Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: `TATA45`
Modul: `TEN1`

Tentamen i Komplex analys (TATA45)

2021-08-26 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Fullständiga lösningar krävs. Varje uppgift ger 0–3 poäng, och för betyg 3/4/5 räcker 8/11/14 poäng och 3/4/5 uppgifter bedömda med minst 2 poäng vardera. Lösningsskisser publiceras på kurshemsidan senast fredag 27/8.

1. (a) Beräkna alla värden på $(1+i)^i$. Svara i rektangulär form $a+ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.
   (b) Lös ekvationen $\cos z - i \sin z = 1 + i$. Svara i rektangulär form.
   (c) Bestäm, och rita i en figur, alla $z \in \mathbb{C}$ sådana att $\cos z \in \mathbb{R}$.
2. Bestäm antalet nollställen som polynomet
$$p(z) = z^5 + z^4 + 4z^3 + 10z^2 + 9$$
har i vänstra halvplanet $\operatorname{Re} z < 0$.
3. Beräkna integralen
$$\int_0^\infty \frac{\cos x \, dx}{(x^2+1)^2}.$$
4. Låt
$$f(z) = \frac{2 + \sin z}{1 + e^z}.$$
Bestäm alla termer av grad högst 3 i Maclaurinserien för f, och bestäm denna series konvergensradie R. Ange också $f'''(0)$.
5. Låt Ω vara området som finns till höger om imaginäraxeln I och utanför cirkeln $C : |z - 13| = 12$.
   (a) Bestäm en Möbiusavbildning $w(z)$ som avbildar Ω på en cirkelring. (2p)
   (b) Bestäm den stationära (harmoniska) temperaturfördelningen $T(z)$ i Ω om $T = 0$ på I och $T = 100$ på C. (1p)
6. Låt Ω vara $\mathbb{C}$ med positiva imaginäraxeln borttagen. Bestäm en gren $f(z)$ till den flervärda funktionen
$$z^{1/2} + z^{1/3}$$
i Ω sådan att $f(1) = 0$. Beräkna sedan $f(-64)$ och $f'(-i)$, båda i rektangulär form.
7. Antag att f är analytisk i en omgivning till den slutna cirkelskivan $|z| \leq 1$. Genom att utgå från Cauchys integralformel, visa att
$$|f(z)| \leq \max_{|s|=1} |f(s)|, \qquad |z| < 1.$$
(Att hänvisa till maximumprincipen ger 0 poäng.)

TATA45 Komplex analys 2021-08-26, lösningsskisser

1. (a)
$$
\begin{aligned}
(1+i)^i &= \exp\big(i\log(1+i)\big) = \exp\big(i(\ln\sqrt{2} + i\pi/4 + i2n\pi)\big) \\
&= \exp\big(-\pi/4 - 2n\pi\big)\exp\big(i(\ln 2)/2\big) \\
&= e^{-\pi/4-2n\pi}\left(\cos\big(\frac{\ln 2}{2}\big) + i\sin\big(\frac{\ln 2}{2}\big)\right), \quad n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

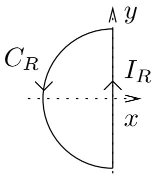
(b)
$$
\begin{aligned}
\cos z - i\sin z = 1+i \quad &\Leftrightarrow \quad e^{-iz} = 1+i \quad \Leftrightarrow \quad -iz = \log(1+i) \\
&\Leftrightarrow \quad z = i\log(1+i) = \big/\text{som i (a)}\big/ = -\frac{\pi}{4} - 2n\pi + i\frac{\ln 2}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

(c) $\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$, så $\cos z \in \mathbb{R}$ precis då $\sinh y = 0$ eller $\sin x = 0$, d.v.s. precis då $y = 0$ eller $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Bilden blir alltså realaxeln $y = 0$ tillsammans med de oändligt många lodräta linjerna $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

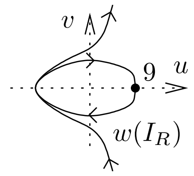
2. Vi studerar argumenttillskottet för $p(z) = z^5 + z^4 + 4z^3 + 10z^2 + 9$ när z genomlöper kurvan $\Gamma_R = C_R + I_R$ (se figur nere till vänster).

På C_R får vi tillskottet $\Delta_{C_R} \arg p(z) = \Delta_{C_R} \arg z^5 + \Delta_{C_R} \arg(1 + 1/z + 4/z^2 + 10/z^3 + 9/z^5) \to 5\cdot\pi + 0 = 5\pi$ då $R \to \infty$.

På I_R får vi $p(z) = p(iy) = (y^4 - 10y^2 + 9) + i(y^5 - 4y^3) = (y^2-1)(y^2-9) + i\,y^3(y^2-4) = u + iv$, $y : -R \to R$, och därmed nedanstående teckentabell då $y \geq 0$ (observera att u är jämn och v är udda), samt kurva $w = p(z)$ då z genomlöper I_R:



y	0	<	1	<	2	<	3	<
u (jämn)	9	+	0	−	−	−	0	+
v (udda)	0	−	−	−	0	+	+	+



Dessutom får vi av gradskäl att $u/v \to 0$ då $y \to \pm\infty$ (v drar mer än u), och detta tillsammans med tabellen ovan ger skissen ovan till höger, där vi ser att $\Delta_{I_R} \arg p(z) \to -3\pi$ då $R \to \infty$. Eftersom poler saknas blir antalet nollställen i vänstra halvplanet därför $(1/2\pi)\lim_{R\to\infty}(\Delta_{C_R} \arg p(z) + \Delta_{I_R} \arg p(z)) = (5\pi - 3\pi)/2\pi = 1$, enligt argumentprincipen.

<u>Svar</u>: Ett.

3. Integranden är jämn och rent reell, och $\cos x = \mathrm{Re}(e^{ix})$, så den sökta integralen kan skrivas

$$
I = \int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,J, \quad \text{där} \quad J = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}\,dx.
$$

Låt $f(z) = e^{iz}/(z^2+1)^2 = e^{iz}(z+i)^{-2}(z-i)^{-2}$; då är $J = \int_{-\infty}^\infty f(t)\,dt$. Låt vidare L_R vara sträckan från $z = -R$ till $z = R$ och C_R^+ halvcirkeln från $z = R$ till $z = -R$ i övre halvplanet (rita figur!). Vi observerar att $|e^{iz}| = e^{-y} \leq 1$ på C_R^+ eftersom $y \geq 0$ där, så ML-uppskattning ger $|\int_{C_R^+} f(z)\,dz| \leq \pi R \cdot 1/(R^2-1)^2 \to 0$ då $R \to \infty$, av gradskäl. Residysatsen ger, då $R > 1$,

$$
\begin{aligned}
\int_{L_R + C_R^+} f(z)\,dz &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \Big/ f(z) = \frac{e^{iz}(z+i)^{-2}}{(z-i)^2} \Big/ = 2\pi i \cdot \frac{d}{dz}\big(e^{iz}(z+i)^{-2}\big)_{|z=i} \\
&= 2\pi i\, e^{iz}\big(i(z+i)^{-2} - 2(z+i)^{-3}\big)\big)_{|z=i} = 2\pi e^{-1}(1/4 + 1/4) = \pi/e,
\end{aligned}
$$

och genom att låta $R \to \infty$ här (observera att $\int_{L_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^R f(t)\,dt \to J$ då $R \to \infty$) får vi $J + 0 = \pi/e$, så $I = (\mathrm{Re}\,J)/2 = \pi/2e$.

<u>Svar</u>: $\dfrac{\pi}{2e}$.

4. Nämnaren

$$1 + e^z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \log(-1) = i\pi + i2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

I dessa punkter är täljaren $= 2 + \sin z = 2 + i\sinh(\pi + 2n\pi) \neq 0$, så f har poler i alla dessa punkter men är analytisk för övrigt. Maclaurinserien för f konvergerar därför i skivan $|z| < R$, där R är avståndet till närmaste pol från origo sett, $\pm i\pi$, så $R = \pi$.

Ansatsen

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \mathcal{O}(z^4)$$

ger, efter multiplikation med $1 + e^z$ och standardutvecklingarna $e^z = 1 + z + z^2/2 + z^3/6 + \mathcal{O}(z^4)$ och $\sin z = z - z^3/6 + \mathcal{O}(z^5)$,

$$\begin{aligned} 2 + z - z^3/6 + \mathcal{O}(z^5) &= \big(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \mathcal{O}(z^4)\big)\big(2 + z + z^2/2 + z^3/6 + \mathcal{O}(z^4)\big) \\ &= 2c_0 + (c_0 + 2c_1)z + (c_0/2 + c_1 + 2c_2)z^2 + (c_0/6 + c_1/2 + c_2 + 2c_3)z^3 + \mathcal{O}(z^4), \end{aligned}$$

och identifiering av koefficienterna ger i tur och ordning sambanden $2c_0 = 2$, $c_0 + 2c_1 = 1$, $c_0/2 + c_1 + 2c_2 = 0$, $c_0/6 + c_1/2 + c_2 + 2c_3 = -1/6$, d.v.s. $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $c_2 = -1/4$, $c_3 = -1/24$, så $f(z) = 1 - z^2/4 - z^3/24 + \mathcal{O}(z^4)$.

Slutligen, $c_3 = f'''(0)/3!$, så $f'''(0) = 6c_3 = -1/4$.

<u>Svar</u>: $f(z) = 1 - \dfrac{z^2}{4} - \dfrac{z^3}{24} + \mathcal{O}(z^4)$; $R = \pi$; $f'''(0) = -\dfrac{1}{4}$.

5. (a) Genom att med en Möbiusavbildning $w(z)$ avbilda de *gemensamma* spegelpunkterna m.a.p. I och C på $w = 0$ respektive $w = \infty$, som ju är de gemensamma spegelpunkterna m.a.p. alla cirklar med centrum i origo, kommer Ω att avbildas på en cirkelring med centrum i origo, enligt egenskaper hos Möbiusavbildningar.

   Geometrin (rita figur!) medför att de gemensamma spegelpunkterna kan skrivas $z = \pm a$ för något reellt a sådant att $1 < a < 13$. Vidare är $(13 - a)(13 + a) = 12^2$, d.v.s. $a^2 = 25$, vilket medför att $a = 5$ (eftersom $a > 0$). Om vi kompletterar de så erhållna punkterna $w(5) = 0$ och $w(-5) = \infty$ med att avbilda någon punkt på C på någon punkt på enhetscirkeln, säg, t.ex. $w(1) = 1$, får vi med standardmetoder (redovisa detaljerna!)

$$w(z) = \frac{15 - 3z}{2z + 10}.$$

   C avbildas nu på $\tilde{C} : |w| = 1$, och I avbildas på någon cirkel $\tilde{I} : |w| = R$, där R kan bestämmas genom att sätta in valfri punkt på I, t.ex. $z = 0$, i $w(z)$; vi får $R = |w(0)| = 3/2$. Området Ω avbildas därför på cirkelringen $\tilde{\Omega} : 1 < |w| < 3/2$.

   (b) Låt $w(z)$ och $\tilde{\Omega}$ vara som ovan. I ringen $\tilde{\Omega}$ finns harmoniska funktioner $T = A\ln|w| + B$ som är konstanta på cirklar $|w| = r$. Kraven $T = 100$ då $|w| = 1$ och $T = 0$ då $|w| = 3/2$ ger $B = 100$ respektive $A\ln(3/2) + B = 0$, så

$$T(z) = 100 - \frac{100}{\ln(3/2)}\ln|w(z)| = 100 - \frac{100}{\ln(3/2)}\ln\left|\frac{15 - 3z}{2z + 10}\right| = \frac{100}{\ln(3/2)}\ln\left|\frac{z + 5}{z - 5}\right|.$$

<u>Svar</u>: (a) t.ex. $w(z) = \dfrac{15 - 3z}{2z + 10}$; (b) $T(z) = \dfrac{100}{\ln(3/2)}\ln\left|\dfrac{z + 5}{z - 5}\right|$ (entydigt bestämt).

Anmärkning: Alla Möbius $w(z)$ som duger i (a) ges av $w(z) = c + k(z - 5)/(z + 5)$ och $w(z) = c + k(z + 5)/(z - 5)$ för $c \in \mathbb{C}$ och $k \neq 0$, där c är cirkelringens centrum; enklast är att välja $c = 0$.

6. Låt $L(z) = \ln|z| + i\,\theta(z)$, där $\theta(z)$ är det argument för $z \in \Omega$ som uppfyller $-3\pi/2 < \theta(z) < \pi/2$; då är $L(z)$ en gren till $\log z$ i Ω, och alla grenar till $\log z$ där ges av $L_k(z) = L(z) + i2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

   Grenarna till den flervärda funktionen $z^{1/2} + z^{1/3}$ kan nu skrivas

$$f_{m,n}(z) = e^{L_m(z)/2} + e^{L_n(z)/3} = e^{im\pi} e^{L(z)/2} + e^{i2n\pi/3} e^{L(z)/3},$$

   där $m, n \in \mathbb{Z}$, men för att få alla (sex) grenar räcker det med $m \in \{0, 1\}$, $n \in \{0, 1, 2\}$; f är alltså någon av dessa.

   Kravet $f(1) = 0$ ger, eftersom $\theta(1) = 0$ och därmed $L(1) = 0$,

$$0 = e^{im\pi} + e^{i2n\pi/3} = \{1, -1\} + \{1, (-1 + i\sqrt{3})/2, (-1 - i\sqrt{3})/2\},$$

   och enda sättet att få summan 0 är alltså via $(-1) + 1$, d.v.s. om $m = 1$ och $n = 0$ (vilket också kan ses direkt i en figur). Alltså,

$$f(z) = f_{1,0}(z) = -e^{L(z)/2} + e^{L(z)/3} = -\sqrt{r}\, e^{i\theta/2} + \sqrt[3]{r}\, e^{i\theta/3},$$

   om $z \in \Omega$ skrivs $z = r\, e^{i\theta}$ med $r > 0$ och $-3\pi/2 < \theta < \pi/2$.

   Eftersom $\theta(-64) = -\pi$ får vi nu

$$f(-64) = -8\, e^{-i\pi/2} + 4\, e^{-i\pi/3} = -8(-i) + 4(1 - i\sqrt{3})/2 = 2 + i(8 - 2\sqrt{3}).$$

   Vidare är $L'(z) = 1/z$, så

$$f'(z) = -\frac{e^{L(z)/2}}{2z} + \frac{e^{L(z)/3}}{3z}, \qquad z \in \Omega,$$

   och eftersom $L(-i) = -i\pi/2$ blir

$$f'(-i) = -\frac{e^{-i\pi/4}}{2(-i)} + \frac{e^{-i\pi/6}}{3(-i)} = -\frac{i}{2} \cdot \frac{1 - i}{\sqrt{2}} + \frac{i}{3} \cdot \frac{\sqrt{3} - i}{2} = \left(\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

   <u>Svar</u>: $f(z) = -\sqrt{r}\, e^{i\theta/2} + \sqrt[3]{r}\, e^{i\theta/3}$, där $z = r\, e^{i\theta}$, $r > 0$, $-3\pi/2 < \theta < \pi/2$;
   $f(-64) = 2 + i(8 - 2\sqrt{3})$; $f'(-i) = \left(\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

7. Låt C vara enhetscirkeln $|z| = 1$ tagen ett varv moturs. f är analytisk, speciellt kontinuerlig, i en omgivning till den slutna enhetsskivan $|z| \le 1$, så maximum av den reellvärda kontinuerliga funktionen $|f|$ existerar på den kompakta mängden C; sätt $M = \max_C |f|$.

   Fixera nu z med $|z| < 1$; vi ska visa att $|f(z)| \le M$. Cauchys integralformel säger att

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{s - z}\, ds, \qquad \text{och ML-uppskattning ger} \qquad |f(z)| \le \frac{M}{1 - |z|}$$

   eftersom $|s - z| \ge |s| - |z| = 1 - |z| > 0$ då $s \in C$ och längden av C är 2π.

   Men även $f^n = f \cdot \ldots \cdot f$, n faktorer, $n = 1, 2, 3, \ldots$, är analytiska i en omgivning till $|z| \le 1$, och $\max_C |f^n| = \max_C |f|^n = \big(\max_C |f|\big)^n = M^n$. Vi får därför

$$|f^n(z)| \le \frac{M^n}{1 - |z|}, \qquad \text{d.v.s.} \qquad |f(z)| \le \frac{M}{\big(1 - |z|\big)^{1/n}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

   Låt nu $n \to \infty$ för vårt fixa z. Eftersom $|f(z)|$ är oberoende av n samtidigt som $\big(1 - |z|\big)^{1/n} = \exp\big((\ln(1 - |z|))/n\big) \to e^0 = 1$ då $n \to \infty$ följer $|f(z)| \le M$, vilket skulle bevisas.

TATA45 Komplex analys 2021-08-26, kommentarer

1. I (a) och (b) går det bra att svara med $\ln\sqrt{2}$ i stället för $(\ln 2)/2$.

   I (c) är det flera som har svarat med en mängd som *inte* innehåller de reella talen $\mathbb{R}$, vilket ju är ORIMLIGT eftersom trivialt $\cos x \in \mathbb{R}$ då $x \in \mathbb{R}$.

   I (c) går det också bra att skriva $e^{iz} = e^{-y}e^{ix}$ och $e^{-iz} = e^{y}e^{-ix}$ och sedan få att $\operatorname{Im}\cos z = 0 \Leftrightarrow e^{y}\sin x = e^{-y}\sin x$, men här tror några att detta är $\Leftrightarrow e^{y} = e^{-y}$ (FEL) och missar fallet $\sin x = 0$.

2. Några har fått rätt kurva i uv-planet men har inte markerat orienteringen, och de läser därför (?) av argumenttillskottet fel och tror att det är 3π i stället för -3π.

3. Ett mycket vanligt fel här är att tro att man kan använda

   $$f(z) = \frac{\cos z}{(1+z^2)^2}, \quad z \in \mathbb{C} \qquad \text{(FEL)}$$

   med samma kontur som i lösningsskissen. Problemet är ju att $\cos z$ är obegränsad i övre halvplanet (och även i undre halvplanet), se Övning 2.22 och Avsnitt 5.4 i kompendiet, och ML-uppskattningen på halvcirkeln C_R^+ brakar därför ihop.

4. Några skriver ansatsen som $f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3$ (FEL), alltså utan $\mathcal{O}(z^4)$-term, men i så fall vore ju f ett polynom (av grad högst 3).

   Notera att Maclaurinutvecklingen av f, och $f'''(0)$, beräknas på samma sätt som i Envariabelanalys 2; det nya är bestämningen av konvergensradien R.

5. (a) Observera att det är *nödvändigt* (och tillräckligt) att de gemensamma spegelpunkterna m.a.p. I och C i z-planet, alltså $z = \pm 5$, avbildas på de gemensamma spegelpunkterna m.a.p. de koncentriska cirklarna i w-planet, alltså centrum $w = c$ (enklast med $c = 0$) och $w = \infty$. Om man tar fram en Möbius utan att utnyttja detta måste man verifiera att den verkligen avbildar området Ω på en cirkelring (vilket den i regel inte gör).

   (b) Några försöker med $T = A|w| + B$ (FEL), men denna funktion är inte harmonisk i $\mathbb{C}^*$; i själva verket är $\Delta T = T''_{uu} + T''_{vv} = 1/\sqrt{u^2+v^2} \neq 0$ där.

6. I just detta fall kan man faktiskt konstruera en gren med *samma* logaritmgren för både $z^{1/2}$ och $z^{1/3}$, beroende på att 2 och 3 saknar gemensamma faktorer: $m = n = 3$ fungerar, något jag inte tänkte på när jag konstruerade uppgiften ...

   Alternativt kan man skriva den sökta grenen som

   $$f(z) = \exp\left(\frac{\ln|z| + i\,\theta_2(z)}{2}\right) + \exp\left(\frac{\ln|z| + i\,\theta_3(z)}{3}\right)$$

   där $\theta_2(z)$ och $\theta_3(z)$ är argument för z som ska variera kontinuerligt i Ω. Kravet $f(1) = 0$ uppfylls då om t.ex. $\theta_2(1) = 2\pi$ och $\theta_3(1) = 6\pi$ (eller båda $= 6\pi$) – vi söker ju *en* gren – och detta bestämmer intervallen för vinklarna: $\pi/2 < \theta_2 < 5\pi/2$ och $9\pi/2 < \theta_3 < 13\pi/2$ (respektive $9\pi/2 < \theta_{2,3} < 13\pi/2$). Sedan blir, med derivering av potensfunktioner,

   $$f'(z) = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{\ln|z| + i\,\theta_2(z)}{2}\right) + \frac{1}{3}\exp\left(\frac{-2\big(\ln|z| + i\,\theta_3(z)\big)}{3}\right).$$

7. Inget att kommentera.

Lars Alexandersson, 6 september 2021