Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: `TATA45`
Modul: `TEN1`

Tentamen i Komplex analys (TATA45)

2022-03-18 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Fullständiga lösningar krävs. Varje uppgift ger 0–3 poäng, och för betyg 3/4/5 räcker 8/11/14 poäng och 3/4/5 uppgifter bedömda med minst 2 poäng vardera. Lösningsskisser publiceras på kurshemsidan preliminärt kl 21.00.

1. Lös ekvationen
$$\cos z - (2+i)\sin z = -1.$$
Svaret ska ges i rektangulär form, alltså i formen $a+ib$, $a,b \in \mathbb{R}$.

2. Beräkna
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\pi x/2}}{x^2+2x+2}\,dx.$$

3. Utveckla funktionen
$$f(z) = \frac{84}{z^3 - z^2 - 12z}$$
i en Laurentserie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-1)^n$ i största möjliga område (vilket?) som innehåller punkten $z = 2+i$.

4. Bestäm antalet nollställen som polynomet
$$p(z) = z^5 - 19z^2 + 21iz + 1$$
har i följande områden: (a) $2 < |z| < 3$ (b) $|z| < 1$. (2p+1p)

5. Låt
$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z - i\sqrt{3}| < 2,\ \operatorname{Re} z < 0,\ \operatorname{Im} z < 0\}.$$
Bestäm om möjligt en Möbiusavbildning $w(z)$ som tar Ω på en cirkelsektor
$$\tilde{\Omega} = \{w \in \mathbb{C} : 0 < |w| < 1,\ 0 < \operatorname{Arg} w < \alpha\}.$$
Ange också α i så fall, eller bevisa att en sådan avbildning inte finns.

6. Låt C vara halvcirkeln i högra halvplanet från $z = 2i$ till $z = -i$. Beräkna
$$\int_C \tan(\pi z)\,dz.$$

7. Antag att $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ och att $|f(z)| \le 1/|\operatorname{Im} z|$ för alla $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Visa att $f = 0$, förslagsvis genom att tillämpa maximumprincipen på funktionerna
$$g_r(z) = (z^2 - r^2) f(z), \qquad r > 0,$$
på kvadrater med hörn $\pm r \pm ir$.

TATA45 Komplex analys 2022-03-18, lösningsskisser

1. Sätt $s = e^{iz}$. Då är $s \neq 0$, och ekvationen $\cos z - (2+i)\sin z = -1$ är ekvivalent med

$$\frac{s+s^{-1}}{2} - (2+i)\frac{s-s^{-1}}{2i} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad s^2 - is = 1+i \quad \Leftrightarrow \quad \left(s - \frac{i}{2}\right)^2 = \frac{3+4i}{4},$$

som med $s - i/2 = w = u + iv$ blir systemet

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 3/4 & \text{(Re)} \\ 2uv = 1 & \text{(Im)} \\ u^2 + v^2 = 5/4 & \text{(Abs)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 = 1 \\ v^2 = 1/4 \\ 2uv = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad w = \pm\frac{2+i}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} s = 1+i \\ \text{eller} \\ s = -1. \end{cases}$$

Via $z = -i\log s = \arg s - i\ln|s|$ får vi slutligen $z = \pi/4 + 2\pi m - i(\ln 2)/2$ eller $z = \pi + 2\pi n$, där m och n är heltal.

<u>Svar</u>: $z = \pi/4 + 2\pi m - i(\ln 2)/2$ eller $z = \pi + 2\pi n$, där $m, n \in \mathbb{Z}$.

2. Låt $f(z) = e^{-i\pi z/2}/(z^2+2z+2)$; då är vår integral $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \lim_{R\to\infty}\int_{L_R} f(z)\,dz$, där L_R är sträckan från $z = -R$ till $z = R$. Eftersom

$$|e^{-i\pi z/2}| = e^{\pi y/2} \leq 1 \text{ om } y \leq 0$$

integrerar vi längs konturen $\Gamma_R = C_R^- - L_R$, där C_R^- är halvcirkeln från $z = -R$ till $z = R$ i undre halvplanet (rita figur och observera orienteringen!).

f är analytisk förutom i enkelpolerna $z = -1 \pm i$, så när $R > \sqrt{2}$ får vi med residysatsen

$$(*) \qquad \int_{C_R^- - L_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-1-i} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{e^{-i\pi z/2}}{\frac{d}{dz}(z^2+2z+2)}\Bigg|_{z=-1-i} = 2\pi i \cdot \frac{e^{-i\pi z/2}}{2z+2}\Bigg|_{z=-1-i}$$
$$= -\pi e^{-\pi/2 + i\pi/2} = -i\pi e^{-\pi/2},$$

och ML-uppskattning ger

$$\left|\int_{C_R^-} f(z)\,dz\right| \leq \frac{1}{R^2 - 2R - 2}\cdot \pi R \to 0, \qquad R \to \infty,$$

av gradskäl, så $\int_{C_R^-} f(z)\,dz \to 0$ då $R \to \infty$. Genom att låta $R \to \infty$ i $(*)$ får vi till sist $0 - I = -i\pi e^{-\pi/2}$, d.v.s. $I = i\pi e^{-\pi/2}$.

<u>Svar</u>: $i\pi e^{-\pi/2}$.

3. Faktorisering av nämnaren och partialbråksuppdelning ger

$$f(z) = \frac{84}{z^3 - z^2 - 12z} = \frac{84}{z(z-4)(z+3)} = -\frac{7}{z} + \frac{3}{z-4} + \frac{4}{z+3}.$$

f är analytisk förutom i punkterna $z = 0$, $z = 4$ och $z = -3$, som har avstånd 1, 3 respektive 4 till punkten $z = 1$, så konvergensområdena med centrum i $z = 1$ för Laurentserierna till f är $|z-1| < 1$, $1 < |z-1| < 3$, $3 < |z-1| < 4$ och $|z-1| > 4$ (rita figur!). Eftersom serien ska konvergera i punkten $z = 2+i$, som har avstånd $\sqrt{2}$ till punkten 1, inser vi att rätt konvergensområde är ringen $1 < |z-1| < 3$.

Med bytet $w = z - 1$ får vi nu, med geometriska serier $1/(1-q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ för $|q| < 1$, att

$$f(z) = -\frac{7}{w+1} + \frac{3}{w-3} + \frac{4}{w+4} = -\frac{7}{w}\cdot\frac{1}{1+1/w} + \frac{3}{-3}\cdot\frac{1}{1-w/3} + \frac{4}{4}\cdot\frac{1}{1+w/4}$$
$$= \Big/ 1 < |w| < 3 \Big/ = -\frac{7}{w}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{w}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{w}{4}\right)^n$$
$$= \underline{\underline{-7\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{3^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^n}{4^n}, \quad 1 < |z-1| < 3.}}$$

4. (a) På cirkeln $|z| = 3$ sätter vi

$$f(z) = z^5 \qquad \text{och} \qquad g(z) = -19z^2 + 21iz + 1.$$

Eftersom $|f(z)| = |z|^5 = 3^5 = 243$ och $|g(z)| \leq 19|z|^2 + 21|z| + 1 = 19 \cdot 3^2 + 21 \cdot 3 + 1 = 235$ då $|z| = 3$ (och därmed $|f(z)| > |g(z)|$ på hela denna cirkel) ger Rouchés sats att $f(z) + g(z)$, alltså $p(z)$, har lika många nollställen i $|z| < 3$ som $f(z)$, d.v.s. fem.

På cirkeln $|z| = 2$ gör vi i stället uppdelningen

$$f(z) = -19z^2 \qquad \text{och} \qquad g(z) = z^5 + 21iz + 1.$$

På denna cirkel är $|f(z)| = 19|z|^2 = 76$ och $|g(z)| \leq |z|^5 + 21|z| + 1 = 75$, så Rouché ger att $p(z)$ har lika många nollställen i $|z| \leq 2$ som $f(z)$, d.v.s. två.

Sammantaget har $p(z)$ således $5 - 2 = 3$ nollställen i $2 < |z| < 3$.

Svar: Tre.

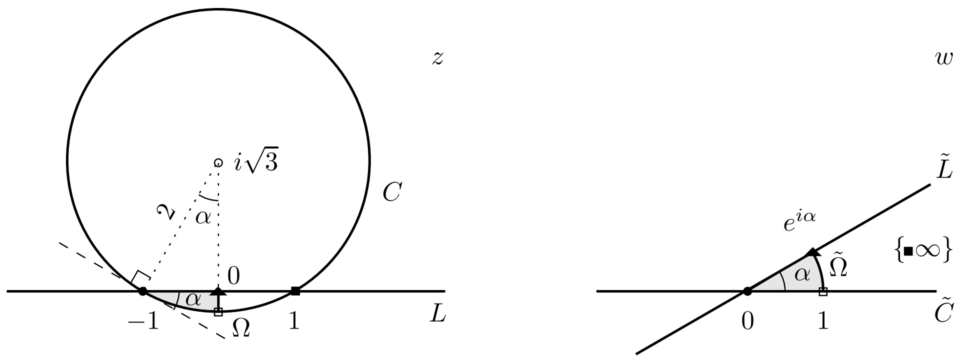
(b) På cirkeln $|z| = 1$ gör vi uppdelningen

$$f(z) = 21iz \qquad \text{och} \qquad g(z) = z^5 - 19z^2 + 1.$$

På denna cirkel är $|f(z)| = 21|z| = 21$ och $|g(z)| \leq |z|^5 + 19|z|^2 + 1 = 21$, med likhet i olikheten precis då talen z^5, $-19z^2$ och 1, som vektorer, är parallella och lika riktade, d.v.s., eftersom dessutom $|z| = 1$, precis då $z^5 = 1$ och $z^2 = -1$. Men $z^2 = -1$ precis då $z = \pm i$, och eftersom $i^5 = i \neq 1$ och $(-i)^5 = -i \neq 1$ inser vi att $|g(z)| < 21$ på hela cirkeln $|z| = 1$, så Rouché medför att $p(z)$ har lika många nollställen i $|z| < 1$ som $f(z)$, d.v.s. ett.

Svar: Ett.

5. Man ser lätt att cirkeln $C : \left|z - i\sqrt{3}\right| = 2$ och realaxeln L skär varandra i $z = \pm 1$, och Ω blir det skuggade området nere till vänster.



Möbiusavbildningar avbildar (delar av) $\hat{\mathbb{C}}$-cirklar på (delar av) $\hat{\mathbb{C}}$-cirklar och bevarar skärningsvinklar. Randen $\partial\Omega$ består av en cirkelbåge och två sträckor, och skärningsvinklarna vid moturs omlopp med början i $z = -1$ är α, $\pi/2$ och $\pi/2$, där konstruktionen med en halv liksidig triangel i figuren ovan till vänster visar att $\alpha = \pi/6$.

Låter vi $w(-1) = 0$ och $w(1) = \infty$ kommer cirkeln C och realaxeln L att avbildas på två räta linjer $\tilde{C}$ och $\tilde{L}$ med skärningsvinkel α i $w = 0$. Om vi dessutom låter $w(0) = e^{i\alpha}$ får vi bilden uppe till höger, eftersom den korta lodräta sträckan i $\partial\Omega$ avbildas på en del av en $\hat{\mathbb{C}}$-cirkel som skär de båda linjerna $\tilde{C}$ och $\tilde{L}$ under rät vinkel, alltså på en cirkelbåge vars motsvarande hela cirkel har centrum i origo. Således avbildas Ω på en efterfrågad cirkelsektor $\tilde{\Omega}$, med $\alpha = \pi/6$.

Trippeln $(-1, 1, 0) \mapsto (0, \infty, e^{i\alpha})$ bestämmer entydigt $w(z) = e^{i\alpha}(1+z)/(1-z)$, med $\alpha = \pi/6$.

Svar: $w(z) = e^{i\pi/6}\dfrac{1+z}{1-z} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2} \cdot \dfrac{1+z}{1-z};\ \ \alpha = \dfrac{\pi}{6}.$

Anmärkning (inte en del av lösningen): Det finns ingen annan Möbius som avbildar på önskat sätt eftersom med nödvändighet $w(-1) = 0$ (så att spetsen hamnar i $w = 0$), $w(1) = \infty$ (så att $\tilde{C}$ och $\tilde{L}$ blir linjer) och $w(0) = e^{i\alpha}$ (så att cirkelsektorn ligger rätt i vinkelled och får rätt radie).

6. Sätt $f(z) = \tan(\pi z) = \sin(\pi z)/\cos(\pi z)$. f är singulär där $\cos \pi z = 0$, d.v.s. där $e^{2\pi i z} = -1$, d.v.s. där $z = 1/2 + n$, $n \in \mathbb{Z}$, och där har $\cos(\pi z)$ enkla nollställen.

   Låt L vara sträckan från $-i$ till $2i$. På och innanför konturen $C + L$, som är *negativt* orienterad, är f analytisk förutom i punkten $z = 1/2$ (rita figur!). Residysatsen ger

$$\int_{C+L} f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=1/2} f(z) = -2\pi i \frac{\sin(\pi z)}{\frac{d}{dz}\big(\cos(\pi z)\big)}_{|z=1/2} = -2\pi i \frac{\sin(\pi z)}{-\pi \sin(\pi z)}_{|z=1/2} = 2i,$$

   och med parametriseringen $z = it$, $t : -1 \to 2$, av L får vi därför

$$\int_C f(z)\,dz = 2i - \int_L f(z)\,dz = 2i - \int_{-1}^{2} \frac{i \sinh(\pi t)}{\cosh(\pi t)} \cdot i\,dt = 2i + \left[\frac{\ln\cosh(\pi t)}{\pi}\right]_{-1}^{2} = \underline{\underline{\frac{1}{\pi}\ln\frac{\cosh 2\pi}{\cosh \pi} + 2i}}.$$

7. Fixera $c \in \mathbb{C}$; vi ska visa att $f(c) = 0$.

   Låt $r > |c|$. Då ligger c i kvadraten med hörn $\pm r \pm ir$. Sätt $g_r(z) = (z^2 - r^2)f(z)$, som i ledningen; vi ser att $g_r \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$. Vi ska nu uppskatta $|g_r(z)|$ på kvadratens rand.

   På de vågräta sträckorna $z = x \pm ir$, $|x| \le r$, är $|f(z)| \le 1/|y| = 1/r$ och vi får därför $|g_r(z)| \le \big(|z|^2 + r^2\big)|f(z)| \le (2r^2 + r^2)/r = 3r$.

   På de lodräta sträckorna $z = \pm r + iy$, $|y| \le r$, är $|z^2 - r^2| = |\pm i2ry - y^2| \le |y|\big(|y| + 2r\big)$, och eftersom $|f(z)| \le 1/|y|$ då $y \ne 0$ och $f(\pm r) \in \mathbb{C}$ (då $y = 0$) får vi $|g_r(z)| \le |y| + 2r \le 3r$ även här; notera att $g_r(\pm r) = 0$.

   Alltså är $|g_r(z)| \le 3r$ på kvadratens hela rand. Maximumprincipen i begränsade områden medför därför att denna olikhet gäller i hela kvadraten; speciellt är $|g_r(c)| \le 3r$. Denna olikhet, tillsammans med omvända triangelolikheten, ger nu

$$|f(c)| = \frac{|g_r(c)|}{|c^2 - r^2|} \le \frac{3r}{r^2 - |c|^2}, \qquad r > |c|.$$

   Här är $|f(c)|$ oberoende av r, och olikheten gäller för alla $r > |c|$. Eftersom $3r/(r^2 - |c|^2) \to 0$ då $r \to \infty$ för vårt fixa c måste $|f(c)| = 0$, d.v.s. $f(c) = 0$, vilket skulle bevisas.

TATA45 Komplex analys 2022-03-18, kommentarer

1. Uttryck som $\sqrt{3/4+i}$ (som strängt taget inte är definierat i TATA45) och $(3/4+i)^{1/2}$ måste beräknas genom att lösa andragradsekvationen $w^2 = 3/4+i$ och får inte ingå i svaret.

   Ett fåtal svarar med $z = -i\log(\cdots)$, men detta är inte i rektangulär form.

   I just detta fall är det lätt att se att ekvationen i fråga, $s^2 - is = 1+i$, har en lösning $s = -1$, och sedan kan man få lösningen $s = 1+i$ efter faktorisering. Några säger dock att ekvationen *endast* har lösningen $s = -1$ (FEL).

2. Ett mycket vanligt fel (24 av 53 tentander gjorde det) är att studera konturen $L_R + C_R^+$, alltså att använda en halvcirkel i *övre* halvplanet i stället för en halvcirkel i *undre* halvplanet. Detta är ett PRINCIPFEL eftersom $|e^{-i\pi z/2}| = e^{\pi y/2}$ är obegränsad i övre halvplanet. Se avsnitt 5.4 om Fourierintegraler i kompendiet.

   Ett par studenter tror att $|e^{-i\pi z/2}| = 1$ (FEL), men detta är ju bara sant om $z \in \mathbb{R}$.

   Några tror att $e^{i\pi/2} = (1+i)/\sqrt{2}$ (FEL) i stället för det korrekta $e^{i\pi/2} = i$.

3. Vi söker en serie med potenser av $(z-1)$, så att svara med en serie med potenser av z är FEL.

   Några tror att området $1 < |w| < 3$, där $w = z-1$, kan skrivas $2 < |z| < 4$ (FEL).

   Några tror att $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = 1/(1-q)$ (FEL) i stället för $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1/(1-q)$ då $|q| < 1$.

   Precis som i lösningsskissen är det OK att svara med flera serier.

4. En allmän kommentar är att det är lätt att få rätt *svar* med felaktiga resonemang i Rouchéuppgifter.

   (b) Några säger att $-19z^2$ är likriktad med 1 precis då $z = i$ (FEL); detta gäller precis då $z = \pm i$.

   I övrigt förekommer det ett antal ”klassiska” fel i lösningarna. Se kommentarerna till uppgift 3 på tentamen 2021-01-16 för en allmän diskussion.

5. Flera tror sig se att $\alpha = \pi/4$ i figuren i z-planet (FEL). Andra tror att $\alpha = \pi/2$ (FEL).

   Vinkeln α kan också bestämmas via $y = \sqrt{3} - \sqrt{4-x^2}$ på undre halvan av cirkeln och man får då $y'(-1) = -1/\sqrt{3}$. Metoder från flervariabelanalys kan också användas.

   Alternativt kan man konstruera $w(z)$ genom att observera att $(-1, (\sqrt{3}-2)i, 0) \mapsto (0, 1, e^{i\alpha})$, men då blir räkningarna lite trassligare. Observera att *orienteringen* är viktig här, eftersom området till vänster avbildas på området till vänster när man går runt ränderna i denna ordning; några har i stället avbildat $(-1, (\sqrt{3}-2)i, 0) \mapsto (0, e^{i\alpha}, 1)$, men detta blir alltså FEL.

6. Några tror att C också innehåller sträckan från $-i$ till $2i$ (FEL); uppgiften blir dessutom mycket lättare på detta sätt.

   Att direkt försöka beräkna integralen med primitiva funktioner blir mycket svårare eftersom man då måste undersöka (lokala) grenar till $\log(\cos \pi z)$. Ett variabelbyte $w = e^{i2\pi z}$ i integralen och så småningom undersökningar av grenar till $\log(w+1)$ och $\log w$ längs kurvan $w(C)$ i w-planet är genomförbart men mycket svårare och rekommenderas ej!

7. Inget att kommentera.

Lars Alexandersson, 22 mars 2022