Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: `TATA45`
Modul: `TEN1`

Tentamen i Komplex analys (TATA45)

2023-01-14 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Fullständiga lösningar krävs. Varje uppgift ger 0–3 poäng, och för betyg 3/4/5 räcker 8/11/14 poäng och 3/4/5 uppgifter bedömda med minst 2 poäng vardera. Lösningsskisser publiceras på kurshemsidan senast måndag 16/1.

1. (a) Bestäm alla värden på i^{-i}.
   (b) Lös ekvationen $\tanh z = 3$. Svara i rektangulär form $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.
   (c) Om $f(z)$ är principalgrenen till $z^{1/2}$, beräkna $f'(-2i)$ i rektangulär form.

2. Bestäm en Möbiusavbildning $w(z)$ som tar cirkeln $|z-1| = 2$ på linjen $\operatorname{Re} w + \operatorname{Im} w = 0$ samtidigt som $w(3) = \infty$ och $w(-3) = -1$. Bestäm sedan bilden i w-planet av realaxeln i z-planet.

3. Bestäm antalet nollställen som polynomet
$$p(z) = z^5 + 3z^2 - 16z + 3$$
har i (a) vänstra halvplanet $\operatorname{Re} z < 0$ (b) området $|z| > 1$. (2p+1p)

4. Beräkna
$$\int_0^\infty \frac{x \sin x}{(x^2+4)^2}\, dx.$$

5. (a) Definiera vad som menas med att en analytisk funktion f har nollställe av multiplicitet N i punkten z_0.
   (b) Undersök om polynomet
$$p(z) = z^4 + (1-5i)z^3 - (9+3i)z^2 - (3-7i)z + (2+i)$$
har ett nollställe av multiplicitet 3. Lös sedan ekvationen $p(z) = 0$.
(Att endast pröva sig fram till nollställena ger inte godkänd uppgift.)

6. Låt Log som vanligt vara principallogaritmen, och sätt
$$f(z) = \frac{1}{(e^{4z}+1)\operatorname{Log}(1-iz)}.$$
Bestäm koefficienterna c_{-1} och c_0 i Laurentserien
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$
för f i största möjliga område (vilket?) som innehåller punkten $z = 4/5$.

7. Låt $a_1, a_2, \ldots$ vara komplexa tal sådana att $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$ och
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n a_k = 0 \qquad \text{för alla } n \in \mathbb{N}.$$
Visa att $a_k = 0$ för alla $k \geq 1$.

TATA45 Komplex analys 2023-01-14, lösningsskisser

1. (a) $i^{-i} = \exp\big((-i)\log i\big) = \exp\big((-i)(i\pi/2 + i2n\pi)\big) = e^{\pi/2+2n\pi}$, $n \in \mathbb{Z}$.

   (b) Med $w = e^{2z}$ nedan får vi

$$3 = \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{(e^z - e^{-z})/2}{(e^z + e^{-z})/2} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1} = \frac{w-1}{w+1} \quad \Leftrightarrow \quad w = -2,$$

   så

$$2z = \log(-2) = \ln 2 + i(\pi + 2n\pi), \quad \text{d.v.s.} \quad z = \frac{\ln 2}{2} + i\Big(\frac{\pi}{2} + n\pi\Big),\ n \in \mathbb{Z}.$$

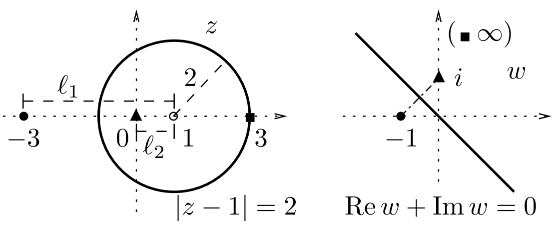
   (c) Att $f(z) = \widetilde{z^{1/2}} = \exp\big((\operatorname{Log} z)/2\big)$, principalgrenen till $z^{1/2}$, ger

$$f'(z) = \frac{1}{2}\widetilde{z^{-1/2}} = \frac{1}{2}\exp\big(-(\operatorname{Log} z)/2\big),$$

   så

$$f'(-2i) = \frac{1}{2}\exp\big(-(\ln 2 - i\pi/2)/2\big) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{1+i}{4}.$$

2. Vi har kravet $w(-3) = -1$. Spegelpunkten till $z = -3$ m.a.p. cirkeln $|z-1| = 2$ är $z = 0$, ty sambandet $\ell_1\ell_2 = r^2 = 2^2$ där $\ell_1 = 4$ (se figur) ger $\ell_2 = 1$. Vidare är spegelpunkten till $w = -1$ m.a.p. linjen $\operatorname{Re} w + \operatorname{Im} w = 0$ punkten $w = i$ (trivialt). Eftersom spegelpunkter bevaras under Möbius måste $w(0) = i$. Tillsammans med att $w(3) = \infty$ (randpunkt på randpunkt) är avbildningen entydigt bestämd, och ansatsen $(w-i)/1 = kz/(z-3)$, där k bestäms av att $w(-3) = -1$, ger slutligen $w(z) = -\big((2+i)z + 3i\big)/(z-3)$.



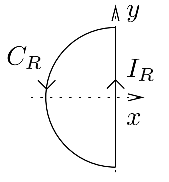
   Låt L vara realaxeln $\operatorname{Im} z = 0$ i z-planet och $\tilde{L}$ den $\hat{\mathbb{C}}$-cirkel i w-planet som L avbildas på under $w(z)$ ovan. Eftersom $z = 3 \in L$ och $w(3) = \infty \in \tilde{L}$ följer att $\tilde{L}$ är en linje, och eftersom $0, -3 \in L$ och därmed $i, -1 \in \tilde{L}$ följer att $\tilde{L}$ är linjen $\operatorname{Re} w - \operatorname{Im} w = -1$.

   <u>Svar</u>: $w(z) = -\dfrac{(2+i)z + 3i}{z-3}$; bilden är linjen $\operatorname{Re} w - \operatorname{Im} w = -1$.

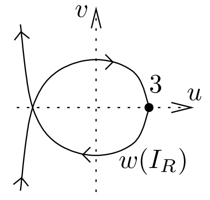
3. (a) Vi studerar argumenttillskottet för $p(z) = z^5 + 3z^2 - 16z + 3$ när z genomlöper kurvan $\Gamma_R = C_R + I_R$ (se figur nere till vänster).

   På C_R får vi tillskottet $\Delta_{C_R} \arg p(z) = \Delta_{C_R} \arg z^5 + \Delta_{C_R} \arg(1 + 3/z^3 - 16/z^4 + 3/z^5) \to 5 \cdot \pi + 0 = 5\pi$ då $R \to \infty$.

   På I_R får vi $p(z) = p(iy) = (-3y^2 + 3) + i(y^5 - 16y) = 3(1 - y^2) + iy(y^4 - 16) = u + iv$, $y : -R \to R$, och därmed nedanstående teckentabell då $y \geq 0$ (observera att u är jämn och v är udda), samt kurva $w = p(z)$ då z genomlöper I_R:



y	0	<	1	<	2	<
u (jämn)	3	+	0	−	−	−
v (udda)	0	−	−	−	0	+



   Dessutom får vi av gradskäl att $u/v \to 0$ då $y \to \pm\infty$ (v drar mer än u), och detta tillsammans med tabellen ovan ger skissen ovan till höger, där vi ser att $\Delta_{I_R} \arg p(z) \to -3\pi$ då $R \to \infty$. Eftersom poler saknas blir antalet nollställen i vänstra halvplanet därför $(1/2\pi)\lim_{R\to\infty}(\Delta_{C_R} \arg p(z) + \Delta_{I_R} \arg p(z)) = (5\pi - 3\pi)/2\pi = 1$, enligt argumentprincipen.

   <u>Svar</u>: Ett.

   (b) Sätt $f(z) = -16z$ och $g(z) = z^5 + 3z^2 + 3$. På hela cirkeln $|z| = 1$ är $|f(z)| = |-16||z| = 16$ och $|g(z)| \leq |z|^5 + |3||z|^2 + |3| = 7 < 16$, så $|f(z)| > |g(z)|$ för alla z på denna cirkel. Enligt Rouchés sats har därför $p(z) = f(z) + g(z)$ lika många nollställen i $|z| \leq 1$ som $f(z)$, d.v.s. ett, och eftersom $p(z)$ är ett polynom av grad 5 och därför har totalt fem nollställen i $\mathbb{C}$ har $p(z)$ $5 - 1 = 4$ nollställen i $|z| > 1$.

   <u>Svar</u>: Fyra.

4. Eftersom integranden är jämn och rent reell, och $\sin x = \operatorname{Im}(e^{ix})$, inser vi att den sökta integralen kan skrivas

$$I = \int_0^\infty \frac{x \sin x}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x \sin x}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{\operatorname{Im} J}{2}, \qquad \text{där} \qquad J = \int_{-\infty}^\infty \frac{x\,e^{ix}}{(x^2+4)^2}\,dx.$$

Låt $f(z) = z\,e^{iz}/(z^2+4)^2 = z\,(z+2i)^{-2}(z-2i)^{-2}e^{iz}$; då är $J = \int_{-\infty}^\infty f(t)\,dt$. Låt vidare L_R vara sträckan från $z = -R$ till $z = R$ och C_R^+ halvcirkeln från $z = R$ till $z = -R$ i övre halvplanet (rita figur!). Vi observerar att $|e^{iz}| = e^{-y} \le 1$ på C_R^+ eftersom $y \ge 0$ där, så ML-uppskattning ger $\left|\int_{C_R^+} f(z)\,dz\right| \le \bigl(R \cdot 1/(R^2-4)^2\bigr) \cdot \pi R \to 0$ då $R \to \infty$, av gradskäl. Residysatsen ger, då $R > 2$,

$$\int_{L_R + C_R^+} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) = \Big/ f(z) = \frac{z\,(z+2i)^{-2}e^{iz}}{(z-2i)^2} \Big/ = 2\pi i \cdot \frac{d}{dz}\bigl(z\,(z+2i)^{-2}e^{iz}\bigr)_{|z=2i}$$

$$= 2\pi i\bigl((z+2i)^{-2} - 2z\,(z+2i)^{-3} + iz\,(z+2i)^{-2}\bigr)e^{iz}{}_{|z=2i} = \frac{\pi i}{4e^2},$$

och genom att låta $R \to \infty$ här (observera att $\int_{L_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^R f(t)\,dt \to J$ då $R \to \infty$) får vi

$$J + 0 = \frac{\pi i}{4e^2}, \qquad \text{så} \qquad I = \frac{\operatorname{Im} J}{2} = \frac{\pi}{8e^2} = \underline{\text{svar}}.$$

5. (a) f sägs ha nollställe av multiplicitet $N \in \{1,2,3,\dots\}$ i z_0 om $f(z) = (z-z_0)^N g(z)$ i någon omgivning till z_0, där g är analytisk i z_0 och $g(z_0) \ne 0$.

(b) c är nollställe av multiplicitet 3 till p precis då $p(c) = p'(c) = p''(c) = 0$ men $p'''(c) \ne 0$ (observera att detta inte är *definitionen*, men ekvivalent med den – se kompendiet). Eftersom

$$p''(z) = 12z^2 + (6z - 30i)z - (18+6i)$$

ser vi att $p''(z) = 0$ precis då

$$z^2 + \frac{(1-5i)z}{2} - \frac{3+i}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(z + \frac{1-5i}{4}\right)^2 = \frac{(1-5i)^2}{4^2} + \frac{3+i}{2} = -\frac{i}{8}.$$

Sätt $w = u + iv = z + (1-5i)/4$. Vi får då ekvationerna

$$u^2 - v^2 = 0 \text{ (Re)}, \quad 2uv = -1/8 \text{ (Im)}, \quad u^2 + v^2 = 1/8 \text{ (Abs)},$$

d.v.s. $u^2 = 1/16$ och $v^2 = 1/16$, och u och v har motsatta tecken; vi får $w = \pm(1-i)/4$ och därmed $z = -(1-5i)/4 \pm (1-i)/4$, d.v.s. $z_1 = i$ och $z_2 = -1/2 + 3i/2$, som alltså är nollställena till $p''(z)$. Ett av dessa – inte båda, av gradskäl – kan vara ett trippelt nollställe c. Vi testar $z_1 = i$ först, det är enklast: att $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ och $i^4 = 1$ ger

$$p(i) = 1 + (1-5i)\cdot(-i) - (9+3i)\cdot(-1) - (3-7i)\cdot i + (2+i) = 0,$$

vilket är lovande, men vi måste kontrollera att även $p'(i) = 0$:

$$p'(z) = 4z^3 + (3-15i)z^2 - (18+6i)z - (3-7i)$$

vilket ger

$$p'(i) = 4\cdot(-i) + (3-15i)\cdot(-1) - (18+6i)\cdot i - (3-7i) = 0.$$

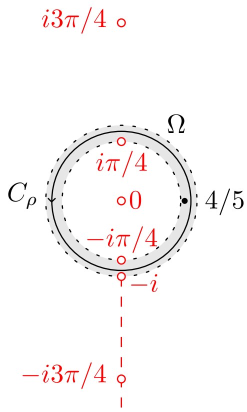
Alltså är $p(i) = p'(i) = p''(i) = 0$, men $p'''(z) = 24z + (6-30i)$ ger $p'''(i) = 6 - 6i \ne 0$, så i är nollställe till p av multiplicitet 3. Det återstående nollstället d får vi enklast genom att observera att, eftersom p har högstagradskoefficient 1,

$$p(z) = 1\cdot(z-i)^3(z-d) = z^4 + Az^3 + Bz^2 + Cz - id,$$

där A, B och C också ges av uttryck i d. Entydighet hos koefficienterna ger $-id = 2+i$, d.v.s. $d = -1+2i$.

<u>Svar</u>: p har ett nollställe av multiplicitet 3, och nollställena är $z_{1,2,3} = i$, $z_4 = -1+2i$.

6. Nämnaren $(e^{4z}+1)\,\mathrm{Log}(1-iz)$ är analytisk utom där iz är reellt och ≥ 1, d.v.s. utom där $z = iy$, $y \leq -1$. Vidare,



$$
\begin{aligned}
e^{4z}+1=0 \quad &\Leftrightarrow \quad 4z = \log(-1) = i\pi + i2k\pi \\
&\Leftrightarrow \quad z = i\pi/4 + i\pi k/2,\ k \in \mathbb{Z},
\end{aligned}
$$

och

$$\mathrm{Log}(1-iz) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-iz = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0.$$

Det finns därför två cirkelringar med centrum i origo där f är analytisk: $0 < |z| < \pi/4$ (som ju är en punkterad cirkelskiva) och $\pi/4 < |z| < 1$, och eftersom $\pi/4 < |4/5| < 1$ (ty $\pi < 3{,}2$) ska vi utveckla f i Laurentserie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ i ringen $\pi/4 < |z| < 1$, se figur.

Laurentkoefficienterna c_n i denna ring ges av integralformeln

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{dz}{z^{n+1}(e^{4z}+1)\,\mathrm{Log}(1-iz)}, \qquad \frac{\pi}{4} < \rho < 1,\ n \in \mathbb{Z},$$

där C_ρ är cirkeln $|z| = \rho$ tagen ett varv moturs.

Innanför C_ρ finns singulariterna $z = 0$ och $z = \pm i\pi/4$. Eftersom $\pm i\pi/4$ är enkelpoler får vi

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=\pm i\pi/4} \frac{f(z)}{z^{n+1}} &= \frac{z^{-n-1}/\,\mathrm{Log}(1-iz)}{\frac{d}{dz}(e^{4z}+1)}_{|z=\pm i\pi/4} = \frac{z^{-n-1}}{4\,e^{4z}\,\mathrm{Log}(1-iz)}_{|z=\pm i\pi/4} \\
&= \frac{(\pm i\pi/4)^{-n-1}}{4(-1)\ln(1\pm\pi/4)} = \begin{cases} -\dfrac{1}{4\ln(1\pm\pi/4)}, & n=-1, \\ \dfrac{\pm i}{\pi\ln(1\pm\pi/4)}, & n=0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

För att bestämma residyn i 0 serieutvecklar vi, och noterar först att, med standardutvecklingar,

$$
\begin{aligned}
z^{n+1}(e^{4z}+1)\,\mathrm{Log}(1-iz) &= z^{n+1}\big(2+4z+\mathcal{O}(z^2)\big)\big(-iz+z^2/2+\mathcal{O}(z^3)\big) \\
&= -2iz^{n+2}\big(1+(2+i/2)z+\mathcal{O}(z^2)\big),
\end{aligned}
$$

så, med $(1+s)^{-1} = 1-s+\mathcal{O}(s^2)$ där $s = (2+i/2)z+\mathcal{O}(z^2)$ och därmed $\mathcal{O}(s^2) = \mathcal{O}(z^2)$,

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^{n+1}(e^{4z}+1)\,\mathrm{Log}(1-iz)} = \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{i/2}{z^{n+2}}(1-(2+i/2)z+\mathcal{O}(z^2)) = \begin{cases} i/2, & n=-1, \\ 1/4-i, & n=0. \end{cases}$$

Residysatsen ger slutligen att c_n är summan av residyerna i dessa tre punkter:

$$c_n = \begin{cases} -\dfrac{1}{4\ln(1+\pi/4)} - \dfrac{1}{4\ln(1-\pi/4)} + \dfrac{i}{2}, & n=-1, \\ \dfrac{1}{4} + \dfrac{i}{\pi\ln(1+\pi/4)} - \dfrac{i}{\pi\ln(1-\pi/4)} - i, & n=0. \end{cases}$$

7. Sätt $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ och $G = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$; enligt förutsättningen existerar G och $G < 1$. Eftersom

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k z^k|} = |z| \cdot \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = |z|G$$

följer av rotkriteriet att potensseriens konvergensradie $R = 1/G$ (om $G = 0$ är $R = \infty$), och f är analytisk i $|z| < R$, där $R > 1$.

Speciellt är f analytisk i punkten $z = 1$, och

$$f(1) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k{}_{|z=1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} k^0 a_k = 0$$

enligt förutsättningen (med $n = 0$). Vidare,

$$f'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}{}_{|z=1} = \sum_{k=1}^{\infty} k^1 a_k = 0$$

(med $n = 1$). Allmänt får vi

$$f^{(m)}(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-m+1) a_k z^{k-m}{}_{|z=1} = \sum_{n=0}^{m} \beta_{m,n} \sum_{k=1}^{\infty} k^n a_k = 0, \qquad m \geq 2,$$

(med $n = 0, \ldots, m$), där talen $\beta_{m,n}$ ges av $k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-m+1) = \sum_{n=0}^{m} \beta_{m,n} k^n$, som ju är ett polynom av grad m. Alltså är $f^{(m)}(1) = 0$ för alla $m \in \mathbb{N}$.

I skivan $|z-1| < R-1$, som ju ryms i skivan $|z| < R$, är därför, med Taylorutveckling,

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(1)}{m!}(z-1)^m = 0, \qquad |z-1| < R-1,$$

och entydighetssatsen för analytiska funktioner medför att $f(z) = 0$ i hela skivan $|z| < R$, varför alla f:s Maclaurinkoefficienter $a_k = 0$, $k \geq 1$, vilket skulle bevisas.

TATA45 Komplex analys 2023-01-14, kommentarer

1. (a) Definitionen av flervärda potenser är ju $z^\alpha = \exp(\alpha \log z)$, så $i^{-i} = \exp((-i)\log i)$, som i lösningarna, men en handfull studenter (av 114 skrivande) skriver i stället så här (min numrering):

$$i^{-i} \overset{(1)}{=} \left(e^{i\pi/2+i2n\pi}\right)^{-i} \overset{(2)}{=} e^{(-i)(i\pi/2+i2n\pi)} = e^{\pi/2+2n\pi} \qquad \text{(RÅKAR GE RÄTT SVAR)},$$

vilket är skumt på flera sätt: $i = e^{i\pi/2+i2n\pi}$, ja, men här finns ju ingen variation i n, så i praktiken står det fortfarande bara i^{-i} efter steg (1), eller varför inte bara $(e^{i\pi/2})^{-i}$, vilket i så fall bara skulle ge $e^{\pi/2}$ till slut, med samma (skumma) resonemang som ovan; i steg (2) räknar man som om $(z^\alpha)^\beta = z^{\alpha\beta}$, men det är inte sant i allmänhet – t.ex. är $(i^2)^{1/2} = (-1)^{1/2} = \pm i$ (tvåvärd) medan $i^{2\cdot 1/2} = i^1 = i$ (envärd). (Se även Övning 2.17 i kompendiet 2021 för hur det kan gå om man är slarvig med räknereglerna!)

(b) Det går bra att byta $s = e^z$ också, och då får man på samma sätt $s^2 = -2$, vilket ju är en enkel ekvation att lösa: $s = \pm i\sqrt{2}$, och sedan får man $z = \log(\pm i\sqrt{2}) = \ln\sqrt{2} + i(\pm\pi/2 + 2n\pi) = (\ln 2)/2 + i(\pi/2 + m\pi)$, $m \in \mathbb{Z}$ (den sista omskrivningen behöver inte göras), men det är i regel bättre att byta $w = e^{2z}$ för att slippa att lösa en ofta komplex andragradsekvation.

(c) Inget att kommentera.

2. Några kompletterar de givna punkterna $w(-3) = -1$ och $w(3) = \infty$ med att låta en andra punkt på cirkeln $C : |z-1| = 2$ avbildas på en andra punkt på linjen $\tilde{C} : \operatorname{Re} w + \operatorname{Im} w = 0$, typiskt $w(-1) = 0$. Om man gör så finns inga garantier för att avbildningen blir rätt – med valet $w(-1) = 0$ blir den inte heller det, eftersom C då avbildas på imaginäraxeln! Notera de två metoder som finns: Antingen avbildar man tre randpunkter på tre randpunkter (metod 1 i kompendiet) eller ett par av spegelpunkter på ett par av spegelpunkter samt en randpunkt på en randpunkt (metod 2).

Bilden i w-planet av realaxeln i z-planet blir alltså en linje, och för full poäng måste man ange denna linjes ekvation, $\operatorname{Im} w = \operatorname{Re} w + 1$ eller $v = u + 1$. De flesta svarar $y = x + 1$, vilket väl är OK men lite vilseledande eftersom linjen ligger i w-planet. Att däremot svara $y = x + i$ eller $y = ix + i$ eller liknande blir FEL, eftersom $x, y \in \mathbb{R}$.

3. (a) Självklart behöver man inte utnyttja att u är jämn och v är udda, utan i stället kan man ha med alla reella y i teckentabellen.

Det går som vanligt bra att bara faktorisera den ena av u och v, men då måste man ha med tecknen för både u och v för stora positiva och negativa y som extra kolumner i teckentabellen, lämpligen betecknade med $y = \pm\infty$, se Anmärkning 6.7 i kompendiet 2021.

Ett tiotal tappar den inledande ettan vid faktoriseringen och skriver

$$\Delta_{C_R} \arg(z^5 + 3z^2 - 16z + 3) = \Delta_{C_R} \arg z^5 + \Delta_{C_R} \arg(3/z^3 - 16/z^4 + 3/z^5) \qquad \text{(FEL)};$$

naturligtvis är $z^5 + 3z^2 - 16z + 3 = z^5(1 + 3/z^3 - 16/z^4 + 3/z^5)$.

(b) I denna Rouchéuppgift förekommer det ett antal ”klassiska” fel i lösningarna. Se kommentarerna till uppgift 3 på tentamen 2021-01-16 för en allmän diskussion.

4. Ganska många använder $f(z) = z(\sin z)/(z^2+4)^2$ på samma kontur som i lösningarna, men det blir FEL eftersom $\sin z$ är obegränsad i övre halvplanet (även i undre halvplanet, för övrigt), se Anmärkning 5.21 i kompendiet 2021.

Ett dessbättre sällsynt FEL är att tro att residyn i dubbelpolen $z = 2i$ blir

$$\operatorname*{Res}_{z=2i} \frac{z\,e^{iz}}{(z^2+4)^2} = \frac{d}{dz}(z\,e^{iz})_{|z=2i} \qquad \text{(FEL)}$$

som om man bara kunde ta bort den ”farliga” faktorn i nämnaren.

Notera att $g(x) = \dfrac{x\sin x}{(x^2+4)^2}$ är jämn men att $h(x) = \dfrac{x\,e^{ix}}{(x^2+4)^2}$ inte är jämn, så att $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = 2\int_0^\infty g(x)\,dx$ är uppenbart, men att utan motivering påstå att $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx = 2\int_0^\infty h(x)\,dx$, vilket *är* sant, utgör alltså en OFULLSTÄNDIGHET.

5. (a) Observera alltså hur *definitionen* ser ut (Definition 4.41 i kompendiet 2021). Man ska svara med den, inte med något som i och för sig är ekvivalent med den.

   (b) För att i räkningarna få utnyttja att det finns en faktorisering $p(z) = (z - i)^3 q(z)$ måste man först *bevisa* att $z = i$ är ett (minst) trippelt nollställe till $p(z)$, vilket är ekvivalent med att $p(i) = p'(i) = p''(i) = 0$; om man inte gör det innebär själva faktoriseringen att man *prövar* om $z = i$ är ett (minst) trippelt nollställe (se uppgiftsformuleringen). När man löser $p''(z) = 0$ och får att $p''(i) = 0$ måste man alltså sedan visa (och *nu* duger direkt insättning) att även $p(i) = p'(i) = 0$. Missar man att kolla detta – det ena kravet eller båda – har man alltså inte bevisat att $z = i$ är ett trippelt nollställe.

6. De allra flesta som har lämnat in lösningar på denna uppgift missar att $\operatorname{Log}(1 - iz)$ inte är analytisk på strålen från $z = -i$ rakt nedåt på imaginäraxeln, och de får i regel den felaktiga konvergensringen $\pi/4 < |z| < 3\pi/4$. Några av dessa noterar dock i alla fall att $\operatorname{Log} 0$ är odefinierat och att $z = -i$ därför är en singularitet, och de får därför rätt konvergensring, $\pi/4 < |z| < 1$, men med en ofullständig motivering.

   Endast ett fåtal studenter använder integralformeln för Laurentkoefficienterna, medan de flesta försöker med serieutvecklingar och ansatser, men gör då fel. Det är sant att nämnaren

$$\big(\exp(4z) + 1\big) \operatorname{Log}(1 - iz) = -2iz + (1 - 4i)z^2 + \mathcal{O}(z^3) = z\big(-2i + (1 - 4i)z + \mathcal{O}(z^2)\big)$$

   i skivan $|z| < 1$ (där nämnaren är analytisk), så ansatsen

$$f(z) = \frac{1}{\big(\exp(4z) + 1\big) \operatorname{Log}(1 - iz)} = \frac{a}{z} + b + \mathcal{O}(z), \qquad 0 < |z| < \pi/4,$$

   är korrekt: Nämnaren är ju analytisk och nollskild i den punkterade skivan $0 < |z| < \pi/4$, så f är analytisk där, och f har enkelpol i origo eftersom nämnaren har enkelt nollställe där. Däremot är

$$f(z) = \frac{1}{\big(\exp(4z) + 1\big) \operatorname{Log}(1 - iz)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \qquad \pi/4 < |z| < 1,$$

   med *helt andra* koefficienter, och med oändligt många nollskilda koefficienter med negativa nummer (annars vore konvergensringen för Laurentserien $0 < |z| < 1$). Att göra samma ansats i ringen $\pi/4 < |z| < 1$ som i den punkterade skivan $0 < |z| < \pi/4$ blir alltså FEL.

7. Att $\sum_{k=1}^{\infty} k^n a_k$, $n \in \mathbb{N}$, är konvergenta medför ju, enligt divergenstestet, att $k^n a_k \to 0$ då $k \to \infty$ för alla $n \in \mathbb{N}$. Några påstår att detta, ensamt, med automatik medför att $a_k = 0$ för alla $k \geq 1$ (FEL); som ett enkelt motexempel till detta påstående kan man ta $a_k = e^{-k}$.

Lars Alexandersson, 25 januari 2023