Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA45
Modul: TEN1

Distanstentamen i Komplex analys (TATA45)

2021-01-16 kl 14.00-19.00

flowID = 0

Observera att andra regler än normalt gäller. Följ instruktionerna noggrant.

- Alla hjälpmedel är tillåtna, men tentamen ska skrivas enskilt.

  Att samarbeta med, ta hjälp av eller hjälpa andra personer är förbjudet.

- Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt **handskrivna** – om inte särskilda skäl såsom funktionshinder föreligger – och avslutade med ett svar. (Det är också tillåtet att skriva för hand med ritpenna på ritplatta eller surfplatta, men endast handskriven text och mot **vit bakgrund**.)

  Uträkningar ska redovisas lika noga och fullständigt som vid en salstentamen.

  Det får alltså inte synas i lösningarna att man har haft tillgång till hjälpmedel. Att bara skriva upp icke-triviala resultat utan härledning (exempelvis samband och formler, derivator, värden på integraler, lösningar av ekvationer, termer i serieutvecklingar m.m.) ger i regel poängavdrag; detta gäller även om man verifierar resultaten i efterhand. Standardresultat är så klart undantagna från detta krav.

- Använd inte rödpenna. Lös högst en uppgift per sida (deluppgifter får dock redovisas på samma sida). Numrera sidorna, sorterade i uppgiftsordning.

Under skrivtiden

- Kontrollera att denna lapps flowID (0) stämmer med det flowID du har fått.

  Om inte, kontakta examinator omgående (se jour nedan).

- **Jour:** `http://courses.mai.liu.se/GU/TATA45/jour.php`

Vid inlämningen

- Märk **varje** blad med TATA45, 2021-01-16, sidnummer och flowID (0).

- Kontrollera innan uppladdning att sidorna i din pdf-fil är så pass tydliga att text och symboler går att läsa (annars kan vi inte rätta tentan).

Var god vänd!

Distanstentamen i Komplex analys (TATA45), 2021-01-16 kl 14.00-19.00

Varje uppgift ger 0–3 poäng, och för betyg 3/4/5 räcker 8/11/14 poäng och 3/4/5 uppgifter bedömda med minst 2 poäng vardera. Lösningsskisser publiceras på kurshemsidan tidigast på måndag 18/1.

$$\text{flowID} = 0$$

1. Beräkna
$$\int_C \frac{e^{\pi z}\,dz}{\left(z^2+(-3-5i)z+(-4+7i)\right)^2}$$
där C är cirkeln $|z|=3$ tagen ett varv moturs. Svara i förenklad rektangulär form, alltså i formen $a+ib$, där $a,b\in\mathbb{R}$.

2. Bestäm en Möbiusavbildning $w(z)$ som avbildar punkterna $z_1=-1$, $z_2=4$ och $z_3=0$ på i tur och ordning $w_1=\infty$, $w_2=i$ och $w_3=2$. Bestäm sedan bilderna i w-planet av imaginäraxeln $\operatorname{Re} z=0$ och cirkelskivan $|z-1|<1$ i z-planet.

3. Bestäm antalet nollställen som funktionen
$$f(z)=e^z-8z^3+13z^2+iz$$
har i ringen $1<|z|<2$.

4. (a) Bestäm alla värden på $(\sqrt{3}+i)^i$. Svara i rektangulär form.

   (b) Låt
   $$u(x,y)=5x+2y+3xy+4\,e^x\cos y.$$
   Finns det någon reellvärd funktion $v(x,y)$ sådan att $f=u+iv$ är analytisk i hela planet? Bestäm i så fall en sådan funktion $v(x,y)$.

   (c) Beräkna maximum av
   $$|i+3\sin z|^2$$
   på den slutna rektangelytan $-\pi/2\le x\le\pi/2$, $0\le y\le\ln 2$. Du behöver inte ange i vilka punkter maximum antas.

5. Visa att
$$\int_0^\infty \frac{2x^2+4}{\cosh^4(x/3)}\,dx = 3\pi^2-10$$
genom att integrera längs en lämpligt vald rektangel.

Observera att tentamen endast innehåller fem uppgifter.

TATA45 Komplex analys 2021-01-16, lösningsskisser

1. Sätt
$$f(z) = \frac{e^{\pi z}}{\big(z^2 + (-3-5i)z + (-4+7i)\big)^2}; \qquad \text{vi söker} \quad \int_C f(z)\,dz.$$

   f är analytisk utom där
$$0 = z^2 + (-3-5i)z + (-4+7i) = \left(z - \frac{3+5i}{2}\right)^2 - \left(\frac{3+5i}{2}\right)^2 - 4 + 7i = \left(z - \frac{3+5i}{2}\right)^2 - \frac{i}{2}.$$

   Med $z - (3+5i)/2 = w = u + iv$ får vi $w^2 = i/2$, som ger ekvationssystemet $u^2 - v^2 = 0$ (Re), $2uv = 1/2$ (Im) och $u^2 + v^2 = 1/2$ (Abs), vilket i sin tur ger $u^2 = 1/4$, $v^2 = 1/4$ och att u och v har samma tecken. Alltså: $w = u + iv = \pm(1+i)/2$, så $z = w + (3+5i)/2$ ger de två rötterna $z_1 = 1 + 2i$ (innanför C) och $z_2 = 2 + 3i$ (utanför C).

   Residysatsen ger nu (notera att $z_1 - z_2 = -1 - i$, så $(z_1 - z_2)^2 = 2i$ och $(z_1 - z_2)^3 = 2 - 2i$)
$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} \frac{e^{\pi z}(z-z_2)^{-2}}{(z-z_1)^2} = 2\pi i \cdot \frac{d}{dz}\big(e^{\pi z}(z-z_2)^{-2}\big)\Big|_{z=z_1} \\ &= 2\pi i\, e^{\pi z_1}\big(\pi(z_1-z_2)^{-2} - 2(z_1-z_2)^{-3}\big) = 2\pi i\, e^{\pi} e^{i2\pi}\left(\frac{\pi}{2i} - \frac{2}{2-2i}\right) \\ &= \pi\, e^{\pi}(\pi + 1 - i).\end{aligned}$$

   <u>Svar</u>: $\pi\, e^{\pi}(\pi + 1 - i)$.

2. Att $(-1, 4, 0) \mapsto (\infty, i, 2)$ ger med standardmetoder (t.ex. via ansatsen $(w-2)/1 = k(z-0)/(z+1)$, redovisa detaljerna!)
$$w(z) = \frac{8 + (5i-2)z}{4(z+1)}.$$

   Låt L vara linjen $\operatorname{Re} z = 0$, alltså imaginäraxeln, och C cirkel*kurvan* $|z-1| = 1$. Möbiusavbildningar avbildar $\hat{\mathbb{C}}$-cirklar på $\hat{\mathbb{C}}$-cirklar, är konforma, och bevarar spegelpunkter. Vi noterar först att $z_\infty = -1$ är den punkt som avbildas på $w = \infty$, och att $z_\infty \notin L$ och $z_\infty \notin C$; således avbildas L och C på vanliga $\mathbb{C}$-cirklar $\tilde{L}$ respektive $\tilde{C}$, på formen $|w - c| = r$.

   Spegelpunkten till $z = z_\infty = -1$ m.a.p. L är $z = 1$, och därmed har cirkeln $\tilde{L}$ medelpunkt $c = w(1) = (6+5i)/8$, och eftersom t.ex. $0 \in L$ och därmed $w(0) = 2 \in \tilde{L}$ har den radie $r = |2 - (6+5i)/8| = |(10-5i)/8| = 5\sqrt{5}/8$; $\tilde{L}$ är alltså cirkeln $|w - (6+5i)/8| = 5\sqrt{5}/8$.

   Spegelpunkten till $z = z_\infty = -1$ m.a.p. C är $z = 1/2$ (förklara i figur!), så cirkeln $\tilde{C}$ har centrum $c = w(1/2) = (14+5i)/12$, och eftersom t.ex. $0 \in C$ och därmed $w(0) = 2 \in \tilde{C}$ har den radie $r = |2 - (14+5i)/12| = |(10-5i)/12| = 5\sqrt{5}/12$; $\tilde{C}$ är alltså cirkeln $|w - (14+5i)/12| = 5\sqrt{5}/12$. Bilden av cirkel*skivan* $|z-1| < 1$ är antingen punkterna innanför eller utanför $\tilde{C}$, och eftersom t.ex. $z = -1$ inte ligger i skivan och $w(-1) = \infty$ ligger utanför $\tilde{C}$ blir bilden $|w - (14+5i)/12| < 5\sqrt{5}/12$.

   <u>Svar</u>: $w(z) = \dfrac{8 + (5i-2)z}{4(z+1)}$; bilderna blir $\left|w - \dfrac{6+5i}{8}\right| = \dfrac{5}{8}\sqrt{5}$ respektive $\left|w - \dfrac{14+5i}{12}\right| < \dfrac{5}{12}\sqrt{5}$.

3. På cirkeln $|z| = 2$ skriver vi $f(z) = g(z) + h(z)$ med
$$g(z) = -8z^3 \quad \text{och} \quad h(z) = e^z + 13z^2 + iz.$$

   Eftersom $|g(z)| = 8|z|^3 = 64$ och $|h(z)| = |e^z + 13z^2 + iz| \leq |e^z| + 13|z|^2 + |i||z| = e^x + 52 + 2 \leq e^2 + 54 < 3^2 + 54 = 63$ där ser vi att $|g(z)| > |h(z)|$ för alla punkter på cirkeln $|z| = 2$. Rouchés sats medför att $g(z) + h(z)$, alltså $f(z)$, har lika många nollställen i $|z| < 2$ som $g(z)$, d.v.s. 3.

   På cirkeln $|z| = 1$ skriver vi $f(z) = g(z) + h(z)$ på ett annat sätt:
$$g(z) = 13z^2 \quad \text{och} \quad h(z) = e^z - 8z^3 + iz.$$

   På denna mindre cirkel är $|g(z)| = 13|z|^2 = 13$ medan $|h(z)| = |e^z - 8z^3 + iz| \leq e^x + 8|z|^3 + |i||z| \leq e^1 + 8 + 1 < 3 + 9 = 12$, så Rouché ger att $f(z)$ har lika många nollställen i $|z| \leq 1$ som $g(z)$, d.v.s. 2 (inga nollställen finns *på* cirkeln $|z| = 1$).

   Sammantaget har $f(z)$ således $3 - 2 = 1$ nollställe i $1 < |z| < 2$. <u>Svar</u>: Ett.

4. (a) Vi får genast, från definitionen av z^c,

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{3}+i)^i &= \exp\bigl(i\log(\sqrt{3}+i)\bigr) = \exp\bigl(i(\ln 2 + i\pi/6 + i2\pi n)\bigr) \\
&= e^{-\pi/6-2\pi n} e^{i\ln 2} = e^{-\pi/6-2\pi n}\bigl(\cos(\ln 2) + i\sin(\ln 2)\bigr), \quad n\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

(b) Eftersom $u'_x = 5+3y+4\,e^x\cos y$, $u''_{xx} = 4\,e^x\cos y$, $u'_y = 2+3x-4\,e^x\sin y$, $u''_{yy} = -4\,e^x\cos y$ ser vi att $\Delta u = u''_{xx}+u''_{yy} = 0$, d.v.s. att u är harmonisk, vilket är nödvändigt för existens av v.

Cauchy-Riemanns ekvationer ger först $u'_x = v'_y$, som integrerad m.a.p. y ger $v = 5y+3y^2/2+4\,e^x\sin y+\varphi(x)$, där φ är en reellvärd funktion av en reell variabel. Derivering m.a.p. x och insättning i $u'_y = -v'_x$ ger sedan $\varphi'(x) = -2-3x$, alltså $\varphi(x) = -2x-3x^2/2+A$, där A är en reell konstant. Således blir $v(x,y) = -2x+5y-3x^2/2+3y^2/2+4\,e^x\sin y+A$, $A\in\mathbb{R}$, och eftersom vi endast söker *en* funktion v kan vi t.ex. ta $A=0$.

Svar: $v(x,y) = -2x+5y-3x^2/2+3y^2/2+4\,e^x\sin y$.

(c) Sätt $f(z) = i+3\sin z$. Eftersom f är hel analytisk uppfyller den speciellt maximumprincipen på den kompakta mängden

$$K = \{(x,y) : -\pi/2 \le x \le \pi/2,\ 0\le y\le \ln 2\},$$

varför $\max_K |f|$, och därmed $\max_K |f|^2$, antas på randen ∂K, som består av fyra sträckor.

Vi får $\sin(x+iy) = \sin x\cos(iy)+\cos x\sin(iy) = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$, varför

$$|i+3\sin z|^2 = (3\sin x\cosh y)^2 + (3\cos x\sinh y+1)^2.$$

Notera för fortsättningen att $\cosh 0 = 1$, $\cosh(\ln 2) = (2+1/2)/2 = 5/4$, $\sinh 0 = 0$ och $\sinh(\ln 2) = (2-1/2)/2 = 3/4$.

På de lodräta sträckorna, där $x = \pm\pi/2$, $0\le y\le\ln 2$, får vi

$$|i+3\sin z|^2 = 9\cosh^2 y + 1,$$

som antar sitt maximum $9\cdot(5/4)^2+1 = 241/16$ då $y = \ln 2$, eftersom $\cosh^2 y$ är strängt växande på $[0,\ln 2]$.

På den nedre vågräta sträckan, där $y=0$ och $-\pi/2\le x\le\pi/2$, får vi

$$|i+3\sin z|^2 = 9\sin^2 x + 1,$$

som antar sitt maximum 10 då $x = \pm\pi/2$.

På den övre vågräta sträckan, slutligen, där $y = \ln 2$ och $-\pi/2\le x\le\pi/2$, får vi, med trigonometriska ettan, bytet $t = \cos x$ och kvadratkomplettering

$$|i+3\sin z|^2 = \bigl(\frac{15}{4}\sin x\bigr)^2 + \bigl(\frac{9}{4}\cos x+1\bigr)^2 = \frac{241}{16} - 9t^2 + \frac{9t}{2} = \frac{125}{8} - 9\bigl(t-\frac{1}{4}\bigr)^2$$

som antar sitt maximum $125/8$ då $t = 1/4$, vilket är ett tillåtet värde på t eftersom $t = \cos x$ och $-\pi/2\le x\le\pi/2$ medför att t antar alla värden $0\le t\le 1$.

Jämförelse ger att maximala värdet är $125/8$ (som antas i punkterna $\pm\arccos(1/4)+i\ln 2$).

Svar: $\dfrac{125}{8}$.

5. Vi noterar först att integranden är jämn. För att få renare räkningar gör vi sedan bytet $t = x/3$ och får

$$I = \int_0^\infty \frac{2x^2+4}{\cosh^4(x/3)}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{2x^2+4}{\cosh^4(x/3)}\,dx = 27\underbrace{\int_{-\infty}^\infty \frac{t^2}{\cosh^4 t}\,dt}_{J_2} + 6\underbrace{\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\cosh^4 t}\,dt}_{J_0}.$$

Det återstår nu att beräkna J_2 och J_0.

Vi ska integrera längs en rektangel Γ_R, lämpligen med hörn $\pm R$ och $\pm R + ib$ för något $b > 0$ som vi ska välja inom kort. Med tanke på integralerna J_2 och J_0 sätter vi

$$f_n(z) = \frac{z^n}{\cosh^4 z}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Parametriseringarna $z = t$, $t : -R \to R$ av den nedre sträckan L_R^1 och $z = t + ib$, $t : R \to -R$, av den övre sträckan L_R^2 ger

$$\begin{aligned}\int_{L_R^1} f_n(z)\,dz + \int_{L_R^2} f_n(z)\,dz &= \int_{-R}^{R} \frac{t^n}{\cosh^4 t}\,dt - \int_{-R}^{R} \frac{(t+ib)^n}{\cosh^4(t+ib)}\,dt \\ &= \Big/ \text{med } b = \pi, \text{ se nedan} \Big/ = \int_{-R}^{R} \frac{t^n - (t+i\pi)^n}{\cosh^4 t}\,dt,\end{aligned}$$

där vi valde $b = \pi$ eftersom $\cosh(t + i\pi) = (e^t e^{i\pi} + e^{-t}e^{-i\pi})/2 = (-e^t - e^{-t})/2 = -\cosh t$ och därmed $\cosh^4(t + i\pi) = \cosh^4 t$.

Med $n = 1$ får vi

$$\int_{L_R^1 + L_R^2} f_1(z)\,dz = -i\pi \int_{-R}^{R} \frac{1}{\cosh^4 t}\,dt \to -i\pi J_0, \qquad R \to \infty,$$

och med $n = 3$ får vi, eftersom $t/\cosh^4 t$ är udda,

$$\begin{aligned}\int_{L_R^1 + L_R^2} f_3(z)\,dz &= \int_{-R}^{R} \frac{-i3\pi t^2 + 3\pi^2 t + i\pi^3}{\cosh^4 t}\,dt = -i3\pi \int_{-R}^{R} \frac{t^2}{\cosh^4 t}\,dt + i\pi^3 \int_{-R}^{R} \frac{1}{\cosh^4 t}\,dt \\ &\to -i3\pi J_2 + i\pi^3 J_0, \qquad R \to \infty.\end{aligned}$$

På de lodräta sträckorna V_R^1 och V_R^2, där $z = \pm R + it$, $0 \le t \le \pi$, utnyttjar vi att $|z^n| = |z|^n \le (R+\pi)^n$ och att $|\cosh z| = |e^z + e^{-z}|/2 \ge \big||e^z| - |e^{-z}|\big|/2 = |(e^x - e^{-x})/2| = |\sinh x| = \sinh R$. ML-uppskattning ger därför, på båda och för alla $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\int_{V_R^{1,2}} f_n(z)\,dz\right| \le \int_{V_R^{1,2}} \frac{|z|^n}{|\cosh z|^4}\,|dz| \le \frac{(R+\pi)^n}{(\sinh R)^4} \cdot \pi = \frac{R^n}{e^{4R}} \cdot \frac{(1+\pi/R)^n}{(1-e^{-2R})^4} \cdot 2^4\pi \to 0, \qquad R \to \infty,$$

enligt standardgränsvärden från envariabelanalysen, så $\int_{V_R^{1,2}} f_n(z)\,dz \to 0$ då $R \to \infty$.

f_n är singulär där $\cosh z = 0$, d.v.s. där $e^{2z} = -1$, vilket ger $z = \big(\log(-1)\big)/2 = i\pi/2 + in\pi$, $n \in \mathbb{Z}$; innanför Γ_R finns endast $z = i\pi/2$. Residysatsen ger därför, eftersom $\cosh(w + i\pi/2) = (e^w e^{i\pi/2} + e^{-w}e^{-i\pi/2})/2 = (i\,e^w - i\,e^{-w})/2 = i\sinh w = i(w + w^3/6 + \mathcal{O}(w^5))$,

$$\begin{aligned}(*) \quad \int_{\Gamma_R} f_n(z)\,dz &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i\pi/2} \frac{z^n}{\cosh^4 z} = \Big/ w = z - i\frac{\pi}{2} \Big/ = 2\pi i \operatorname*{Res}_{w=0} \frac{(w+i\pi/2)^n}{\cosh^4(w+i\pi/2)} \\ &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{w=0} \frac{(w+i\pi/2)^n}{i^4(\sinh w)^4} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{w=0} \frac{(w+i\pi/2)^n}{w^4\big(1 + w^2/6 + \mathcal{O}(w^4)\big)^4} \\ &= \Big/ (1+s)^{-4} = 1 - 4s + \mathcal{O}(s^2) \text{ med } s = w^2/6 + \mathcal{O}(w^4),\ \mathcal{O}(s^2) = \mathcal{O}(w^4) \Big/ \\ &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{w=0} \frac{(w+i\pi/2)^n\big(1 - 2w^2/3 + \mathcal{O}(w^4)\big)}{w^4} = 2\pi i \cdot \begin{cases} -2/3, & n = 1, \\ 1 + \pi^2/2, & n = 3, \end{cases}\end{aligned}$$

för varje $R > 0$. När vi låter $R \to \infty$ för $n = 1$ och $n = 3$ i $(*)$ får vi därför

$$-i\pi J_0 + 0 + 0 = -i4\pi/3 \qquad \text{respektive} \qquad -i3\pi J_2 + i\pi^3 J_0 + 0 + 0 = i2\pi + i\pi^3,$$

d.v.s. $J_0 = 4/3$ och $J_2 = \pi^2/9 - 2/3$. Sammantaget blir alltså

$$I = 27J_2 + 6J_0 = (3\pi^2 - 18) + 8 = 3\pi^2 - 10$$

vilket skulle bevisas.

TATA45 Komplex analys 2021-01-16, kommentarer

Jag påminner om texten på försättsbladet:

Uträkningar ska redovisas lika noga och fullständigt som vid en salstentamen.

Det får alltså inte synas i lösningarna att man har haft tillgång till hjälpmedel. Att bara skriva upp icke-triviala resultat utan härledning (exempelvis samband och formler, derivator, värden på integraler, lösningar av ekvationer, termer i serieutvecklingar m.m.) ger i regel poängavdrag; detta gäller även om man verifierar resultaten i efterhand. Standardresultat är så klart undantagna från detta krav.

1. En viktig del av uppgiften är att faktorisera nämnaren genom att lösa en andragradsekvation med komplexa koefficienter via kvadratkomplettering m.m. (se s. 1 i kompendiet). Att utan härledning skriva $z^2 + (-3-5i)z + (-4+7i) = (z-1-2i)(z-2-3i)$, eller att $z_1 = 1+2i$ och $z_2 = 2+3i$ är polynomets nollställen, ger underkänd uppgift. Att genast skriva upp lösningarna till $w^2 = i/2$ utan motivering, en ekvation som man får efter kvadratkomplettering och variabelbyte, är inte lika allvarligt, speciellt som dessa lösningar är mycket lättare att se.

   Många skriver saker som $\sqrt{i/2}$ i något mellanled (OLÄMPLIGT); kvadratroten ur komplexa tal är ju odefinierat i denna kurs.

2. Bilden av cirkelskivan $|z-1| < 1$ blir alltså cirkelskivan $|w-c| < r$, med $c = (14+5i)/12$ och $r = 5\sqrt{5}/12$. Några tror att bilden bara blir cirkel*kurvan* $|w-c| = r$ (ORIMLIGT). Andra motiverar inte varför det blir just $|w-c| < r$ i stället för $|w-c| > r$.

3. Många tror att $|e^z| = e^2$ på cirkeln $|z| = 2$ (FEL); i själva verket är ju $|e^z| = e^x \le e^2$, eftersom $-2 \le x \le 2$ då $|z| = 2$ och den reella exponentialfunktionen är växande. Motsvarande på $|z| = 1$.

   Här följer nu en ALLMÄN DISKUSSION AV VANLIGA FEL när man använder Rouchés sats. Exemplet nedan avser $p(z) = z^4 - 3iz^2 - 8z + 3i$ i skivan $|z| \le 1$, med uppdelningen $p = f + g$ där $f(z) = -8z$ och $g(z) = z^4 - 3iz^2 + 3i$, men resonemanget är allmängiltigt.

   Uppskattningarna ska ske på randen $|z| = 1$ – hela randen! – och ingen annanstans, om man vill använda Rouchés sats. Det måste också framgå av lösningarna att det är just randen man undersöker.

   Notera att Rouchés sats fungerar lika bra för den slutna skivan $|z| \le 1$ som för den öppna skivan $|z| < 1$, eftersom både f och $f + g$ saknar nollställen på cirkeln $|z| = 1$ om villkoret i satsen är uppfyllt, se kompendiet.

   En provkarta på vanliga FEL:

   - ”Då $|z| = 1$ är $|f(z)| \le 8$ och $|g(z)| \le 7$, och därmed är $|f(z)| > |g(z)|$ där”. Att $|f(z)| \le 8$ och $|g(z)| \le 7$ då $|z| = 1$ är i och för sig sant, men dessa uppskattningar medför inte att $|f(z)| > |g(z)|$ då $|z| = 1$ – t.ex. skulle det kunna vara så att $|f(z_0)| = 4$ och $|g(z_0)| = 5$ för någon punkt z_0 på randen.
   - ”$|g(z)| = |z|^4 + 3|z|^2 + 3 = 7$”. Här behöver det inte vara likhet – oftast är det sträng olikhet – och man måste använda triangelolikheten i stället: $|g(z)| \le |z|^4 + 3|z|^2 + 3 = 7$.
   - ”$|f(1)| = 8$ och $|g(1)| = |1 - 3i + 3i| = 1$, alltså är $|f(1)| > |g(1)|$”. I och för sig sant, men det räcker inte att kolla en enda punkt (här: $z = 1$) på randen $|z| = 1$, som ju är en hel cirkel.
   - ”Alltså är $|f(z)| > |g(z)|$ då $|z| \le 1$, och därmed har $p = f + g$ och f lika många nollställen i $|z| \le 1$, d.v.s. ett”. Här består felet i ett enda tecken (den första förekomsten av ”$\le$” ska ersättas med ”$=$”), men konsekvensen är desto större, eftersom $f(z) + g(z)$ inte kan vara noll över huvud taget i skivan $|z| \le 1$ om $|f(z)| > |g(z)|$ i hela denna skiva; summan av två olika långa komplexa tal kan ju aldrig bli noll.

4. (a) Flera stannar vid $e^{-\pi/6-2\pi n}e^{i\ln 2}$, men detta är ju skrivet i *polär* form, inte *rektangulär*.

   Några har rätt uttryck i polär form (se raden ovan), men skriver sedan om $e^{i\ln 2}$ till 2^i, vilket i sig är FEL eftersom $e^{i\ln 2}$ är envärd och $2^i = e^{i\log 2}$ är flervärd, och svarar med $2^i e^{-\pi/6-2\pi n}$, som dessutom varken är i polär eller rektangulär form eftersom $2^i \notin [0, +\infty[$.

   Några räknar som om räkneregeln $(z^\alpha)^\beta = z^{\alpha\beta}$ vore allmänt sann, vilket den inte är; se kompendiets kapitel 2.3.

   (b) Inget att kommentera.

   (c) Det i särklass vanligaste felet bygger på följande i och för sig helt korrekta räkningar (eller på andra räkningar där olikheter dyker upp):

$$\begin{aligned}|i + 3\sin z|^2 &\le \big(|i| + 3|\sin z|\big)^2 = \big(1 + 3|e^{iz} - e^{-iz}|/2\big)^2 \le \big(1 + 3|e^{iz}|/2 + 3|e^{-iz}|/2\big)\\ &= \big(1 + 3(e^{-y} + e^y)/2\big)^2 = (1 + 3\cosh y)^2 = \varphi(y), \qquad (*)\end{aligned}$$

   och $\varphi(y)$ antar sitt största värde $(1 + 3\cosh(\ln 2))^2 = (1 + 3 \cdot 5/2)^2 = 361/16$ på rektangeln då $y = \ln 2$ eftersom $\cosh y$ är positiv och växande på $[0, \ln 2]$. Detta är som sagt helt korrekt, men många – de allra flesta, faktiskt – tror att det av ovanstående följer att det största värdet som $|i + 3\sin z|^2$ har på rektangeln är just $361/16$ (FELSLUT). Notera att vi har olikheter i $(*)$ ovan, så vi har visserligen bevisat att $|i + 3\sin z|^2 \le 361/16$ på rektangeln, men inte att värdet $361/16$ uppnås för något z i rektangeln; i själva verket är maximum endast $250/16 = 125/8$, se lösningsskissen.

   Några tror att maximum av $|i + 3\sin z|^2$ måste finnas i någon punkt där i och $3\sin z$ är parallella och lika riktade (FEL). Visserligen är $|i + 3\sin z| = |i| + 3|\sin z|$ i sådana punkter, men det betyder inte att maximum på rektangeln måste antas i en sådan punkt, och det gör det inte heller i detta fall.

   Alternativ lösning. Man kan direkt sätta in $z = x + iy$, utveckla och få

$$|i + 3\sin z|^2 = 9\sin^2 x\cosh^2 y + 9\cos^2 x\sinh^2 y + 6\cos x\sinh y + 1 = g(x, y),$$

   eventuellt med omskrivning med trigonometriska och hyperboliska ettorna till

$$g(x, y) = 9\sin^2 x + 9\sinh^2 y + 6\cos x\sinh y + 1,$$

   och sedan resonera som följer, som några studenter också gjorde: För fixt $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ är $\cos x \ge 0$ och (trivialt) $\sin^2 x \ge 0$ och $\cos^2 x \ge 0$, och eftersom både $\cosh y$ och $\sinh y$ är växande och ≥ 0 på $[0, \ln 2]$ är också $\cosh^2 y$ och $\sinh^2 y$ växande där. Således är funktionen $y \mapsto g(x, y)$ växande för varje fixt $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, så det räcker att undersöka funktionen $x \mapsto g(x, \ln 2)$ då $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ för att hitta maximum på rektangeln, och för det behövs endast sista delen i lösningsskissen. (Här behövde man alltså inte ens hänvisa till maximumprincipen, vilket jag inte tänkte på när jag konstruerade uppgiften!).

5. Inget att kommentera.

Lars Alexandersson, 3 februari 2021