Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: `TATA45`
Modul: `TEN1`

Tentamen i Komplex analys (TATA45)

2022-01-15 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Fullständiga lösningar krävs. Varje uppgift ger 0–3 poäng, och för betyg 3/4/5 räcker 8/11/14 poäng och 3/4/5 uppgifter bedömda med minst 2 poäng vardera. Lösningsskisser publiceras på kurshemsidan tidigast måndag 17/1.

1. (a) Bestäm alla hela analytiska funktioner $f = u + iv$ sådana att

$$u = \operatorname{Re} f = \cos x \cosh y - e^{-x} \cos y - xy, \qquad f(0) = i.$$

   f ska uttryckas i variabeln z, alltså som $f(z)$. (2p)

   (b) Visa att $v = x^2y^2$ inte kan vara imaginärdel av någon analytisk funktion. (1p)

2. Bestäm en Möbiusavbildning $w(z)$ som tar cirkelskivan $|z-i| < 2$ på halvplanet $\operatorname{Re} w > 1$ samtidigt som $w(0) = 2$ och $w(2+i) = \infty$. Bestäm sedan bilden i w-planet av imaginäraxeln i z-planet.

3. Beräkna med residykalkyl

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+2)}.$$

4. Bestäm antalet nollställen som polynomet

$$p(z) = z^3 + (1-i)z^2 + (2+i)z + 2$$

   har i fjärde kvadranten $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z < 0$.

5. Beräkna summan $f(z)$ av den dubbelsidiga potensserien

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{4^{n+1}} + \sum_{n=1}^\infty \frac{n}{z^n}$$

   i största möjliga ring $R_1 < |z| < R_2$ där den konvergerar. Ange R_1 och R_2, samt beräkna $\int_{C_\rho} f(z)\,dz$ om $R_1 < \rho < R_2$ och C_ρ är cirkeln $|z| = \rho$ ett varv moturs.

6. (a) Formulera maximumprincipen i begränsade områden.

   (b) Bestäm maximum av $|z^2 + z + i|$ då $|z| \le 1$, och ange var det antas.

   (c) Antag att f är analytisk i en omgivning till ringen $1 \le |z| \le 2$ och att $|f| \le 1$ då $|z| = 1$ och $|f| \le 4$ då $|z| = 2$. Visa att $|f(z)| \le |z|^2$ i ringen.

7. Antag att f är analytisk i $\mathbb{C}$ utom möjligen i punkterna $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, $n \in \mathbb{N}$, och sätt

$$g(z) = \frac{1}{z^2} \cdot f\Big(\frac{1}{z}\Big), \qquad z \neq 0.$$

   Visa att g har isolerad singularitet i origo, och beräkna $\operatorname*{Res}_{z=0} g(z)$.

TATA45 Komplex analys 2022-01-15, lösningsskisser

1. (a) Cauchy-Riemanns ekvationer ger först $u'_x = -\sin x \cosh y + e^{-x}\cos y - y = v'_y$, som integrerad m.a.p. y ger $v = -\sin x \sinh y + e^{-x}\sin y - y^2/2 + \varphi(x)$, där φ är en reellvärd funktion av en reell variabel. Derivering m.a.p. x och insättning i $u'_y = -v'_x$ ger sedan $\varphi'(x) = x$, alltså $\varphi(x) = x^2/2 + A$, där A är en reell konstant. Vi får

$$f = u + iv = (\cos x \cosh y - e^{-x}\cos y - xy) + i(-\sin x \sinh y + e^{-x}\sin y - y^2/2 + x^2/2 + A),$$

och eftersom $i = f(0) = u(0,0) + i\,v(0,0) = 0 + iA$ får vi $A = 1$. f är alltså en hel funktion, och på realaxeln $z = x$ sammanfaller den med den hela funktionen $g(z) = \cos z - e^{-z} + iz^2/2 + i$. Entydighetssatsen ger därför att $f(z) = g(z)$ överallt.

<u>Svar</u>: $f(z) = \cos z - e^{-z} + iz^2/2 + i$.

(b) För att v ska kunna vara imaginärdel av en analytisk funktion i ett område Ω är det *nödvändigt* att $\Delta v = v''_{xx} + v''_{yy} = 0$ i hela Ω, men $v = x^2y^2$ ger $\Delta v = 2x^2 + 2y^2$ som är noll endast i origo och inte i någon hel icketom öppen mängd.

2. Att $w(0) = 2$ ger med nödvändighet $w(-3i) = 0$, eftersom 0 och $-3i$ är spegelpunkter m.a.p. cirkeln $|z - i| = 2$, och 2 och 0 är spegelpunkter m.a.p. linjen $\operatorname{Re} w = 1$ (rita figurer och redovisa detaljerna; *fullständiga lösningar krävs!*). Eftersom dessutom $w(2+i) = \infty$ (randpunkt på randpunkt) är Möbiusavbildningen entydigt bestämd: $w(z) = \big((-2+4i)/3\big)\big((z+3i)/(z-(2+i))\big)$. Denna avbildar cirkeln $|z-i| = 2$ på linjen $\operatorname{Re} w = 1$, och eftersom $w(0) = 2$ avbildar den dessutom området $|z - i| < 2$ på halvplanet $\operatorname{Re} w > 1$ (inre punkt avbildas på inre punkt).

Låt I vara imaginäraxeln $\operatorname{Re} z = 0$ i z-planet och $\tilde{I}$ den $\hat{\mathbb{C}}$-cirkel i w-planet som I avbildas på under $w(z)$ ovan. Eftersom $w(2+i) = \infty$ och $2 + i \notin I$ är $\tilde{I}$ en vanlig cirkel $|w - c| = r$, där centrum $c = w(-2+i) = (3+4i)/3$ eftersom $2+i$ och $-2+i$ är spegelpunkter m.a.p. I och ∞ och c är spegelpunkter m.a.p. $\tilde{I}$. Vidare, t.ex. $-3i \in I$ ger $w(-3i) = 0 \in \tilde{I}$, så $r = \big|0 - (3+4i)/3\big| = 5/3$, så $\tilde{I}$ är cirkeln $|w - (3+4i)/3| = 5/3$.

<u>Svar</u>: $w(z) = \dfrac{-2+4i}{3} \cdot \dfrac{z+3i}{z-(2+i)}$; bilden är cirkeln $\left|w - \dfrac{3+4i}{3}\right| = \dfrac{5}{3}$.

3. Eftersom integranden är jämn kan vi skriva den sökta integralen

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+2)} = \frac{1}{2}\cdot J, \quad \text{där} \quad J = \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+2)}.$$

Sätt $f(z) = 1/\big((z^2+1)^2(z^2+2)\big)$. Låt L_R vara sträckan från $-R$ till R och C_R^+ halvcirkeln från R till $-R$ i övre halvplanet och sätt $\Gamma_R = L_R + C_R^+$ (rita figur!). Om $R > \sqrt{2}$ så är f analytisk på och innanför Γ_R förutom i dubbelpolen $z = i$ och i enkelpolen $z = i\sqrt{2}$. Enligt residysatsen och sedvanlig residyberäkning är därför

$$\begin{aligned}
\int_{L_R + C_R^+} f(z)\,dz &= 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=i\sqrt{2}} f(z)\right) = \Big/ f(z) = \frac{(z+i)^{-2}(z^2+2)^{-1}}{(z-i)^2} = \frac{(z^2+1)^{-2}}{z^2+2} \Big/ \\
&= 2\pi i \left(\frac{d}{dz}\big((z+i)^{-2}(z^2+2)^{-1}\big)\Big|_{z=i} + \frac{(z^2+1)^{-2}}{\frac{d}{dz}(z^2+2)}\Big|_{z=i\sqrt{2}} \right) \\
&= 2\pi i \left(\big(-2(z+i)^{-3}(z^2+2)^{-1} - (z+i)^{-2}(z^2+2)^{-2}2z\big)\Big|_{z=i} + \frac{(z^2+1)^{-2}}{2z}\Big|_{z=i\sqrt{2}} \right) \\
&= 2\pi i \left(-\frac{1}{4i} + \frac{1}{2\sqrt{2}\,i} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\big(\sqrt{2} - 1\big), \qquad R > \sqrt{2}. \qquad (*)
\end{aligned}$$

Vidare,

$$\int_{L_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(t)\,dt \to J, \qquad R \to \infty,$$

och en ML-uppskattning ger, eftersom $|z^2+1| \geq \big||z|^2-|1|\big| = R^2-1>0$ och $|z^2+2| \geq R^2-2>0$ på C_R^+ om $R>\sqrt{2}$, att

$$\left|\int_{C_R^+} f(z)\,dz\right| \leq \frac{1}{(R^2-1)^2(R^2-2)}\cdot \pi R \to 0, \qquad R\to\infty,$$

av gradskäl, så $\int_{C_R^+} f(z)\,dz \to 0$ då $R\to\infty$.

Låt nu $R\to\infty$ i $(*)$. Då får vi att $J+0 = \pi(\sqrt{2}-1)/2$, så $I = J/2 = \pi(\sqrt{2}-1)/4$.

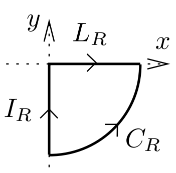
<u>Svar</u>: $\dfrac{\pi(\sqrt{2}-1)}{4}$.

4. Studera argumenttillskottet för $p(z) = z^3+(1-i)z^2+(2+i)z+2$ när z genomlöper konturen $C_R - L_R - I_R$ (se figur nedan; observera orienteringen). Vi får att $\Delta_{C_R}\arg p(z) = \Delta_{C_R}\arg z^3 + \Delta_{C_R}\arg\big(1+(1-i)/z+(2+i)/z^2+2/z^3\big) \to 3\cdot\pi/2+0 = 3\pi/2$ då $R\to\infty$.

På L_R är $p(z) = p(x) = (x^3+x^2+2x+2)+i\,x(1-x) = u+iv$, där $x: 0\to R$. Notera att $u\geq 2$ för aktuella x, och att $v/u\to 0$ då $x\to+\infty$ av gradskäl, så u drar mer än v.

På I_R är $p(z) = p(iy) = (2-y-y^2)+i(2y+y^2-y^3) = (1-y)(2+y)+i\,y(2-y)(1+y) = u+iv$, där $y: -R\to 0$, och $u/v\to 0$ då $y\to-\infty$ av gradskäl, så v drar mer än u.

Vi får därför nedanstående teckentabeller och kurva $w=p(z)$ när z genomlöper I_R och L_R:



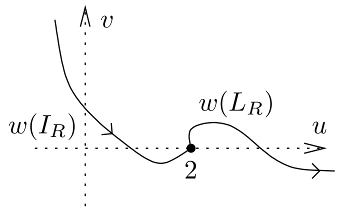
$\Gamma_R = C_R - L_R - I_R$

I_R:

y	$<$	-2	$<$	-1	$<$	0
u	$-$	0	$+$	$+$	$+$	2
v	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0

L_R:

x	0	$<$	1	$<$
u	2	$+$	$+$	$+$
v	0	$+$	0	$-$



Från figuren ovan till höger ser vi att $\Delta_{I_R}\arg p(z)\to -\pi/2$ och $\Delta_{L_R}\arg p(z)\to 0$ då $R\to\infty$, och eftersom poler saknas medför argumentprincipen att antalet nollställen för $p(z)$ i fjärde kvadranten är $(1/2\pi)\lim_{R\to\infty}\Delta_{C_R-L_R-I_R}\arg p(z) = \big(3\pi/2-0-(-\pi/2)\big)/2\pi = 1$.

<u>Svar</u>: Ett.

5. Eftersom

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n = \frac{1}{1-s}, \quad |s|<1, \qquad \text{och} \qquad \sum_{\substack{n=0\\ \text{eller } 1}}^{\infty} n s^n = \frac{s}{(1-s)^2}, \qquad |s|<1,$$

där den andra serien fås efter termvis derivering av den första följd av multiplikation med s, får vi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{4^{n+1}} = \frac{z}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{z^2}{4}\Big)^n = \frac{z}{4}\cdot\frac{1}{1-(-z^2/4)} = \frac{z}{z^2+4}, \qquad |z|<2,$$

och

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n\Big(\frac{1}{z}\Big)^n = \frac{1/z}{(1-1/z)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}, \qquad |z|>1.$$

Således får vi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{4^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{z^n} = \frac{z}{z^2+4}+\frac{z}{(z-1)^2}, \qquad 1<|z|<2,$$

så $R_1=1$ och $R_2=2$. Om nu $1<\rho<2$ och C_ρ är cirkeln $|z|=\rho$ tagen ett varv moturs är

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} f(z)\,dz = c_{-1} = 1,$$

koefficienten för $1/z$ i Laurentserien för f i ringen $1<|z|<2$, som vi direkt kan avläsa i serien ovan. Alltså, $\int_{C_\rho} f(z)\,dz = 2\pi i$.

<u>Svar</u>: $\dfrac{z}{z^2+4}+\dfrac{z}{(z-1)^2}$, $1<|z|<2$; integralen $=2\pi i$.

6. (a) (Se kompendiet.)

   (b) Eftersom $p(z) = z^2 + z + i$ är hel analytisk och ickekonstant antas $\max_{|z|\le 1} |p(z)|$ på randen $|z| = 1$ och endast där. Med parametriseringen $z = e^{i\theta}$, $\theta : 0 \to 2\pi$, av enhetscirkeln får vi, om vi i steg $*$ utnyttjar att $|e^{i\theta}| = 1$,

$$\begin{aligned} |z^2 + z + i|^2 &= |e^{i2\theta} + e^{i\theta} + i|^2 \overset{*}{=} |e^{i\theta} + 1 + i\,e^{-i\theta}|^2 = (\cos\theta + 1 + \sin\theta)^2 + (\sin\theta + \cos\theta)^2 \\ &= \big/ \text{sätt } t = \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\sin(\theta + \pi/4) \big/ = 2t^2 + 2t + 1 \\ &= 2(t + 1/2)^2 + 1/2, \qquad \text{där} \quad -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}. \end{aligned}$$

   Detta uttryck antar sitt största värde, $5 + 2\sqrt{2}$, då $t = \sqrt{2}$, d.v.s. då $\theta = \pi/4$, d.v.s. då $z = e^{i\pi/4} = (1 + i)/\sqrt{2}$.

   Svar: Maximum $= \sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$, och det antas i punkten $z = (1 + i)/\sqrt{2}$.

   (c) Sätt $g(z) = f(z)/z^2$. Då är även g analytisk i en omgivning till ringen $1 \le |z| \le 2$ och $|g(z)| = |f(z)|/|z|^2$. Vi får $|g(z)| \le 1/1^2 = 1$ då $|z| = 1$ och $|g(z)| \le 4/2^2 = 1$ då $|z| = 2$, så maximumprincipen i begränsade områden medför att $|g(z)| \le 1$ i hela ringen $1 \le |z| \le 2$, varför $|f(z)| \le |z|^2$ där, vilket skulle bevisas.

7. Sätt $d = \max\{|\alpha_1|, \dots, |\alpha_n|\}$ och låt $R = 1/d$ om $d > 0$ men $R = \infty$ om $d = 0$. Då är f analytisk i området $|z| > d$, så g är analytisk i området $0 < |z| < R$. Alltså är $z = 0$ en isolerad singularitet för g.

   Låt C_r stå för en cirkel $|z| = r$ tagen ett varv moturs. Om $0 < \rho < R$ får vi, med parametriseringarna $s = \rho\,e^{it}$, $t : -\pi \to \pi$ av C_ρ och $w = (1/\rho)\,e^{i\tau}$, $\tau : -\pi \to \pi$ av $C_{1/\rho}$,

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{z=0} g(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} g(s)\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{f(1/s)}{s^2}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{-it}/\rho)}{\rho^2 e^{i2t}}\,i\rho\,e^{it}\,dt \\ &= \Big/ \text{Byt } \tau = -t \Big/ = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\tau}/\rho)\,i\,\frac{e^{i\tau}}{\rho}\,d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{1/\rho}} f(w)\,dw \\ &= \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{w=\alpha_k} f(w), \end{aligned}$$

   eftersom alla singulariteter för f finns innanför cirkeln $C_{1/\rho}$, då ju $1/\rho > d$.

   Svar: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=\alpha_k} f(z)$.

TATA45 Komplex analys 2022-01-15, kommentarer

1. (a) Detta är en kommentar som egentligen gäller flervariabelanalys: Några integrerar *båda* ekvationerna och får då

$$\begin{cases} v = -\sin x \sinh y + e^{-x}\sin y - y^2/2 + \varphi(x) \\ v = -\sin x \sinh y + e^{-x}\sin y + x^2/2 + \psi(y) \end{cases} \qquad \text{(ONÖDIGT, UNDVIK DET)}$$

och påstår sedan direkt att $\varphi(x) = x^2/2 + A$ och $\psi(y) = -y^2/2 + A$ (eller rent av med en annan konstant för ψ i första skedet), utan att motivera att dessa är de *enda möjliga* lösningarna (OKLART PUSSLANDE). För att göra det måste man i så fall från ovanstående båda uttryck för v härleda likheten $\varphi(x) - x^2/2 = \psi(y) + y^2/2$ och säga att eftersom VL här endast beror på x och HL endast på y måste båda leden vara en och samma (reella) konstant A. Gör i stället som i lösningsskissen – både enklare och bättre, och då följer entydigheten med automatik.

När man på slutet ska uttrycka f som $f(z)$ får man inte ha kvar $\bar{z}$, $\operatorname{Re} z$ eller $\operatorname{Im} z$ i svaret – hela poängen är ju att tydligt se att f är en analytisk funktion.

(b) Här kan man alternativt försöka lösa Cauchy-Riemanns ekvationer, och får då så småningom $\psi'(y) = -2xy^2 - 2x^3/3$ (eller, om man löser dem i omvänd ordning, $\varphi'(x) = 2x^2y + 2y^3/3$), vilket är en motsägelse eftersom VL endast får bero på y medan HL varierar med x, och existensen av f med $\operatorname{Im} f = v$ är därmed motbevisad (motsvarande resonemang om man tar den andra vägen). Observera också att det är FEL att tro att man kan gå vidare och integrera denna ekvation m.a.p. y eftersom den i sig själv är en motsägelse.

2. Några använder inte spegelpunkter för att bestämma $w(z)$ och får då i regel en avbildning som inte avbildar rätt – ja, alla som gjorde så fick fel $w(z)$ denna gång – och även om man skulle råka få rätt $w(z)$ måste man i så fall *bevisa* att den avbildar rätt. Använder man däremot spegelpunkter *vet* man att det blir rätt (se Följdsats 7.30 i kompendiet 2021).

Några tror att bilden av imaginäraxeln blir ett helt område, typiskt $|w - (3+4i)/3| < 5/3$ (FEL); bilden av en $\hat{\mathbb{C}}$-cirkel under Möbius blir alltid en $\hat{\mathbb{C}}$-cirkel.

3. Eftersom integralen är reell och integranden dessutom är positiv är icke-reella svar och reella svar ≤ 0 ORIMLIGA.

Några beräknar residyer fel, typiskt

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1/(z^2+2)}{(z^2+1)^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z^2+2}\right)\Big|_{z=i} \qquad \text{(FEL)}$$

eller

$$\operatorname*{Res}_{z=i\sqrt{2}} \frac{1/(z^2+1)^2}{z^2+2} = \frac{1}{(z^2+1)^2}\Big|_{z=i\sqrt{2}} \qquad \text{(FEL)}$$

som om man bara kunde ta bort allt som ser "farligt" ut.

Många gör fel i ML-uppskattningen, i regel

$$\left|\int_{C_R^+} f(z)\,dz\right| \leq \frac{1}{(R^2+1)^2(R^2+2)} \cdot \pi R \qquad \text{(FEL)}$$

men eftersom $(z^2+1)^2(z^2+2)$ står i *nämnaren* måste dess belopp uppskattas *nedåt* och inte uppåt, se lösningsskissen.

4. Som vanligt räcker det att faktorisera endast den ena av u och v på vardera L_R och I_R om man bara tänker på att man då måste få med tecknen på både u och v för stora positiva x och för stora negativa y (markeras med $+\infty$ respektive $-\infty$ i de respektive tabellerna, se Anmärkning 6.7 i kompendiet 2021).

De allra flesta har faktoriserat $u = x^3 + x^2 + 2x + 2 = (x^2+2)(x+1)$, vilket ju inte är fel men lite onödigt eftersom man omedelbart ser att $u \geq 2$ då $x \geq 0$ och det är tecknet på u man är ute efter.

5. För godkänd uppgift krävs att man har beräknat seriens summa korrekt.

   Observera att seriens konvergensområde bestäms av själva serien, inte primärt av den funktion som ger seriens summa och som i sig kan ha mening som en analytisk funktion i ett större område än det område där serien konvergerar. Ett par studenter har kommit fram till (rätt) summa

$$f(z) = \frac{z}{z^2+4} + \frac{z}{(z-1)^2},$$

   men utan att under resans gång kommentera att detta gäller för $1 < |z| < 2$. I stället konstaterar de att f, som den står, är analytisk i området $\mathbb{C} \setminus \{\pm 2i, 1\}$, vilket är korrekt, och att konvergensområdet *därför* är $1 < |z| < 2$ (FELSLUT). Funktionen som den står är ju analytisk även i områdena $|z| < 1$ och $|z| > 2$, men representerar då summan av andra serier eftersom också

$$\frac{z}{z^2+4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{z^{2n+1}}, \quad |z| > 2, \quad \text{och} \quad \frac{z}{(z-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n, \quad |z| < 1.$$

   Några resonerar så här angående integralen på slutet: f är analytisk i $1 < |z| < 2$, och *därför* är $\int_{C_\rho} f(z)\,dz = 0$, enligt Cauchys integralsats (FEL). Cirkeln $|z| = \rho$ är randkurva till området $|z| < \rho$, men f är ju inte analytisk i hela $|z| \leq \rho$.

   Några räknar ut att $\int_{C_\rho} f(z)\,dz = 2\pi i$ m.h.a. koefficienten c_{-1} för $1/z$, som i lösningsskissen, vilket är rätt och bra, men kallar detta tal för residy, vilket är FEL (men medförde inget poängavdrag); residyn för en funktion f i en punkt z_0 är ju koefficienten c_{-1} för $1/(z - z_0)$ i Laurentserien för f i en punkterad skiva $0 < |z - z_0| < \delta$ där f är analytisk, se Definition 5.1 i kompendiet 2021.

6. (a) Många skriver att f antar maximum på randen (FEL), men det är ju den reella funktionen $|f|$ som gör det; f själv är komplexvärd, och att tala om maximum av f är bokstavligen meningslöst.

   Satsen förutsätter att $f \in \mathcal{A}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, men det godkänns även om man förutsätter att $f \in \mathcal{A}(\bar{\Omega})$ – det är också så satsen normalt används. Att däremot bara förutsätta att f är analytisk i Ω räcker inte – att den är kontinuerlig ut på randen $\partial\Omega$ krävs också.

   (b) Observera att z^2, z och i aldrig kan vara parallella och lika riktade då $|z| = 1$ eftersom det skulle kräva att $z^2 = i$ och $z = i$ samtidigt, vilket är omöjligt (om $z = i$ är ju $z^2 = -1$).

   Några har, med parametriseringen $z = e^{i\theta}$, härlett sambandet

$$h(\theta) := |z^2 + z + i|^2 = 3 + 2\cos\theta + 2\sin\theta + 4\cos\theta\sin\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

   vilket är korrekt, och får, med eller utan faktoriseringen efter * nedan,

$$h'(\theta) = -2\sin\theta + 2\cos\theta + 4(-\sin^2\theta + \cos^2\theta) \overset{*}{=} (\cos\theta - \sin\theta)(2 + 4\cos\theta + 4\sin\theta),$$

   också korrekt, men tror att enda nollställena för $h'(\theta)$ finns där $\cos\theta = \sin\theta$ (FEL); även punkterna där $\cos\theta + \sin\theta = -1/2$ uppfyller $h'(\theta) = 0$.

   (c) Några tror att det faktum att $|f(z)| \leq |z|^2$ både på $|z| = 1$ och $|z| = 2$ med automatik medför att olikheten $|f(z)| \leq |z|^2$ gäller i hela ringen, som om $|g| \leq |h|$ på randen medförde att $|g| \leq |h|$ i området för analytiska g och h (FELSLUT). Som ett enkelt motexempel, låt $g(z) = 1$ och $h(z) = 2z - 3$. Eftersom $|h(z)| = |2z - 3| \geq |2|z| - 3| = 1$ både då $|z| = 1$ och $|z| = 2$ följer att $|g| \leq |h|$ på ringens rand, men t.ex. $|g(3/2)| = 1$ medan $|h(3/2)| = 0$.

7. Inget att kommentera.

Lars Alexandersson, 28 januari 2022