Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA45
Modul: TEN1

Tentamen i Komplex analys (TATA45)

2020-08-27 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Fullständiga lösningar krävs. Varje uppgift ger 0–3 poäng, och för betyg 3/4/5 räcker 8/11/14 poäng och 3/4/5 uppgifter bedömda med minst 2 poäng vardera. Lösningsskisser publiceras på kurshemsidan preliminärt kl 21.00.

1. Beräkna integralen
$$\int_C \frac{\cos z}{z^2(e^z+1)}\,dz$$
där C är cirkeln $|z+2i|=3$ tagen ett varv i positiv led.

2. Laurentserieutveckla funktionen
$$\frac{z-4i}{z^2-2iz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z+1)^n$$
i största möjliga område som innehåller punkten $z=i$.

3. Bestäm antalet nollställen som polynomet
$$p(z) = z^3 + iz^2 + 2iz + 1$$
har i andra kvadranten $\operatorname{Re} z < 0$, $\operatorname{Im} z > 0$.

4. (a) Bestäm en Möbiusavbildning $w(z)$ som avbildar området $0 < \operatorname{Arg} z < \pi/2$ (alltså första kvadranten) på halvcirkelskivan $|w| < 1$, $\operatorname{Im} w > 0$.
   (b) Finns det någon Möbiusavbildning som avbildar området $0 < \operatorname{Arg} z < \pi/4$ (alltså ett åttondels plan) på halvcirkelskivan $|w| < 1$, $\operatorname{Im} w > 0$? Bestäm en sådan, eller bevisa att ingen sådan finns!

5. Låt Ω vara komplexa planet $\mathbb{C}$ med positiva realaxeln borttagen. Bestäm en gren $f(z)$ till
$$z^{1/3}$$
i Ω sådan att $f(-1) = -1$. Beräkna sedan $f'(i)$ samt gränsvärdet av $f(z)$ då $z \to 8$ dels från ovan ($\operatorname{Im} z > 0$), dels från nedan ($\operatorname{Im} z < 0$), samtliga i rektangulär form, d.v.s. i formen $a+ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.

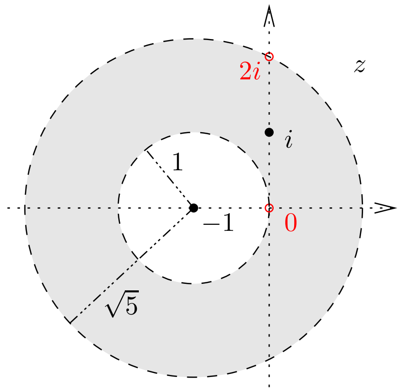
6. Som bekant säger Jordans lemma att
$$\int_{C_R^+} |e^{iaz}|\,|dz| \le \frac{\pi}{a}, \qquad a > 0,\ R > 0,$$
där C_R^+ som vanligt är halvcirkeln från R till $-R$ i övre halvplanet. Härled en motsvarande olikhet om vi ersätter C_R^+ med Γ_R, som består av de tre sträckorna $[R, R+iR]$, $[R+iR, -R+iR]$ och $[-R+iR, -R]$ och som alltså utgör tre sidor i rektangeln med hörn $\pm R$ och $\pm R + iR$.

7. Antag att f är analytisk i en omgivning till den slutna cirkelskivan $|z| \le 1$ och att $|f| \le A$ på halvcirkeln $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \ge 0$, och $|f| \le B$ på halvcirkeln $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \le 0$. Visa att $|f(0)| \le \sqrt{AB}$.

TATA45 Komplex analys 2020-08-27, lösningsskisser

1. Låt
$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2(e^z+1)}.$$
f är analytisk utom i punkterna $z=0$ och $z=\log(-1)=i\pi+i2n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$. Innanför $C:\ |z+2i|=3$ finns därmed singulariteterna $z=0$ och $z=-i\pi$. Residysatsen och sedvanlig residyberäkning ger
$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= 2\pi i\big(\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-i\pi} f(z)\big) = 2\pi i\left(\frac{d}{dz}\Big(\frac{\cos z}{e^z+1}\Big)\Big|_{z=0} + \frac{(\cos z)/z^2}{\frac{d}{dz}(e^z+1)}\Big|_{z=-i\pi}\right)\\ &= 2\pi i\left(\frac{(-\sin z)(e^z+1)-(\cos z)e^z}{(e^z+1)^2}\Big|_{z=0} + \frac{(\cos z)/z^2}{e^z}\Big|_{z=-i\pi}\right)\\ &= 2\pi i\left(-\frac{1}{4}+\frac{\cosh\pi}{\pi^2}\right) = \underline{\underline{i\left(\frac{2\cosh\pi}{\pi}-\frac{\pi}{2}\right)}}.\end{aligned}$$

2. Faktorisering av nämnaren och partialbråksuppdelning ger
$$f(z) = \frac{z-4i}{z^2-2iz} = \frac{z-4i}{z(z-2i)} = \frac{2}{z} - \frac{1}{z-2i}.$$
$f(z)$ är analytisk förutom i punkterna $z=0$ och $z=2i$, som har avstånd 1 respektive $\sqrt{5}$ till punkten $z=-1$, så konvergensområdena med centrum i $z=-1$ för Laurentserierna till $f(z)$ är $|z+1|<1$, $1<|z+1|<\sqrt{5}$ och $|z+1|>\sqrt{5}$. Eftersom serien ska konvergera i punkten $z=i$, som har avstånd $\sqrt{2}$ till punkten -1, inser vi att rätt konvergensområde är $1<|z+1|<\sqrt{5}$.



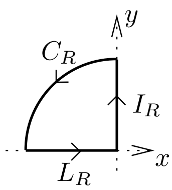
Med bytet $w=z+1$ får vi nu, med geometriska serier $1/(1-q)=\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ för $|q|<1$, att
$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2}{w-1} - \frac{1}{w-(1+2i)} = \frac{2}{w}\cdot\frac{1}{1-1/w} + \frac{1}{1+2i}\cdot\frac{1}{1-w/(1+2i)}\\ &= \Big/\,1<|w|<\sqrt{5}\,\Big/ = \frac{2}{w}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{w}\Big)^n + \frac{1}{1+2i}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{w}{1+2i}\Big)^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{w^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{(1+2i)^{n+1}} = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(z+1)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{(1+2i)^{n+1}},\quad 1<|z+1|<\sqrt{5}.}}\end{aligned}$$

3. Studera argumenttillskottet för $p(z)=z^3+iz^2+2iz+1$ när z genomlöper konturen $C_R+L_R+I_R$ (se figur nedan). Vi får att $\Delta_{C_R}\arg p(z) = \Delta_{C_R}\arg z^3 + \Delta_{C_R}\arg\big(1+i/z+2i/z^2+1/z^3\big) \to 3\cdot\pi/2+0=3\pi/2$ då $R\to\infty$.

På L_R är $p(z)=p(x)=(x^3+1)+i\,x(x+2)=u+iv$, där $x:-R\to 0$, och $v/u\to 0$ då $x\to-\infty$ av gradskäl, så u drar mer än v.

På I_R är $p(z)=p(iy)=(1-2y)+iy^2(-y-1)=u+iv$, där $y:0\to R$, och $u/v\to 0$ då $y\to+\infty$ av gradskäl, så v drar mer än u.

Vi får därför nedanstående teckentabeller och kurva $w=p(z)$ när z genomlöper L_R+I_R:

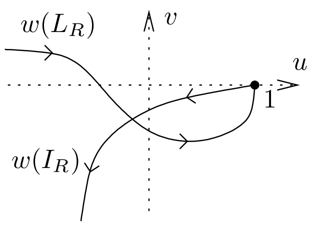


L_R:

x	$<$	-2	$<$	-1	$<$	0
u	$-$	$-$	$-$	0	$+$	1
v	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0

I_R:

y	0	$<$	$1/2$	$<$
u	1	$+$	0	$-$
v	0	$-$	$-$	$-$



Från figuren ovan till höger ser vi att $\Delta_{L_R+I_R} \arg p(z) \to \pi/2$ då $R \to \infty$, och eftersom poler saknas medför argumentprincipen att antalet nollställen för $p(z)$ i andra kvadranten är $(1/2\pi) \lim_{R\to\infty} \Delta_{C_R+L_R+I_R} \arg p(z) = (3\pi/2 + \pi/2)/2\pi = 1$. Svar: Ett.

4. (a) Eftersom Möbiusavbildningar är konforma i hela $\hat{\mathbb{C}}$ måste den räta vinkeln vid $z = 0$ avbildas på någon av de räta vinklarna vid $w = -1$ eller $w = 1$ (rita figur!); vi väljer $w = -1$. Som en konsekvens måste därefter $z = \infty$ avbildas på $w = 1$, eftersom randstrålarnas gemensamma punkter i z-planet är $z = 0$ och $z = \infty$, och randhalvcirkelns och randsträckans gemensamma punker i w-planet är $w = -1$ och $w = 1$. Om vi kompletterar med att $z = 1$ avbildas på $w = 0$ får vi med standardmetoder (som ska redovisas!) $w = (z-1)/(z+1)$.

   Att denna avbildar rätt kan vi t.ex. se på följande sätt: Linjen genom $(0, 1, \infty)$ i z-planet avbildas på en $\hat{\mathbb{C}}$-cirkel genom $(-1, 0, 1)$ i w-planet, alltså realaxeln, eftersom tre olika $\hat{\mathbb{C}}$-punkter bestämmer en $\hat{\mathbb{C}}$-cirkel entydigt; vi ser också att positiva realaxeln avbildas på sträckan från $w = -1$ via $w = 0$ till $w = 1$. Vidare, eftersom $w(i) = i$ inser vi att linjen genom $(\infty, i, 0)$ i z-planet avbildas på en $\hat{\mathbb{C}}$-cirkel genom $(1, i, -1)$, alltså enhetscirkeln $|w| = 1$, och positiva imaginäraxeln avbildas på övre halvan av $|w| = 1$. Slutligen ser vi att en inre punkt, t.ex. $z = 1 + i$, avbildas på $w(1 + i) = (1 + 2i)/5$, som är en inre punkt i halvcirkelskivan.

   (b) Någon sådan *Möbiusavbildning* finns inte, eftersom randstrålarnas skärningsvinkel vid $z = 0$ i z-planet nu är $\pi/4$ medan skärningsvinklarna mellan randhalvcirkeln och randsträckan i w-planet är $\pi/2$.

   Svar: (a) T.ex. $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ (b) Någon sådan finns inte.

5. Alla grenar till $\log z$ i Ω kan skrivas $L_n(z) = \ln|z| + i(\theta(z) + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$, där $\theta(z)$ är ett kontinuerligt varierande argument för z i Ω och $0 < \theta(z) < 2\pi$. Därför blir de tre grenarna till $z^{1/3}$ i Ω

$$f_n(z) = e^{L_n(z)/3} = e^{(\ln|z| + i\,\theta(z))/3} \cdot e^{2\pi i n/3}, \qquad n = 0, 1, 2.$$

Kravet $f_n(-1) = -1$ ger, eftersom $\theta(-1) = \pi$,

$$-1 = e^{i\pi/3} \cdot e^{2\pi i n/3},$$

vilket, eftersom $n \in \{0, 1, 2\}$, ger $n = 1$. Alltså är den sökta grenen

$$f(z) = f_1(z) = \widetilde{z^{1/3}} = \exp\Big(\big(\ln|z| + i(\theta(z) + 2\pi)\big)/3\Big), \qquad z \in \Omega,$$

där $0 < \theta(z) < 2\pi$.

Derivering och insättning av $z = i$ ger, eftersom $\theta(i) = \pi/2$,

$$f'(i) = \frac{1}{3}\widetilde{z^{-2/3}}\Big|_{z=i} = \frac{1}{3}\exp\Big(-2\big(i(\pi/2 + 2\pi)\big)/3\Big) = \frac{e^{-i5\pi/3}}{3} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{6}.$$

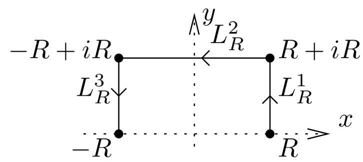
Slutligen, då $z \to 8$ från ovan respektive nedan ser vi att $\theta(z) \to 0$ respektive $\theta(z) \to 2\pi$, så

$$f(z) \to \begin{cases} \exp\Big(\big(\ln 8 + i(0 + 2\pi)\big)/3\Big) = 2\,e^{i2\pi/3} = -1 + i\sqrt{3} & \text{då } z \to 8 \text{ från ovan,} \\ \exp\Big(\big(\ln 8 + i(2\pi + 2\pi)\big)/3\Big) = 2\,e^{i4\pi/3} = -1 - i\sqrt{3} & \text{då } z \to 8 \text{ från nedan.} \end{cases}$$

Svar: $f(z) = \exp\Big(\big(\ln|z| + i(\theta(z) + 2\pi)\big)/3\Big)$, där $0 < \theta(z) < 2\pi$;
$f'(i) = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{6}$;
$f(z) \to -1 + i\sqrt{3}$ då $z \to 8$ från ovan och $f(z) \to -1 - i\sqrt{3}$ då $z \to 8$ från nedan.

6. Notera först att $|e^{iaz}| = e^{-ay}$. Vi parametriserar sedan delsträckorna i Γ_R:

$$\begin{cases} L_R^1: & z = R + it,\ t: 0 \to R;\ |e^{iaz}| = e^{-at},\ |dz| = dt, \\ L_R^2: & z = t + iR,\ t: R \to -R;\ |e^{iaz}| = e^{-aR},\ |dz| = -dt, \\ L_R^3: & z = -R + it,\ t: R \to 0;\ |e^{iaz}| = e^{-at},\ |dz| = -dt, \end{cases}$$



(observera att t avtar på de två sista sträckorna, varför $dt < 0$ där).

Vi får därför, om $a > 0$ och $R > 0$,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_R} |e^{iaz}|\,|dz| &= \int_{L_R^1} |e^{iaz}|\,|dz| + \int_{L_R^2} |e^{iaz}|\,|dz| + \int_{L_R^3} |e^{iaz}|\,|dz| \\ &= \int_0^R e^{-at}\,dt + \int_R^{-R} e^{-aR}\,(-dt) + \int_R^0 e^{-at}\,(-dt) \\ &= \frac{1-e^{-aR}}{a} + 2R\,e^{-aR} + \frac{1-e^{-aR}}{a} = \Big/ \text{Sätt } s = aR \Big/ \\ &= \frac{2}{a}\cdot(1 - e^{-s} + s\,e^{-s}) \le \frac{2(1+e^{-2})}{a},\end{aligned}$$

där det sista steget beror på att funktionen $f(s) = 1 - e^{-s} + s\,e^{-s}$, $s > 0$, antar ett största värde $f(2) = 1 + e^{-2}$ (Envariabelanalys 1; detaljerna måste redovisas!).

Svar: Man får en likadan olikhet, men med π ersatt av $2(1 + e^{-2})$.

7. Sätt

$$g(z) = f(z)f(-z).$$

Då är g analytisk i en omgivning till $|z| \le 1$. Vidare, då $|z| = 1$ och $\operatorname{Im} z \ge 0$ är $|f(z)| \le A$ och $|f(-z)| \le B$, och då $|z| = 1$ och $\operatorname{Im} z \le 0$ är $|f(z)| \le B$ och $|f(-z)| \le A$. Alltså är

$$|g(z)| \le AB, \qquad |z| = 1,$$

så Maximumprincipen i begränsade områden medför att $|g(0)| \le AB$. Men $|g(0)| = |f(0)f(-0)| = |f(0)|^2$, så

$$|f(0)| = \sqrt{|g(0)|} \le \sqrt{AB},$$

vilket skulle bevisas.

TATA45 Komplex analys 2020-08-27, kommentarer

1. Flera tror att
$$\int_C \frac{\cos z}{z^2(e^z+1)}\,dz = \operatorname{Re}\int_C \frac{e^{iz}}{z^2(e^z+1)}\,dz \qquad \text{(FEL)},$$
sannolikt för att man tror att $\cos z = \operatorname{Re}(e^{iz})$ (FEL; notera att $e^{iz} = e^{-y}\cos x + i\,e^{-y}\sin x$, så $\operatorname{Re}(e^{iz}) = e^{-y}\cos x$), och även om det hade varit sant följer inte ovanstående likhet eftersom resten av integranden är komplexvärd och integrationsvariabeln z är komplex.

   Några tror att $e^z+1=0$ saknar lösningar (FEL), andra att endast $z=i\pi$ löser ekvationen (FEL), och åter andra får visserligen rätt uttryck, $z = i\pi + i2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, för lösningarna men får ändå inte med $z=-i\pi$ innanför C; kanske tror de att n måste vara ≥ 0 eller rent av > 0 (båda FEL).

   Många gör fel vid residyberäkningen i $z=-i\pi$, typiskt
$$\operatorname*{Res}_{z=-i\pi} \frac{\cos z}{z^2(e^z+1)} = \frac{\cos z}{z^2}\Big|_{z=-i\pi} \qquad \text{(FEL)},$$
som om man bara kunde stryka den ”farliga” faktorn (e^z+1).

2. Väldigt många har utvecklat funktionen i potenser av z (FEL) i stället för i potenser av $(z+1)$, vilket var högst oväntat eftersom den önskade formen på serien står i uppgiften:
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z+1)^n.$$

3. Det går bra att undersöka argumenttillskotten längs L_R och I_R i två separata figurer, och man får
$$\Delta_{L_R}\arg p(z) \to \pi \qquad \text{och} \qquad \Delta_{I_R}\arg p(z) \to -\pi/2.$$

4. (a) Alla Möbiusavbildningar $w(z)$ som löser uppgiften kan skrivas
$$w = \frac{z-a}{z+a},\quad a>0, \qquad \text{och} \qquad w = \frac{ia-z}{ia+z},\quad a>0,$$
men det räcker alltså att bestämma en.

   Flera har – korrekt – låtit $w(0)=-1$ och $w(\infty)=1$ (eller omvänt), men har kompletterat dessa med att låta någon inre punkt avbildas på någon inre punkt, typiskt $w(1+i)=i/2$. Det finns ingen anledning att tro att den så erhållna avbildningen $w(z)$ skulle avbilda rätt – med ovanstående val gör den inte heller det – och även om man skulle ha turen att råka pricka rätt med de inre punkterna måste man i så fall bevisa att $w(z)$ avbildar rätt.

   (b) Några har konstruerat en Möbius $w(z)$ och visat att *den* inte avbildar rätt, men det bevisar ju inte att en Möbius som avbildar rätt inte finns.

5. Det går också bra att skriva $L(z) = \ln|z| + i\,\theta(z)$ och $f(z) = e^{L(z)/3}$, och sedan välja $\theta(-1)$ så att kravet $f(-1)=-1$ blir uppfyllt. Ett sådant val är $\theta(-1)=3\pi$, vilket ju är ett av värdena på $\arg(-1)$, och när detta val är gjort blir $\theta(z)$ entydigt bestämt i Ω: vi kan nu skriva $2\pi < \theta(z) < 4\pi$, och
$$f(z) = \exp\Big(\big(\ln|z| + i\,\theta(z)\big)/3\Big), \qquad 2\pi < \theta(z) < 4\pi.$$
Sedan fortsätter man som i lösningsskissen, nu med $\theta(i) = 5\pi/2$ och $\theta(z) \to 2\pi$ respektive 4π då $z \to 8$ från ovan respektive från nedan.

6. Inget att kommentera.

7. Det är relativt lätt att bevisa den svagare olikheten $|f(0)| \leq (A+B)/2$ med hjälp av medelvärdesegenskapen, men den efterfrågade bättre olikheten $|f(0)| \leq \sqrt{AB}$ är svårare att bevisa.

Lars Alexandersson, 1 september 2020