Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA45
Modul: TEN1

Tentamen i Komplex analys

2024-08-29 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Fullständiga lösningar krävs, om inget annat sägs i uppgifterna.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 3 uppgifter, numrerade 1–3, värda 3 poäng var.
- **Del B** består av 3 uppgifter, numrerade 4–6, värda 3 poäng var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2 poäng.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1 och K2, där

K1: 1 poäng på uppgift n eller – men inte för överbetyg – UPGn godkänd ($n = 1, 2, 3$).

K2: 3/4/5 godkända uppgifter och 8/11/14 poäng totalt, där 1/2 bonuspoäng upp till 8 poäng för betyg 3 erhålls vid behov om 2/3 UPG-omgångar är godkända.

Svar finns preliminärt kl 21.00 på kursens hemsida.

Del A

1. Bestäm en Möbiusavbildning som avbildar cirkelskivan $|z-1| < 3$ på halvplanet $\operatorname{Im} w > 1$ samtidigt som $w(2/3) = 2i$ och $w(4) = \infty$. Bestäm sedan bilden i w-planet av linjen $\operatorname{Re} z = 5$ i z-planet.

2. Låt L vara sträckan (raka spåret) från $-1+i$ till $-1-i$. Beräkna integralerna
$$I_1 = \int_L \frac{dz}{z}, \quad I_2 = \int_L \frac{dz}{z^2} \quad \text{och} \quad I_3 = \int_L \frac{2\,dz}{z^2+2z}.$$

3. Beräkna

   (a)
$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{(2z^2 - iz + 1)^2}, \qquad \text{(1p)}$$

   (b)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2x}}{x^2+1}\,dx. \qquad \text{(2p)}$$

Var god vänd!

Del B

4. Bestäm antalet nollställen som polynomet

$$p(z) = z^3 + iz^2 + 2iz + 1$$

har i andra kvadranten $\operatorname{Re} z < 0$, $\operatorname{Im} z > 0$.

5. Bestäm konvergensringen $R_1 < |z| < R_2$ för den dubbelsidiga potensserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2^n n}$$

och beräkna seriens summa för alla z i denna ring.

6. (a) Antag att $f = u + iv$ är analytisk. Uttryck funktionaldeterminanten

$$\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}$$

i komplexa derivatan f'. (1p)

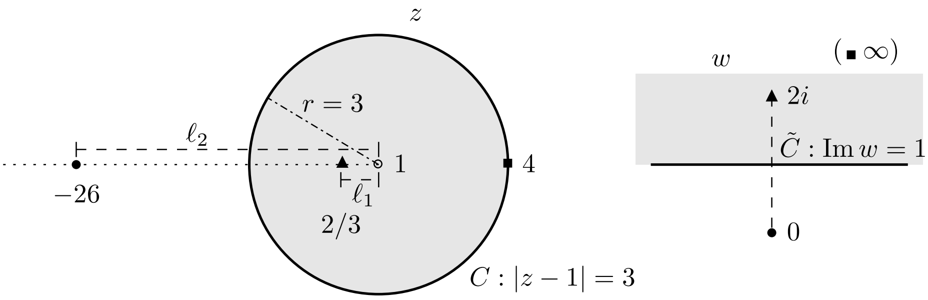
(b) Betrakta avbildningen $w = z^2$. Beräkna arean av den mängd i w-planet som är bild av kvadraten

$$-1 < x < 2, \quad -1 < y < 2,$$

i z-planet. (2p)

TATA45 Komplex analys 2024-08-29, lösningsskisser

1. Låt C vara cirkeln $|z-1|=3$. För att skivan $|z-1|<3$ ska kunna avbildas på halvplanet $\operatorname{Im} w > 1$ med en Möbiusavbildning $w(z)$ måste, till att börja med, rand avbildas på rand, d.v.s. cirkeln C på linjen $\tilde{C}: \operatorname{Im} w = 1$.



(Ej skalenlig på z-sidan)

Att $w(2/3)=2i$ ger med nödvändighet $w(-26)=0$, eftersom $2/3$ och -26 är spegelpunkter m.a.p. cirkeln C (ty $(2/3)^*$ ligger på strålen från mittpunkten 1 genom $2/3$, som har avstånd $\ell_1 = 1/3$ till mittpunkten, och $\ell_1\ell_2 = r^2 = 3^2$, så $\ell_2 = 27$, och därmed är $(2/3)^* = 1-27 = -26$, se figur) och $2i$ och 0 är spegelpunkter m.a.p. linjen $\tilde{C}$. Eftersom dessutom $w(4)=\infty$ (randpunkt på randpunkt) är Möbiusavbildningen entydigt bestämd, och ansatsen $(w-0)/1 = k(z+26)/(z-4)$ och insättning av $w(2/3)=2i$ ger $w(z) = (i/4)(z+26)/(4-z)$. Denna avbildar cirkeln C på linjen $\tilde{C}$, och eftersom $w(2/3)=2i$ avbildar den dessutom området $|z-1|<3$ på halvplanet $\operatorname{Im} w > 1$ (inre punkt avbildas på inre punkt).

Låt L vara linjen $\operatorname{Re} z = 5$ i z-planet och $\tilde{L}$ den $\hat{\mathbb{C}}$-cirkel i w-planet som L avbildas på under $w(z)$ ovan. Eftersom $w(4)=\infty$ och $4 \notin L$ är $\tilde{L}$ en vanlig cirkel $|w-c|=r$, där centrum $c = w(6) = -4i$ eftersom 4 och 6 är spegelpunkter m.a.p. L och ∞ och c är spegelpunkter m.a.p. $\tilde{L}$. Vidare, t.ex. $\infty \in L$ ger $w(\infty) = -i/4 \in \tilde{L}$, så $r = \big|-i/4-(-4i)\big| = 15/4$, så $\tilde{L}$ är cirkeln $|w+4i| = 15/4$.

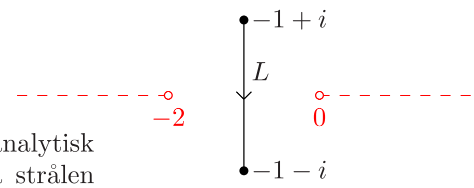
<u>Svar</u>: $w(z) = \dfrac{i}{4}\cdot\dfrac{z+26}{4-z}$; bilden är cirkeln $|w+4i| = \dfrac{15}{4}$.

2. Vi bestämmer primitiver F_1, F_2 och F_3 till

$$f_1(z)=\frac{1}{z},\quad f_2(z)=\frac{1}{z^2}\quad\text{och}\quad f_3(z)=\frac{2}{z^2+2z}=\frac{2}{z(z+2)}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z+2}$$

som existerar i en omgivning till sträckan L, och vi behöver därför bland annat bestämma lämpliga grenar till $\log z$ och $\log(z+2)$. Låt

$$F_1(z) = \ln|z| + i\,\theta(z),\ 0<\theta<2\pi,$$
$$F_2(z) = -1/z,$$
$$F_3(z) = F_1(z) - \operatorname{Log}(z+2).$$



F_1 är analytisk utom på strålen högerut från 0; F_2 är analytisk utom i origo; och $\operatorname{Log}(z+2)$ är analytisk utom på strålen vänsterut från -2 (se figur). Vi får

$$I_1 = \int_L \frac{dz}{z} = F_1(-1-i) - F_1(-1+i) = (\ln|-1-i| + i\frac{5\pi}{4}) - (\ln|-1+i| + i\frac{3\pi}{4}) = \frac{i\pi}{2},$$

$$I_2 = \int_L \frac{dz}{z^2} = F_2(-1-i) - F_2(-1+i) = -\frac{1}{-1-i} + \frac{1}{-1+i} = -i,$$

$$I_3 = \int_L \frac{2\,dz}{z^2+2z} = F_3(-1-i) - F_3(-1+i) = I_1 - \big(\operatorname{Log}(1-i) - \operatorname{Log}(1+i)\big)$$
$$= \frac{i\pi}{2} - \Big((\ln|1-i| - i\frac{\pi}{4}) - (\ln|1+i| + i\frac{\pi}{4})\Big) = i\pi,$$

eftersom $|-1-i| = |-1+i|$ och $|1-i| = |1+i|$ (alla $=\sqrt{2}$). <u>Svar</u>: $I_1 = \dfrac{i\pi}{2}$, $I_2 = -i$, $I_3 = i\pi$.

3. (a) Faktorisering ger $(2z^2 - iz + 1) = (z - i)(2z + i)$, så

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{(2z^2 - iz + 1)^2} = \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{(2z+i)^{-2}}{(z-i)^2} = \frac{d}{dz}(2z+i)^{-2}_{\big|z=i} = -2(2i+i)^{-3} \cdot 2 = -\frac{4i}{27}.$$

(b) Låt $f(z) = e^{i2z}/(z^2+1)$; då är vår integral $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \lim_{R\to\infty} \int_{L_R} f(z)\,dz$, där L_R är sträckan från $z = -R$ till $z = R$. Eftersom

$$|e^{i2z}| = e^{-2y} \leq 1 \text{ om } y \geq 0$$

integrerar vi längs konturen $\Gamma_R = L_R + C_R^+$, där C_R^+ är halvcirkeln från $z = R$ till $z = -R$ i övre halvplanet (rita figur!).

f är analytisk förutom i enkelpolerna $z = \pm i$, så när $R > 1$ får vi med residysatsen

$$(*) \qquad \int_{L_R + C_R^+} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{e^{i2z}}{\frac{d}{dz}(z^2+1)}_{|z=i} = 2\pi i \cdot \frac{e^{i2z}}{2z}_{|z=i} = \frac{\pi}{e^2},$$

och ML-uppskattning ger, eftersom $|z^2+1| \geq |z|^2 - 1 = R^2 - 1 > 0$ på C_R^+ om $R > 1$,

$$\left| \int_{C_R^+} f(z)\,dz \right| \leq \frac{1}{R^2-1} \cdot \pi R \to 0, \qquad R \to \infty,$$

av gradskäl, så $\int_{C_R^+} f(z)\,dz \to 0$ då $R \to \infty$. Genom att låta $R \to \infty$ i $(*)$ får vi till sist $I + 0 = \pi/e^2$, d.v.s. $I = \pi/e^2$.

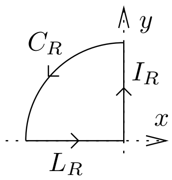
Svar: (a) $-\dfrac{4i}{27}$, (b) $\dfrac{\pi}{e^2}$.

4. Studera argumenttillskottet för $p(z) = z^3 + iz^2 + 2iz + 1$ när z genomlöper konturen $C_R + L_R + I_R$ (se figur nedan). Vi får att $\Delta_{C_R} \arg p(z) = \Delta_{C_R} \arg z^3 + \Delta_{C_R} \arg\big(1 + i/z + 2i/z^2 + 1/z^3\big) \to 3 \cdot \pi/2 + 0 = 3\pi/2$ då $R \to \infty$.

På L_R är $p(z) = p(x) = (x^3+1) + i(x^2+2x) = (x^3+1) + i\,x(x+2) = u + iv$, där $x : -R \to 0$ och där u är strängt växande i x. Vi ser att $v/u \to 0$ då $x \to -\infty$ av gradskäl, så u drar mer än v.

På I_R är $p(z) = p(iy) = (1-2y) + i(-y^3 - y^2) = (1-2y) + i\,y^2(-1-y) = u + iv$, där $y : 0 \to R$, och $u/v \to 0$ då $y \to +\infty$ av gradskäl, så v drar mer än u.

Vi får därför nedanstående teckentabeller och kurva $w = p(z)$ när z genomlöper L_R och I_R:

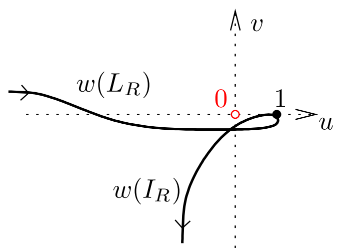


L_R:

x	$<$	-2	$<$	-1	$<$	0
u	$-$	$-$	$-$	0	$+$	1
v	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0

I_R:

y	0	$<$	$1/2$	$<$
u	1	$+$	0	$-$
v	0	$-$	$-$	$-$



Från figuren ovan till höger ser vi att $\Delta_{L_R} \arg p(z) \to \pi$ och $\Delta_{I_R} \arg p(z) \to -\pi/2$ då $R \to \infty$, och eftersom poler saknas medför argumentprincipen att antalet nollställen för $p(z)$ i andra kvadranten är $(1/2\pi) \lim_{R\to\infty} \Delta_{C_R + L_R + I_R} \arg p(z) = \big(3\pi/2 + \pi - \pi/2\big)/2\pi = 1$.

Svar: Ett.

5. Vi börjar med den geometriska serien, som har konvergensradie 1:

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} s^n = 1 + s + s^2 + s^3 + \ldots = \frac{1}{1-s}, \qquad |s| < 1.$$

Deriverar vi $(*)$, och sedan multiplicerar med s, får vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} ns^n = 0 + 1s + 2s^2 + 3s^3 + \ldots = s \cdot \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{1-s}\right) = \frac{s}{(1-s)^2}, \qquad |s| < 1,$$

och gör vi detta en gång till får vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 s^n = 0 + 1^2 s + 2^2 s^2 + 3^2 s^3 + \ldots = s \cdot \frac{d}{ds}\left(\frac{s}{(1-s)^2}\right) = \frac{s^2+s}{(1-s)^3}, \qquad |s| < 1,$$

fortfarande med konvergensradie 1. Med bytet $s = 1/z$ får vi därför

$$\sum_{\substack{n=0\\ \text{eller } 1}}^{\infty} \frac{n^2}{z^n} = \frac{(1/z)^2 + (1/z)}{\big(1-(1/z)\big)^3} = \frac{z+z^2}{(z-1)^3}, \qquad |z| > 1,$$

och serien är divergent om $|z| < 1$. Vidare, om vi i stället integrerar $(*)$ får vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^{n+1}}{n+1} = s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} + \ldots = -\operatorname{Log}(1-s) + C, \qquad |s| < 1,$$

med konvergensradie 1 och någon konstant C. Insättning av $s = 0$ ger att konstanten $C = 0$, så omnumreringen $\sum_{n=0}^{\infty} s^{n+1}/(n+1) = \sum_{n=1}^{\infty} s^n/n$ och bytet $s = z/2$ ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z/2)^n}{n} = -\operatorname{Log}\left(1 - \frac{z}{2}\right), \qquad |z| < 2,$$

och serien är divergent om $|z| > 2$. Således får vi till slut

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2^n n} = \frac{z+z^2}{(z-1)^3} - \operatorname{Log}\left(1 - \frac{z}{2}\right), \qquad 1 < |z| < 2,$$

och den dubbelsidiga serien är divergent om $|z| < 1$ eller $|z| > 2$.

<u>Svar</u>: Konvergensring $1 < |z| < 2$; summa $\dfrac{z+z^2}{(z-1)^3} - \operatorname{Log}\left(1 - \dfrac{z}{2}\right)$.

6. (a) Vi använder Cauchy-Riemanns ekvationer och får

$$\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = u'_x v'_y - u'_y v'_x = u'_x u'_x - (-v'_x) v'_x = (u'_x)^2 + (v'_x)^2 = |u'_x + i v'_x|^2 = |f'|^2.$$

(b) Vi noterar först att $w(z_1) = w(z_2) \Leftrightarrow z_1^2 = z_2^2 \Leftrightarrow z_1 = \pm z_2$. Om vi låter K stå för den givna kvadraten $-1 < x < 2$, $-1 < y < 2$ blir $-K$, alltså kvadraten K vriden ett halvt varv runt origo, kvadraten $-2 < x < 1$, $-2 < y < 1$. Punkterna i snittet

$$\tilde{K} = K \cap (-K) = \{(x,y) : \, -1 < x < 1, \, -1 < y < 1\},$$

som också utgör en kvadrat, avbildas alltså parvis på samma punkt i w-planet, förutom origo, men på olika w-punkter för olika sådana par, medan resten av K avbildas injektivt och på andra punkter än de som $\tilde{K}$ avbildas på. Vidare, $f'(z) = 2z$, så $|f'|^2 = 4|z|^2 = 4(x^2+y^2)$, och bilden $w(K)$ har därför följande area, enligt (a) och flervariabelanalys:

$$\begin{aligned} A &= \iint_{w(K)} du dv = \iint_K 4(x^2+y^2)\, dx dy - \frac{1}{2} \iint_{\tilde{K}} 4(x^2+y^2)\, dx dy \\ &= \int_{-1}^{2} \left(\int_{-1}^{2} (4x^2 + 4y^2)\, dy \right) dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} (4x^2 + 4y^2)\, dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^{2} (12x^2 + 12)\, dx - \int_{-1}^{1} \left(4x^2 + \frac{4}{3} \right) dx = 72 - \frac{16}{3} = \frac{200}{3}. \end{aligned}$$

TATA45 Komplex analys 2024-08-29, kommentarer

1. Några har inte använt spegelpunkten till $z = 2/3$ m.a.p. C och spegelpunkten till $w = 2i$ m.a.p. $\tilde{C}$ för att hitta ett trejde punktpar. I stället avbildar de en andra punkt på C på en andra punkt på $\tilde{C}$, typiskt $w(-2) = i$ eller $w(1-3i) = i$. Gör man så är det inte säkert att bilden blir den rätta, och här *råkar* det första valet ge rätt bild medan det andra valet inte gör det, och eftersom det inte finns någon sats som garanterar att bilden blir rätt om man gör så måste man själv *bevisa* att bilden blir den rätta (om den nu blir det).

   Det går lika bra att ta t.ex. $5 \in L$ för att bestämma radien i cirkeln $\tilde{L}$, via $w(5) = -31i/4$.

2. Varje enskild integral har ju ett enda värde, och att svara med flera värden är ORIMLIGT.

   Observera att man – om man använder komplexa primitiver – måste bestämma *grenar* till de flervärda funktionerna $\log z$ och $\log(z+2)$ som fungerar i en omgivning till sträckan L. Att använda de flervärda funktionerna blir alltså FEL, även om man på något oklart sätt lyckas få flervärdheten att försvinna på slutet.

   Många tror att principallogaritmen $\operatorname{Log} z$ kan användas som gren till $\log z$ här, men den är inte analytisk (inte ens kontinuerlig) i någon omgivning till L eftersom L skär negativa realaxeln. Däremot går alltså $\operatorname{Log}(z+2)$ bra att använda som gren till $\log(z+2)$ här eftersom L *inte* skär strålen som går rakt vänsterut från $z = -2$

   Man kan alternativt parametrisera $L: z = -1 + it$, $t : 1 \to -1$, och räkningarna för I_1 och I_3 blir då lätta – de kräver endast några enkla reella primitiver från Envariabelanalys 1:

$$I_1 = \int_L \frac{dz}{z} = \int_1^{-1} \frac{i\,dt}{-1+it} = i\int_{-1}^{1} \frac{1+it}{1+t^2}\,dt = i\left[\arctan t + i\frac{\ln(1+t^2)}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{i\pi}{2},$$

$$I_3 = \int_L \frac{2\,dz}{z^2+2z} = \int_1^{-1} \frac{2i\,dt}{(-1+it)^2 + 2(-1+it)} = 2i\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2} = 2i\big[\arctan t\big]_{-1}^{1} = i\pi.$$

   (I_2 blir lite svårare eftersom man måste hitta primitiver till (åtminstone) $(t^2-1)/(t^2+1)^2$.)

3. (a) Många löser ekvationen $2z^2 - iz + 1 = 0$ fullständigt för att faktorisera polynomet, vilket inte är fel men lite onödigt eftersom vi söker residyn i punkten $z = i$ och därmed kan (försöka) bryta ut faktorn $(z - i)$ omedelbart.

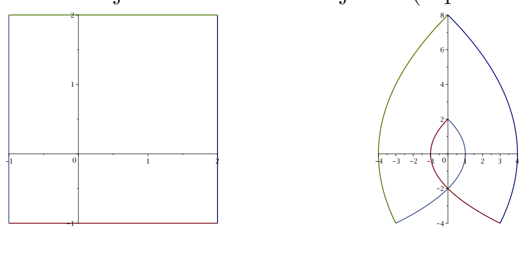
   (b) Några påstår på slutet, som del i en kontroll av rimligheten i svaret, att den givna integralen är reell, vilket inte alls är uppenbart eftersom integranden $e^{i2x}/(x^2+1)$ är komplexvärd. (Om man skriver $e^{i2x} = \cos 2x + i \sin 2x$ ser man dock att det är sant eftersom $(\sin 2x)/(x^2+1)$ är en udda funktion och integrationen sker längs hela realaxeln.)

4. Det går naturligtvis bra att direkt säga att $\Delta_{L_R + I_R} \arg p(z) \to \pi/2$ då $R \to \infty$, utan att ta bitarna $\Delta_{L_R} \arg p(z)$ och $\Delta_{I_R} \arg p(z)$ separat.

5. Det går också bra att börja med att ta fram konvergensringen med kvot- och/eller rotkriteriet, utan att ha beräknat summan. Man får då att $\sum_{n=1}^{\infty} n^2/z^n$ konvergerar om $|z| > 1$ och divergerar om $|z| < 1$, medan $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/(2^n n)$ konvergerar om $|z| < 2$ och divergerar om $|z| > 2$. Alltså är den dubbelsidiga potensserien divergent om $|z| < 1$ eller $|z| > 2$ (som summan av en konvergent och en divergent serie) medan den är konvergent om $1 < |z| < 2$ (som summan av två konvergenta serier); således är konvergensringen $1 < |z| < 2$.

6. (a) Svar som bygger på delar av f', som $\operatorname{Re} f'$ $(= u'_x = v'_y)$ och $\operatorname{Im} f'$ $(= v'_x = -u'_y)$, duger inte.

   (b) Flera räknade ut hur kvadratens hörnpunkter avbildas och ritade sedan räta linjer mellan de fyra punkterna i w-planet, men det är ju inte så kvadratens sidor avbildas eftersom $w = z^2$ inte är linjär. Rätt bild är följande (z-planet till vänster, w-planet till höger) – notera öglan!



Lars Alexandersson, 11 september 2024