgifter.

TATA45 Komplex analys 2020-03-19, lösningsskisser

1. Sätt $s = e^{iz}$. Vi får ekvationen $s^2 + (2-i)s = 3+3i$, d.v.s.

$$\left(s + \frac{2-i}{2}\right)^2 = \frac{15+8i}{4}, \quad \text{som med} \quad s + \frac{2-i}{2} = w = u+iv \quad \text{ger} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 15/4 & \text{(Re)}, \\ 2uv = 2 & \text{(Im)}, \\ u^2 + v^2 = 17/4 & \text{(Abs)}, \end{cases}$$

med lösningarna $w = \pm(4+i)/2$; därmed är $s = 1+i$ eller $s = -3$. Via $z = -i \log s$ får vi slutligen $z = (\pi/4 + 2\pi m) - i(\ln 2)/2$ eller $z = (\pi + 2\pi n) - i \ln 3$, där m och n är heltal.

<u>Svar</u>: $z = (\pi/4 + 2\pi m) - i(\ln 2)/2$ eller $z = (\pi + 2\pi n) - i \ln 3$, där $m, n \in \mathbb{Z}$.

2. Att $(-i, \infty, 4) \mapsto (0, 1, 4+i)$ ger med standardmetoder (redovisa detaljerna!) $w(z) = (z+i)/(z-3)$.

Låt C vara cirkeln $|z-9| = 3$ i z-planet och $\tilde{C}$ den $\hat{\mathbb{C}}$-cirkel i w-planet som C avbildas på under $w(z)$ ovan. Eftersom $w(3) = \infty$ och $3 \notin C$ är $\tilde{C}$ en vanlig cirkel $|w-c| = r$, där centrum $c = w(15/2) = (15+2i)/9$ eftersom 3 och 15/2 är spegelpunkter m.a.p. C och ∞ och c är spegelpunkter m.a.p. $\tilde{C}$. Vidare, $6 \in C$ ger $w(6) = (6+i)/3 \in \tilde{C}$, så $r = |(6+i)/3 - (15+2i)/9| = |(3+i)/9| = \sqrt{10}/9$, och $\tilde{C}$ är därmed cirkeln $|w - (15+2i)/9| = \sqrt{10}/9$.

Låt nu L vara linjen $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$, alltså randen till området $\Omega : \operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z$, och $\tilde{L}$ den $\hat{\mathbb{C}}$-cirkel i w-planet som L avbildas på under $w(z)$ ovan. Eftersom $3 \notin L$ är även $\tilde{L}$ en vanlig cirkel $|w-c| = r$, där centrum $c = w(3i) = (2-2i)/3$ eftersom 3 och $3i$ är spegelpunkter m.a.p. L. Vidare, $0 \in L$ ger $w(0) = -i/3 \in \tilde{L}$, så $r = |-i/3 - (2-2i)/3| = |(-2+i)/3| = \sqrt{5}/3$, och $\tilde{L}$ är därmed cirkeln $|w - (2-2i)/3| = \sqrt{5}/3$. Bilden $\tilde{\Omega}$ av området Ω är därför antingen $|w - (2-2i)/3| < \sqrt{5}/3$ eller $|w - (2-2i)/3| > \sqrt{5}/3$, och eftersom t.ex. $z = 3 \in \Omega$ och $w(3) = \infty$ är $\tilde{\Omega}$ området $|w - (2-2i)/3| > \sqrt{5}/3$.

<u>Svar</u>: $w(z) = \dfrac{z+i}{z-3}$; bilderna är $\left|w - \dfrac{15+2i}{9}\right| = \dfrac{\sqrt{10}}{9}$ respektive $\left|w - \dfrac{2-2i}{3}\right| > \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

3. Eftersom integranderna är rent reella och $\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix})$ och $\sin x = \operatorname{Im}(e^{ix})$ är

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2 - 2x + 5)^2} = \operatorname{Re} I \qquad \text{och} \qquad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{(x^2 - 2x + 5)^2} = \operatorname{Im} I$$

där

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} \, dx}{(x^2 - 2x + 5)^2}.$$

Låt $f(z) = e^{iz}/(z^2 - 2z + 5)^2 = (z-1-2i)^{-2}(z-1+2i)^{-2}e^{iz}$; då är $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt$. Låt vidare L_R vara sträckan från $z = -R$ till $z = R$ och C_R^+ halvcirkeln från $z = R$ till $z = -R$ i övre halvplanet (rita figur!). Vi observerar att $|e^{iz}| = e^{-y} \le 1$ på C_R^+ eftersom $y \ge 0$ där, så ML-uppskattning ger

$$\left| \int_{C_R^+} f(z)\, dz \right| \le \frac{1}{(R^2 - 2R - 5)^2} \cdot \pi R \to 0 \quad \text{då} \quad R \to \infty,$$

av gradskäl, så $\int_{C_R^+} f(z)\, dz \to 0$ då $R \to \infty$. Residysatsen ger, då $R > |1+2i| = \sqrt{5}$,

$$\int_{L_R + C_R^+} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=1+2i} f(z) = \Big/ f(z) = \frac{(z-1+2i)^{-2} e^{iz}}{(z-1-2i)^2} \Big/ = 2\pi i \cdot \frac{d}{dz}\big((z-1+2i)^{-2} e^{iz}\big)_{|z=1+2i}$$

$$= 2\pi i \big(-2(z-1+2i)^{-3} + i(z-1+2i)^{-2}\big) e^{iz}{}_{|z=1+2i} = \frac{3\pi}{16} e^{-2+i},$$

och genom att låta $R \to \infty$ här (observera att $\int_{L_R} f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} f(t)\, dt \to I$ då $R \to \infty$) får vi

$$I + 0 = \frac{3\pi}{16\, e^2}(\cos 1 + i \sin 1), \qquad \text{så} \qquad I_1 = \operatorname{Re} I = \frac{3\pi}{16\, e^2} \cos 1 \quad \text{och} \quad I_2 = \operatorname{Im} I = \frac{3\pi}{16\, e^2} \sin 1.$$

<u>Svar</u>: $I_1 = \dfrac{3\pi \cos 1}{16\, e^2}$, $I_2 = \dfrac{3\pi \sin 1}{16\, e^2}$.

4. Nämnaren $z\cos z = 0$ precis då $z = 0$ eller $z = \pi/2 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, och i dessa punkter är täljaren $1 + \sinh z \neq 0$. Således har f poler i alla dessa punkter men är analytisk för övrigt. Radien r för största punkterade skiva $0 < |z| < r$ där f har en Laurentserie är avståndet till närmaste pol utanför origo (från origo sett, $\pm\pi/2$ ligger närmast), så $r = \pi/2$.

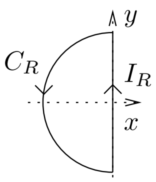
   Vi kan skriva
$$f(z) = \frac{1+\sinh z}{z\cos z} = \frac{g(z)}{z} \quad \text{med} \quad g(z) = \frac{1+\sinh z}{\cos z}.$$
   g är analytisk i origo och har därför en Maclaurinutveckling:
$$g(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \mathcal{O}(z^4).$$
   Multiplikation med $\cos z = 1 - z^2/2 + \mathcal{O}(z^4)$ och jämförelse med $1 + \sinh z = 1 + z + z^3/6 + \mathcal{O}(z^4)$ ger sambanden $c_0 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 - c_0/2 = 0$, $c_3 - c_1/2 = 1/6$, d.v.s. $c_0 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 1/2$, $c_3 = 2/3$, så
$$f(z) = \frac{g(z)}{z} = \frac{c_0}{z} + c_1 + c_2 z + c_3 z^2 + \mathcal{O}(z^3) = \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2} + \frac{2z^2}{3} + \mathcal{O}(z^3), \qquad 0 < |z| < \frac{\pi}{2}.$$
   Slutligen, $\int_{C_\rho} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 2\pi i \cdot g(0) = 2\pi i$ om $0 < \rho < \pi/2$, eftersom $z = 0$ är den enda singulariteten (tillika enkelpol) för f innanför cirkeln C_ρ.

   Svar: $f(z) = \dfrac{1}{z} + 1 + \dfrac{z}{2} + \dfrac{2z^2}{3} + \mathcal{O}(z^3)$, $0 < |z| < \dfrac{\pi}{2}$; integralen $= 2\pi i$.

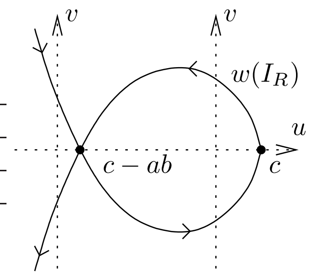
5. Vi studerar argumenttillskottet för $p(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ när z genomlöper kurvan $\Gamma_R = C_R + I_R$ (se figur nere till vänster); här är alltså $a > 0$, $b > 0$ och $c > 0$.

   Vi får genast $\Delta_{C_R} \arg p(z) = \Delta_{C_R} \arg z^3 + \Delta_{C_R} \arg(1 + a/z + b/z^2 + c/z^3) \to 3\pi + 0 = 3\pi$ då $R \to \infty$, oavsett värdena på a, b, c.

   På I_R får vi $p(z) = p(iy) = (c - ay^2) + iy(b - y^2) = u + iv$, och därmed nedanstående tabell då $y \geq 0$ (observera att u är jämn och v udda), samt kurva $w = p(z)$ då z genomlöper I_R (observera att v-axelns placering i sidled beror på tecknet på $c - ab$; dessutom är, som sagt, $c > 0$):



y	0	$<$	$\sqrt{b}$	$<$	$+\infty$
u (jämn)	c	?	$c - ab$	?	$-$
v (udda)	0	$+$	0	$-$	$-$
kvadrant/*halvplan*		*övre*		*undre*	3



   Dessutom gäller $u/v \to 0$ då $y \to \pm\infty$, av gradskäl, så $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \Delta_{I_R} \arg p(z) = \begin{cases} 3\pi, & c - ab < 0, \\ -\pi, & c - ab > 0. \end{cases}$

   Eftersom poler saknas blir antalet nollställen N i vänstra halvplanet $\operatorname{Re} z < 0$ för p därför
$$N = \begin{cases} (3\pi + 3\pi)/2\pi = 3, & c < ab, \\ (3\pi - \pi)/2\pi = 1, & c > ab, \end{cases}$$
   enligt argumentprincipen.

   I det återstående fallet, $c = ab$, har p nollställen *på* imaginäraxeln, närmare bestämt i punkterna $z = \pm i\sqrt{b}$ (se tabellen), och då är $p(z) = z^3 + az^2 + bz + ab = (z^2 + b)(z + a)$, och det tredje nollstället, alltså $z = -a$, befinner sig i vänstra halvplanet $\operatorname{Re} z < 0$.

   Svar: Tre nollställen då $c < ab$; ett då $c \geq ab$.

TATA45 Komplex analys 2020-03-19, kommentarer

1. Några påstår direkt att ekvationen $s^2 + (2-i)s = 3 + 3i$ har lösningarna $s = 1 + i$ och $s = -3$, men det måste motiveras – FULLSTÄNDIGA LÖSNINGAR KRÄVS. Likaså duger det inte att direkt skriva $\big((15+8i)/4\big)^{1/2} = \pm\big((4+i)/2\big)$, utan man måste lösa ekvationen $w^2 = (15+8i)/4$.

   Några skriver $\sqrt{(15+8i)/4}$, med eller utan $\pm$, men kvadratrot ur komplexa tal är inte definierat i TATA45.

   Några har kvar $\log(1+i)$ och $\log(-3)$, eller $\operatorname{Log}(1+i)$ och $\operatorname{Log}(-3)$, i svaret, men det duger inte utan de måste räknas ut. Dessa tal är dessutom inte reella, så svaret blir då inte skrivet i rektangulär form.

2. Notera att bilden i w-planet av halvplanet $\operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z$ i z-planet blir ett *område*, alltså en öppen och sammanhängande mängd; flera har trott att bilden bara blir en $\hat{\mathbb{C}}$-cirkel (FEL). Däremot blir bilden av *randen*, alltså bilden av linjen $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$, en $\hat{\mathbb{C}}$-cirkel, faktiskt en vanlig cirkel i detta fall.

3. Integralerna är reella, så icke-reella svar är orimliga.

   Flera gör fel i ML-uppskattningen, typiskt $|z^2 - 2z + 5| \geq R^2 - 2R + 5$ (FEL) i stället för det korrekta $|z^2 - 2z + 5| \geq R^2 - 2R - 5$, eller $|z^2 - 2z + 5| \geq R^2 - \sqrt{5}$ (FEL) i stället för det korrekta $|z^2 - 2z + 5| \geq (R - \sqrt{5})^2$, det senare då ju $z^2 - 2z + 5 = (z - 1 + 2i)(z - 1 - 2i)$ och $|z - (1 \pm 2i)| \geq R - \sqrt{5}$, alltsammans då $|z| = R$ (och R är tillräckligt stort, så att alla högerled är positiva).

4. Flera gör en ansats av typen $f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \mathcal{O}(z^3)$ (FEL); eftersom f är singulär i origo kan f inte ha en *Maclaurin*utveckling.

   Några slarvar med $\mathcal{O}$-termerna, eller tappar dem helt, vilket naturligtvis blir FEL, på samma sätt som i Envariabelanalys 2.

5. Alternativt går det bra att faktorisera både u och v, liksom det går bra att inte utnyttja att u är jämn och v är udda utan i stället ta med alla $y \in \mathbb{R}$ i tabellen.

   Många – de allra flesta som lämnat in, faktiskt – behandlar inte fallet $c = ab$ alls, oklart varför. Det är just detta fall som är det lite luriga, i och med att kurvan i w-planet då går *genom* origo så att argumenttillskottet för $p(z)$ längs imaginäraxeln blir odefinierat. Polynomet $p(z)$ har nollställen *på* imaginäraxeln i detta fall, och separat undersökning krävs, se lösningsskissen.

   De flesta av dem som har beaktat fallet $c = ab$ har trott att argumenttillskottet för $p(z)$ längs imaginäraxeln blir något, i regel 3π eller $-\pi$ (FEL). Någon konstaterade att argumenttillskottet blir odefinierat, vilket alltså är rätt, men trodde att det medförde att antalet nollställen för $p(z)$ i $\operatorname{Re} z < 0$ blir odefinierat (PRINCIPFEL); självklart har ett tredjegradspolynom antingen 0, 1, 2 eller 3 nollställen, i vilken mängd som helst.

Lars Alexandersson, 2 april 2020