Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA45
Modul: TEN1

Tentamen i Komplex analys (TATA45)

2022-08-25 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Fullständiga lösningar krävs. Varje uppgift ger 0–3 poäng, och för betyg 3/4/5 räcker 8/11/14 poäng och 3/4/5 uppgifter bedömda med minst 2 poäng vardera. Lösningsskisser publiceras på kurshemsidan preliminärt kl 21.00.

1. Bestäm en Möbiusavbildning $w(z)$ som avbildar punkterna $z_1 = 0$, $z_2 = 2$ och $z_3 = i$ på i tur och ordning $w_1 = -1$, $w_2 = i$ och $w_3 = \infty$. Bestäm sedan bilderna i w-planet av realaxeln $\operatorname{Im} z = 0$ och cirkeln $|z + i| = 3$ i z-planet.

2. Bestäm antalet nollställen som polynomet
$$p(z) = z^3 + (1 - 2i)z^2 + 3iz + 2i$$
har i undre halvplanet $\operatorname{Im} z < 0$.

3. Beräkna med residykalkyl
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(5 + 4\cos\theta)^2}.$$

4. Låt
$$f(z) = \frac{128}{5 + 3\cosh z}.$$
Bestäm alla termer av grad högst 5 i Maclaurinserien för f, och bestäm denna series konvergensradie R. Ange också $f^{(4)}(0)$.

5. Låt Ω vara komplexa planet med positiva imaginäraxeln borttagen.
   (a) Bestäm en gren $f(z)$ till $\log z$ i Ω för vilken $f(1) = 0$, och beräkna sedan $f(-1 + i)$.
   (b) Om C är halvcirkeln i Ω från $z = 1$ till $z = -1 + i$, beräkna $\int_C f(z)\,dz$, där f är funktionen i (a). Svara i rektangulär form $a + ib$, där $a, b \in \mathbb{R}$.

6. (a) Formulera Liouvilles sats. (1p)
   (b) Bestäm alla $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ sådana att $|f(z)| \leq e^{\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z}$ för alla $z \in \mathbb{C}$. (2p)

7. Bestäm antalet nollställen som funktionen
$$e^z + 2iz - 1$$
har i enhetsskivan $|z| < 1$.

TATA45 Komplex analys 2022-08-25, lösningsskisser

1. Att $(0, i) \mapsto (-1, \infty)$ ger oss ansatsen

$$\frac{w+1}{1} = k\,\frac{z}{z-i}, \text{ och } 2 \mapsto i \text{ ger sedan } k = \frac{3+i}{2}, \text{ så } w = \frac{(1+i)z+2i}{2z-2i}.$$

Låt L vara realaxeln i z-planet och $\tilde{L}$ den $\hat{\mathbb{C}}$-cirkel i w-planet som L avbildas på under $w(z)$ ovan. Eftersom $w(i) = \infty$ och $i \notin L$ är $\tilde{L}$ en vanlig cirkel $|w-c| = r$, där centrum $c = w(-i) = (-1+i)/4$ eftersom i och $-i$ är spegelpunkter m.a.p. L och ∞ och c är spegelpunkter m.a.p. $\tilde{L}$. Vidare, $0 \in L$ ger $w(0) = -1 \in \tilde{L}$, så $r = \big|-1-(-1+i)/4\big| = \big|(-3-i)/4\big| = \sqrt{10}/4$, och $\tilde{L}$ är därmed cirkeln $\big|w-(-1+i)/4\big| = \sqrt{10}/4$.

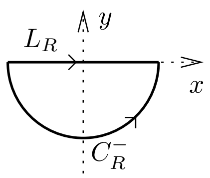
Låt nu C vara cirkeln $|z+i| = 3$ i z-planet och $\tilde{C}$ den $\hat{\mathbb{C}}$-cirkel i w-planet som C avbildas på under $w(z)$ ovan. Eftersom $w(i) = \infty$ och $i \notin C$ är också $\tilde{C}$ en vanlig cirkel $|w-c| = r$, där centrum $c = w(7i/2) = (11+7i)/10$ eftersom i och $7i/2$ är spegelpunkter m.a.p. C och ∞ och c är spegelpunkter m.a.p. $\tilde{C}$; notera att i och $7i/2$ ligger på samma stråle från $-i$ och på avstånd $\ell_1 = 2$ respektive $\ell_2 = 3^2/2$ från $-i$. Vidare, $2i \in C$ ger $w(2i) = 2+i \in \tilde{C}$, så $r = \big|(2+i)-(11+7i)/10\big| = \big|(9+3i)/10\big| = 3\sqrt{10}/10$, och $\tilde{C}$ är därmed cirkeln $\big|w-(11+7i)/10\big| = 3\sqrt{10}/10$.

<u>Svar</u>: $w(z) = \dfrac{(1+i)z+2i}{2z-2i}$; bilderna är $\left|w - \dfrac{-1+i}{4}\right| = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$ respektive $\left|w - \dfrac{11+7i}{10}\right| = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

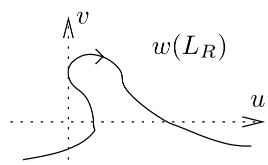
2. Vi studerar argumenttillskottet för $p(z) = z^3 + (1-2i)z^2 + 3iz + 2i$ när z genomlöper kurvan $\Gamma_R = C_R^- - L_R$ (se figur nere till vänster; observera orienteringen).

På C_R^- får vi tillskottet $\Delta_{C_R^-} \arg p(z) = \Delta_{C_R^-} \arg z^3 + \Delta_{C_R^-} \arg\big(1 + (1-2i)/z + 3i/z^2 + 2i/z^3\big) \to 3\cdot\pi + 0 = 3\pi$ då $R \to \infty$.

På L_R får vi $p(z) = p(x) = (x^3+x^2) + i(2+3x-2x^2) = x^2(x+1) + i\,(2-x)(1+2x) = u + iv$, och därmed följande teckentabell för u och v:



x	$<$	-1	$<$	$-1/2$	$<$	0	$<$	2	$<$
u	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
v	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$



Dessutom får vi av gradskäl att $v/u \to 0$ då $x \to \pm\infty$ (u drar mer än v), och detta tillsammans med tabellen ovan ger figuren ovan till höger, där vi ser att $\Delta_{L_R} \arg p(z) \to \pi$ då $R \to \infty$. Antalet nollställen i undre halvplanet blir därför $(1/2\pi)\lim_{R\to\infty}(\Delta_{C_R^-} \arg p(z) - \Delta_{L_R} \arg p(z)) = (3\pi - \pi)/2\pi = 1$, eftersom poler saknas, allt enligt argumentprincipen.

<u>Svar</u>: Ett.

3. Med $z = e^{i\theta}$ får vi, där C är den positivt orienterade enhetscirkeln $|z| = 1$ tagen ett varv,

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(5+4\cos\theta)^2} = \int_C \frac{dz/iz}{\big(5+4(z+z^{-1})/2\big)^2} = \frac{1}{4i}\int_C \frac{z\,dz}{(z^2+5z/2+1)^2}.$$

Eftersom $z^2+5z/2+1 = (z+1/2)(z+2)$ ser vi att integranden endast har singulariteten $z = -1/2$ (dubbelpol) innanför C – singulariteten $z = -2$ ligger ju utanför – så residysatsen och sedvanlig residyberäkning ger

$$I = \frac{1}{4i}\cdot 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=-1/2} \frac{z}{(z+1/2)^2(z+2)^2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{d}{dz}\big(z\,(z+2)^{-2}\big)\Big|_{z=-1/2}$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\big((z+2)^{-2} - 2z(z+2)^{-3}\big)\Big|_{z=-1/2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{4}{9}+\frac{8}{27}\right) = \frac{10\pi}{27}.$$

4. Med $w = e^z$ är nämnaren

$$5 + 3\cosh z = 0 \quad\Leftrightarrow\quad w^2 + 10w/3 + 1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad w = -3 \text{ eller } w = -1/3$$
$$\Leftrightarrow\quad z = \pm\ln 3 + i(\pi + 2n\pi),\ n \in \mathbb{Z}.$$

Täljaren $= 128 \neq 0$, så i dessa punkter har f poler, men är analytisk för övrigt. Maclaurinserien för f konvergerar därför i skivan $|z| < R$, där R är avståndet till närmaste pol från origo sett, $\pm\ln 3 \pm i\pi$ (fyra poler ligger lika nära), så $R = \sqrt{(\ln 3)^2 + \pi^2}$.

f är jämn, så vi kan göra den enkla ansatsen

$$f(z) = c_0 + c_2 z^2 + c_4 z^4 + \mathcal{O}(z^6).$$

Standardutvecklingen $\cosh z = 1 + z^2/2 + z^4/24 + \mathcal{O}(z^6)$ ger $5 + 3\cosh z = 8 + 3z^2/2 + z^4/8 + \mathcal{O}(z^6)$, och därmed får vi

$$\begin{aligned} 128 &= \big(c_0 + c_2 z^2 + c_4 z^4 + \mathcal{O}(z^6)\big)\big(8 + 3z^2/2 + z^4/8 + \mathcal{O}(z^6)\big) \\ &= 8c_0 + (3c_0/2 + 8c_2)z^2 + (c_0/8 + 3c_2/2 + 8c_4)z^4 + \mathcal{O}(z^6), \end{aligned}$$

och identifiering av koefficienterna ger i tur och ordning sambanden $8c_0 = 128$, $3c_0/2 + 8c_2 = 0$, $c_0/8 + 3c_2/2 + 8c_4 = 0$, d.v.s. $c_0 = 16$, $c_2 = -3$, $c_4 = 5/16$, så $f(z) = 16 - 3z^2 + 5z^4/16 + \mathcal{O}(z^6)$.

Slutligen, $c_4 = f^{(4)}(0)/4!$, så $f^{(4)}(0) = 24c_4 = 15/2$.

Svar: $f(z) = 16 - 3z^2 + \dfrac{5z^4}{16} + \mathcal{O}(z^6)$; $R = \sqrt{(\ln 3)^2 + \pi^2}$; $f^{(4)}(0) = \dfrac{15}{2}$.

5. (a) $f(z) = \ln|z| + i\,\theta(z)$, där θ är ett kontinuerligt varierande argument för z i Ω. Kravet $f(1) = 0$ ger $\theta(1) = 0$, vilket också är ett argument för 1. Alltså kan grenen i Ω, d.v.s. komplexa planet med positiva imaginäraxeln borttagen, skrivas

$$f(z) = \ln|z| + i\,\theta(z), \qquad -3\pi/2 < \theta(z) < \pi/2,$$

och eftersom $\theta(-1+i) = -5\pi/4$ får vi $f(-1+i) = (\ln 2)/2 - i5\pi/4$.

(b) Eftersom $f'(z) = 1/z$ i Ω följer, med partialintegration, att $F(z) = zf(z) - z$ är en primitiv funktion till $f(z)$ i Ω, d.v.s. $F'(z) = f(z)$ i Ω, så

$$\begin{aligned} \int_C f(z)\,dz &= F(-1+i) - F(1) = \Big(\big(-1+i\big)\big((\ln 2)/2 - i5\pi/4\big) - \big(-1+i\big)\Big) - \Big(-1\Big) \\ &= \big(5\pi/4 - (\ln 2)/2 + 2\big) + i\big(5\pi/4 + (\ln 2)/2 - 1\big). \end{aligned}$$

6. (a) Om f är hel analytisk och begränsad, så är f konstant.

(b) Eftersom $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = x + y = \operatorname{Re}(z - iz)$ får vi att $|e^{z-iz}| = e^{\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z}$. Sätt $g(z) = f(z)/e^{z-iz}$; då är g en hel analyisk funktion för vilken $|g(z)| = |f(z)|/e^{\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z} \leq 1$. Enligt Liouvilles sats finns det därför en konstant $C \in \mathbb{C}$ sådan att $g(z) = C$ för alla $z \in \mathbb{C}$, och denna konstant uppfyller $|C| \leq 1$. Således är $f(z) = C\,e^{z-iz}$.

Omvänt, om $f(z) = C\,e^{z-iz}$, där $C \in \mathbb{C}$ är en konstant med $|C| \leq 1$, följer trivialt att $|f(z)| = |C|\,e^{\operatorname{Re}(z-iz)} = |C|\,e^{\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z} \leq e^{\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z}$.

Svar: $f(z) = C\,e^{z-iz}$, där $C \in \mathbb{C}$ är en konstant för vilken $|C| \leq 1$.

7. Sätt $f(z) = 2iz$ och $g(z) = e^z - 1$; då är $e^z + 2iz - 1 = f(z) + g(z)$. På cirkeln $|z| = 1$ är $|f(z)| = 2$ och

$$|g(z)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 1 < 2,$$

så enligt Rouchés sats har $e^z + 2iz - 1$ lika många nollställen i $|z| < 1$ som $f(z) = 2iz$, alltså ett.

Svar: Ett.

TATA45 Komplex analys 2022-08-25, kommentarer

1. Observera att bilden av en $\hat{\mathbb{C}}$-cirkel under Möbius alltid blir en $\hat{\mathbb{C}}$-cirkel, så att få bilden av linjen eller cirkeln i z-planet till en cirkelskiva eller ett halvplan i w-planet är ORIMLIGT.

   Några tror att det faktum att den punkt, $z = i$, som avbildas på $w = \infty$ ligger innanför cirkeln $|z+i| = 3$ medför att bilden av cirkeln blir en linje (FEL) – för det krävs att punkten $z = i$ ligger *på* cirkeln.

2. Eftersom polynomet har grad 3 är svar $\notin \{0,1,2,3\}$ ORIMLIGA.

   7 studenter (av totalt 43) skriver $\arg p(z) = \arg z^3 + \arg\big((1-2i)/z + 3i/z^2 + 2i/z^3\big)$ (FEL) i stället för det korrekta $\arg p(z) = \arg z^3 + \arg\big(\mathbf{1} + (1-2i)/z + 3i/z^2 + 2i/z^3\big)$. Notera att tillskottet för $\arg\big((1-2i)/z + 3i/z^2 + 2i/z^3\big)$ längs C_R^- går mot $-\pi$, inte 0, då $R \to \infty$.

   En handfull studenter gör fel i faktoriseringen av v och tror att $-2x^2 + 3x + 2 = (x-2)(x+1/2)$ (FEL) i stället för det korrekta $-2x^2 + 3x + 2 = (-2)(x-2)(x+1/2)$, och som en konsekvens får de då felaktigt att polynomet har två nollställen i undre halvplanet i stället för ett.

3. Integralen är tydligt positiv, så icke-reella svar och reella svar ≤ 0 är ORIMLIGA (7 svarade så).

   Även här gör många – hela 8 studenter – ett elementärt fel och tror att

   $$5 + 2\Big(z + \frac{1}{z}\Big) = (z+2)\Big(z + \frac{1}{2}\Big) \qquad \text{(FEL)}.$$

   Visserligen är $5 + 2(z + 1/z) = 0$ då $z = -2$ eller $z = -1/2$, men $(z+2)(z+1/2) = z^2 + 5z/2 + 1$. En korrekt omskrivning är i stället

   $$5 + 2\Big(z + \frac{1}{z}\Big) = \frac{2}{z}\Big(z^2 + \frac{5z}{2} + 1\Big) = \frac{2}{z}(z+2)\Big(z + \frac{1}{2}\Big).$$

4. Det går naturligtvis utmärkt att ansätta $f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5 z^5 + \mathcal{O}(z^6)$, och då ser man lätt i ekvationssystemet att $c_1 = c_3 = c_5 = 0$.

   Några utvecklar för kort: $f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + \mathcal{O}(z^5)$, men då får man inte tag i termen av grad 5 (alltså $c_5 z^5$ ovan).

   Några tror att f saknar poler (FEL), baserat på att de tror att $e^z > 0$ (FEL) eller $\cosh z \geq -1$ (FEL) eller $\cosh z \geq 1$ (FEL); e^z antar ju alla komplexa värden utom 0 och $\cosh z$ antar alla komplexa värden, medan däremot $e^x > 0$ och $\cosh x \geq 1$ för *reella* x.

5. Det måste framgå hur $f(z)$ kan beräknas för alla $z \in \Omega$, så endast värdet för $f(-1+i)$ räcker inte.

6. Inget att kommentera.

7. Nästan alla som har försökt lösa uppgiften har använt Rouchés sats, men har gjort något grundläggande fel, typiskt följande: Med $f(z) = 2iz - 1$ och $g(z) = e^z$ får vi $|f(z)| \leq |2iz| + |-1| = 3$ och $|g(z)| = e^x \leq e < 3$ då $|z| = 1$ (rätt hittills), men tror att detta medför att $|f(z)| > |g(z)|$ då $|z| = 1$ (FEL); att $A \leq 3$ och $B < 3$ medför inte att $A > B$ (tag t.ex. $A = 1$, $B = 2$).

   En student gav sig på att studera själva ekvationen $e^z = 1 - 2iz$, översatte den till två reella ekvationer, och kom en bit på vägen i att visa att $z = 0$ är det enda nollstället i skivan $|z| < 1$. Eftersom vi i komplex analys alltid räknar antal nollställen med multiplicitet måste man dessutom motivera att nollstället är enkelt för att komma fram till rätt svar (ett).

   (Här kommer detaljer för en alternativ lösning, som dock inte har mycket med komplex analys att göra och därför bör hoppas över! Vi får $e^x \cos y = 1 + 2y$ (1), $e^x \sin y = -2x$ (2). Att $|z| < 1$ medför att $-1 < y < 1$, så $\cos y > \cos 1 > 0$, varför $e^x \cos y > 0$ och (1) ger $-1/2 < y < 1$. Vidare, $e^x = (1+2y)/\cos y$ insatt i (2) ger $h(y) := (1+2y)\tan y + 2\ln(1+2y) - 2\ln\cos y = 0$. Här ser man lätt att h är strängt växande på $[0,1[$ (hur?) och att $h(0) = 0$, så $-1/2 < y \leq 0$, vilket i (2) medför att $x \geq 0$. Om vi nu för fixt x, $0 \leq x < 1$, skriver (1) som $k(y) := 1 + 2y - e^x \cos y = 0$ för $-1/2 < y \leq 0$ ser vi att $k(0) = 1 - e^x \leq 0$, med likhet precis då $x = 0$, och att $k'(y) = 2 + e^x \sin y > 2 + e^x \sin(-1/2) = 2 - e^x \sin(1/2) > 2 - e^x/2 > 2 - e/2 > 0$, så k är strängt växande på $]-1/2, 0]$, varför $k(y) < 0$ då $-1/2 < y < 0$ eller då $y = 0$ och $0 < x < 1$. Enda möjligheten är alltså $x = 0 = y$, d.v.s. $z = 0$, och trivialt är då (1) och (2) uppfyllda. Alltså är $z = 0$ det enda nollstället för $\varphi(z) := e^z + 2iz - 1$ i skivan $|z| < 1$, och eftersom $\varphi'(0) = 1 + 2i \neq 0$ är det enkelt.)

Lars Alexandersson, 4 september 2022