Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: `TATA45`
Modul: `TEN1`

Distanstentamen i Komplex analys (TATA45)

2021-03-18 kl 14.00–19.00

flowID = 0

Observera att andra regler än normalt gäller. Följ instruktionerna noggrant.

- Alla hjälpmedel är tillåtna, men tentamen ska skrivas enskilt.

  Att samarbeta med, ta hjälp av eller hjälpa andra personer är förbjudet.

- Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt **handskrivna** – om inte särskilda skäl såsom funktionshinder föreligger – och avslutade med ett svar. (Det är också tillåtet att skriva för hand med ritpenna på ritplatta eller surfplatta, men endast handskriven text och mot **vit bakgrund**.)

  Uträkningar ska redovisas lika noga och fullständigt som vid en salstentamen.

  Det får alltså inte synas i lösningarna att man har haft tillgång till hjälpmedel. Att bara skriva upp icke-triviala resultat utan härledning (exempelvis samband och formler, derivator, värden på integraler, lösningar av ekvationer, termer i serieutvecklingar m.m.) ger i regel poängavdrag; detta gäller även om man verifierar resultaten i efterhand. Standardresultat är så klart undantagna från detta krav.

- Använd inte rödpenna. Lös högst en uppgift per sida (deluppgifter får dock redovisas på samma sida). Numrera sidorna, sorterade i uppgiftsordning.

Under skrivtiden

- Kontrollera att denna lapps flowID (0) stämmer med det flowID du har fått.

  Om inte, kontakta examinator omgående (se jour nedan).

- **Jour:** `http://courses.mai.liu.se/GU/TATA45/jour.php`

Vid inlämningen

- Märk **varje** blad med TATA45, 2021-03-18, sidnummer och flowID (0).
- Kontrollera innan uppladdning att sidorna i din pdf-fil är så pass tydliga att text och symboler går att läsa (annars kan vi inte rätta tentan).

Var god vänd!

Distanstentamen i Komplex analys (TATA45), 2021-03-18 kl 14.00–19.00

Varje uppgift ger 0–3 poäng, och för betyg 3/4/5 räcker 8/11/14 poäng och 3/4/5 uppgifter bedömda med minst 2 poäng vardera. Lösningsskisser publiceras på kurshemsidan tidigast på fredag 19/3.

$$\text{flowID} = 0$$

1. Bestäm Laurentserien för följande funktioner i följande områden:

   (a) $f(z) = \dfrac{1}{4z^2+9}, \qquad |z| > \dfrac{3}{2},$ (1p)

   (b) $g(z) = \dfrac{z}{z^2-3z-10}, \qquad 2 < |z-3| < 5.$ (2p)

2. Beräkna
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-i)^2(x^2-2x+5)}$$
med residykalkyl.

3. Bestäm en Möbiusavbildning $w(z)$ som tar halvplanet $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 0$ på området $|w+5| > 4$ samtidigt som $w(-1) = -11/3$ och $w(\infty) = -1$. Bestäm sedan den mängd i z-planet som avbildas på övre halvplanet $\operatorname{Im} w > 0$ under denna avbildning.

4. Bestäm antalet nollställen som följande polynom har i följande områden:

   (a) $p(z) = z^3 - iz^2 - (36+2i)z + 15i$ i undre halvplanet $\operatorname{Im} z < 0$, (2p)

   (b) $q(z) = z^3 + 3z^2 + 8 - 4iz^2 + 2iz$ i cirkelskivan $|z| < 2$. (1p)

5. Låt $\operatorname{Log} w$ som vanligt stå för principalvärdet av logaritmen, definierat för alla $w \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Beräkna
$$\int_C \frac{1}{z} \operatorname{Log}\left(\frac{z-5}{z+5}\right) dz$$
där C är ellipsen $(x/6)^2 + y^2 = 1$ tagen ett varv moturs.

Observera att tentamen endast innehåller fem uppgifter.

TATA45 Komplex analys 2021-03-18, lösningsskisser

1. Geometriska serien $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1/(1-q)$ då $|q|<1$ ger:

(a)
$$\frac{1}{4z^2+9} = \frac{1}{4z^2}\cdot\frac{1}{1+9/(4z^2)} = \Big/\, q = -\frac{9}{4z^2},\ |q|<1 \,\Big/ = \frac{1}{4z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{9}{4z^2}\Big)^n$$
$$= \frac{1}{4z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 9^n}{4^n z^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 9^n}{4^{n+1} z^{2n+2}},\quad |z|>\frac{3}{2}.$$

(b)
$$\frac{z}{z^2-3z-10} = \frac{z}{(z+2)(z-5)} = \frac{2/7}{z+2}+\frac{5/7}{z-5} = \Big/\, \begin{matrix} w = z-3 \\ 2<|w|<5 \end{matrix} \,\Big/ = \frac{2/7}{w+5}+\frac{5/7}{w-2}$$
$$= \frac{2/7}{5}\cdot\frac{1}{1+w/5}+\frac{5/7}{w}\cdot\frac{1}{1-2/w} = \frac{2/7}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{w}{5}\Big)^n + \frac{5/7}{w}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{2}{w}\Big)^n$$
$$= \frac{2}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-3)^n}{5^{n+1}} + \frac{5}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(z-3)^{n+1}},\quad 2<|z-3|<5.$$

2. Låt $f(z) = 1/\big((z-i)^2(z^2-2z+5)\big)$; då är den sökta integralen $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$. Eftersom f är singulär endast i $z=i$ (dubbelpol) och i $z = 1\pm 2i$ (enkelpoler) är det enklast att integrera längs konturen $C_R^- - L_R$, där C_R^- är halvcirkeln från $z=-R$ till $z=R$ i undre halvplanet och L_R är sträckan från $z=-R$ till $z=R$ (se figur nedan, i uppgift 4a). Residysatsen ger då R är stort ($R>\sqrt{5}$ räcker) att

$$(*)\qquad \int_{C_R^- - L_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=1-2i}\frac{(z-i)^{-2}}{z^2-2z+5} = 2\pi i\,\frac{(z-i)^{-2}}{\frac{d}{dz}(z^2-2z+5)}\Big|_{z=1-2i}$$
$$= \frac{2\pi i}{(1-3i)^2(-4i)} = \frac{(4-3i)\pi}{100}.$$

ML-uppskattning ger, eftersom $|z-i|\ge |z|-|i| = R-1>0$ och $|z^2-2z+5|\ge |z|^2-2|z|-|5| = R^2-2R-5>0$ för stora R, att

$$\left|\int_{C_R^-} f(z)\,dz\right| \le \frac{\pi R}{(R-1)^2(R^2-2R-5)} \to 0 \qquad \text{då } R\to\infty,$$

av gradskäl, så $\int_{C_R^-} f(z)\,dz \to 0$ då $R\to\infty$. Eftersom $\int_{L_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx \to I$ då $R\to\infty$ får vi genom att låta $R\to\infty$ i $(*)$ att $0 - I = (4-3i)\pi/100$, d.v.s. att $I = (-4+3i)\pi/100$.

<u>Svar</u>: $\dfrac{(-4+3i)\pi}{100}$.

3. Att $w(-1) = -11/3$ ger med nödvändighet $w(i) = 7$, eftersom -1 och i är spegelpunkter m.a.p. linjen $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 0$, och $-11/3$ och 7 är spegelpunkter m.a.p. cirkeln $|w+5| = 4$ (båda ligger på samma stråle – rakt åt höger – från centrum $w=-5$ och på avstånd $\ell_1 = 4/3$ respektive $\ell_2 = 12$ så att $\ell_1\ell_2 = 4^2$, rita figurer!). Eftersom dessutom $w(\infty) = -1$ (randpunkt på randpunkt) är Möbiusavbildningen entydigt bestämd, och vi får den enklast m.h.a. en ansats som använder punkterna $w(-1) = -11/3$ och $w(\infty) = -1$, nämligen ansatsen

$$\frac{w+11/3}{w+1} = k\,\frac{z+1}{1}.$$

Insättning av $w(i) = 7$ ger $k = (2-2i)/3$ och vi får

$$w(z) = \frac{-4z+(7+11i)}{4z+(1-3i)}.$$

Denna avbildar linjen $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 0$ på cirkeln $|w+5| = 4$, och eftersom $w(i) = 7$ avbildar den dessutom området $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 0$ på cirkeln $|w+5| > 4$ (inre punkt avbildas på inre punkt).

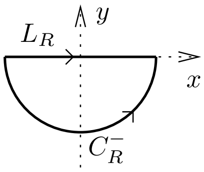
Vi vet nu att $(-1, i, \infty) \mapsto (-11/3, 7, -1)$, och eftersom tre olika punkter i $\hat{\mathbb{C}}$ bestämmer en $\hat{\mathbb{C}}$-cirkel entydigt och $w(z)$ avbildar $\hat{\mathbb{C}}$-cirklar på $\hat{\mathbb{C}}$-cirklar inser vi att linjen $\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z = -1$ avbildas på linjen $\operatorname{Im} w = 0$, och eftersom dessutom t.ex. $w(0) = (-13 + 16i)/5$ inser vi att halvplanet $\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z > -1$ avbildas på halvplanet $\operatorname{Im} w > 0$ (inre punkt på inre punkt).

<u>Svar</u>: $w(z) = \dfrac{-4z + (7 + 11i)}{4z + (1 - 3i)}$; halvplanet $\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z > -1$.

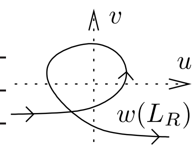
4. (a) Vi studerar argumenttillskottet för $p(z) = z^3 - iz^2 - (36+2i)z + 15i$ när z genomlöper kurvan $\Gamma_R = C_R^- - L_R$ (se figur nere till vänster; observera orienteringen).

På C_R^- får vi tillskottet $\Delta_{C_R^-} \arg p(z) = \Delta_{C_R^-} \arg z^3 + \Delta_{C_R^-} \arg\bigl(1 - i/z - (36+2i)/z^2 + 15i/z^3\bigr) \to 3 \cdot \pi + 0 = 3\pi$ då $R \to \infty$.

På L_R får vi $p(z) = p(x) = (x^3 - 36x) + i(-x^2 - 2x + 15) = (x+6)x(x-6) + i\bigl(-(x+5)(x-3)\bigr) = u + iv$, och därmed följande teckentabell för u och v:



x	$<$	-6	$<$	-5	$<$	0	$<$	3	$<$	6	$<$
u	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
v	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$



Dessutom får vi av gradskäl att $v/u \to 0$ då $x \to \pm\infty$ (u drar mer än v), och detta tillsammans med tabellen ovan ger figuren ovan till höger, där vi ser att $\Delta_{L_R} \arg p(z) \to 3\pi$ då $R \to \infty$. Antalet nollställen N i undre halvplanet blir därför

$$N = \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to\infty} (\Delta_{C_R^-} \arg p(z) - \Delta_{L_R} \arg p(z)) = \frac{3\pi - 3\pi}{2\pi} = 0,$$

eftersom poler saknas. <u>Svar</u>: Noll.

(b) Sätt

$$f(z) = 3z^2 - 4iz^2 = (3 - 4i)z^2 \quad \text{och} \quad g(z) = z^3 + 2iz + 8.$$

På hela cirkeln $|z| = 2$ är $|f(z)| = |3 - 4i||z|^2 = 5 \cdot 2^2 = 20$ och $|g(z)| = |z^3 + 2iz + 8| \le |z|^3 + |2i||z| + |8| = 2^3 + 2 \cdot 2 + 8 = 20$, med likhet precis då talen z^3, $2iz$ och 8, som vektorer, är parallella och lika riktade och $|z| = 2$, d.v.s. precis då $z^3 = 8$ och $2iz = 4$ samtidigt. Men om $2iz = 4$, d.v.s. om $z = -2i$, blir $z^3 = 8i \ne 8$, så i själva verket är $|g(z)| < 20$; således är $|g(z)| < |f(z)|$ på denna cirkel. Enligt Rouchés sats har därför $q(z) = f(z) + g(z)$ lika många nollställen i $|z| < 2$ som $f(z)$, d.v.s. två, ty $f(z)$ har ett dubbelt nollställe i $z = 0$.

<u>Svar</u>: Två.

5. Integranden

$$f(z) = \frac{1}{z} \operatorname{Log}\left(\frac{z-5}{z+5}\right)$$

är analytisk i alla punkter i $\mathbb{C}$ förutom där $z = 0$ och där $w(z) := (z-5)/(z+5)$ är reellt och ≤ 0.

$w(z)$ är en Möbiusavbildning med reella koefficienter, som därför avbildar realaxeln på realaxeln. Eftersom dessutom $(5, 0, -5) \mapsto (0, -1, \infty)$ inser vi att $\operatorname{Log} w(z)$ är analytisk utom på intervallet $[-5, 5]$. Sammantaget är alltså $f(z)$ analytisk i $\Omega := \mathbb{C} \setminus [-5, 5]$.

Kurvan C, ellipsen $(x/6)^2 + y^2 = 1$ tagen ett varv moturs, ligger i Ω (rita figur!). Låt C_R vara cirkeln $|z| = R$ tagen ett varv moturs. Om $R > 6$ är $f(z)$ analytisk på och mellan C_R och C, så Cauchys integralsats medför att $\int_C f(z)\,dz = \int_{C_R} f(z)\,dz$ för dessa R. ML-uppskattning ger

$$\left| \int_{C_R} f(z)\,dz \right| \le \frac{1}{R} \cdot \max_{|z|=R} \left| \operatorname{Log}\left(\frac{z-5}{z+5}\right) \right| \cdot 2\pi R = 2\pi \cdot \max_{|z|=R} \left| \operatorname{Log}\left(\frac{1-5/z}{1+5/z}\right) \right| \to 2\pi |\operatorname{Log} 1| = 0$$

då $R \to \infty$, ty $\operatorname{Log} w$ är kontinuerlig i $w = 1$. Alltså: $\int_{C_R} f(z)\,dz \to 0$ då $R \to \infty$, och eftersom $\int_C f(z)\,dz$ är oberoende av R och lika med $\int_{C_R} f(z)\,dz$ för $R > 6$ är $\int_C f(z)\,dz = 0$.

<u>Svar</u>: 0.

TATA45 Komplex analys 2021-03-18, kommentarer

Jag påminner om texten på försättsbladet:

Uträkningar ska redovisas lika noga och fullständigt som vid en salstentamen.

Det får alltså inte synas i lösningarna att man har haft tillgång till hjälpmedel. Att bara skriva upp icke-triviala resultat utan härledning (exempelvis samband och formler, derivator, värden på integraler, lösningar av ekvationer, termer i serieutvecklingar m.m.) ger i regel poängavdrag; detta gäller även om man verifierar resultaten i efterhand. Standardresultat är så klart undantagna från detta krav.

1. (a) Alternativt kan man, som flera också har gjort, dela upp i partialbråk även här och få

$$\frac{1}{4z^2+9} = \frac{1}{(2z+3i)(2z-3i)} = \frac{i/6}{2z+3i} - \frac{i/6}{2z-3i} = \frac{i}{12z}\left(\frac{1}{1+(3i/2z)} - \frac{1}{1-(3i/2z)}\right)$$
$$= \frac{i}{12z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{3i}{2z})^n - \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{3i}{2z})^n\right) = \frac{i}{12}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3i/2)^n-(3i/2)^n}{z^{n+1}}, \quad |z|>\frac{3}{2};$$

detta *kan* sedan – men *måste inte* – skrivas om till svaret i lösningsskissen (speciellt ser man lätt att alla termer med udda gradtal, d.v.s. jämna n, försvinner).

   (b) Inget att kommentera.

2. Många har integrerat längs konturen $L_R + C_R^+$, där C_R^+ är halvcirkeln från $z = R$ till $z = -R$ i övre halvplanet och L_R fortfarande är sträckan från $z = -R$ till $z = R$, vilket går bra, men till priset av att man tvingas hantera två singulariteter, nämligen $z = 1+2i$ (enkelpol) och $z = i$ (dubbelpol):

$$\int_{L_R+C_R^+} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{(z-i)^{-2}}{\frac{d}{dz}(z^2-2z+5)}_{|z=1+2i} + \frac{d}{dz}\left((z^2-2z+5)^{-1}\right)_{|z=i}\right)$$
$$= /\text{fyll i detaljer}/ = 2\pi i\left(-\frac{1}{8}+\frac{7+i}{50}\right) = \frac{\pi(-4+3i)}{100}$$

för stora R ($R > \sqrt{5}$). ML-uppskattningen på C_R^+ blir identisk med den på C_R^-.

Typiska FEL i ML-uppskattningen är att skriva

$$\left|\int_{C_R^\pm} f(z)\,dz\right| \le \frac{\pi R}{(R-i)^2(R^2-2R-5)}, \quad \frac{\pi R}{(R-1)^2(R^2+2R+5)} \text{ eller } \frac{\pi R}{|R-i|^2(R^2-2R-5)}.$$

Den första är vanlig men rejält fel eftersom högerledet där är ickereellt, och olikheter $a \le b$ har mening endast om $a, b \in \mathbb{R}$; den andra är oftast följden av en felvänd triangelolikhet; och den tredje, som är ovanlig, är fel eftersom avståndet mellan R och i kan vara större än avståndet mellan z och i, både på C_R^+ och C_R^- (rita figur!).

3. Överraskande nog har en handfull studenter trott att spegelpunkten till $z = -1$ m.a.p. linjen $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 0$ är $z = 1$ (FEL) i stället för $z = i$, trots att linjen är korrekt ritad. Som en konsekvens får $w(z)$ reella koefficienter, vilket gör den avslutande delen av uppgiften mycket enklare.

4. (a) Inget att kommentera.

   (b) Flera resonerar fel när de försöker bevisa att z^3, $2iz$ och 8 inte kan vara lika riktade någonstans på cirkeln $|z| = 2$, d.v.s. att det inte finns något z sådant att $z^3 = 8$ och $2iz = 4$.
   Några tror att $z^3 = 8$ endast uppfylls av $z = 2$ (FEL); även $z = -1 \pm i\sqrt{3}$ löser ju denna ekvation.
   Några påstår att z^3 och $2iz$ inte kan vara lika riktade då $|z| = 2$ (FEL); detta sker ju då $z^2 = 4i$, d.v.s. då $z = \pm\sqrt{2}\,(1+i)$.
   I övrigt görs många ”klassiska fel”, se diskussionen på uppgift 3 på tentan 2021-01-16.

5. Några tror att integranden är analytisk i $\mathbb{C} \setminus \{-5, 0, 5\}$ (FEL); den är ju inte analytisk i någon punkt längs sträckan $[-5, 5]$, se lösningsskissen. I övrigt inget att kommentera.

Lars Alexandersson, 24 mars 2021