Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA45
Modul: TEN1

Tentamen i Komplex analys

2025-01-18 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Fullständiga lösningar krävs, om inget annat sägs i uppgifterna.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 3 uppgifter, numrerade 1–3, värda 3 poäng var.
- **Del B** består av 3 uppgifter, numrerade 4–6, värda 3 poäng var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2 poäng.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1 och K2, där

K1: 1 poäng på uppgift n eller – men inte för överbetyg – UPGn godkänd ($n = 1, 2, 3$).

K2: 3/4/5 godkända uppgifter och 8/11/14 poäng totalt, där 1/2 bonuspoäng upp till 8 poäng för betyg 3 erhålls vid behov om 2/3 UPG-omgångar är godkända.

Notera: Rättningen kan komma att avbrytas ifall det står klart att kraven för godkänt betyg inte längre kan uppfyllas.

Svar finns preliminärt kl 21.00 på kursens hemsida.

Del A

1. (a) Bestäm alla hela analytiska funktioner $f = u + iv$ sådana att
$$u = \operatorname{Re} f = x^2 y + e^x \cos y.$$
(b) Lös ekvationen
$$\sinh z = -\frac{3}{4}.$$
Svaret ska ges i rektangulär form $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.
(c) Låt Ω vara $\mathbb{C}$ med positiva imaginäraxeln borttagen och låt $g(z)$ vara den gren till $\log z$ i Ω som uppfyller $g(1) = 0$. Bestäm $g(-2)$ och $g'(-2)$ i rektangulär form.

2. Låt
$$f(z) = \frac{z+3}{z^2 - z - 2}.$$
(a) Bestäm Maclaurinserien för f, och ange seriens konvergensradie R. (1p)
(b) Bestäm Laurentserien för f i cirkelringen $1 < |z - 1| < 2$. (2p)

3. Bestäm antalet nollställen som polynomet
$$p(z) = z^4 + 5iz^2 + 25z - 16$$
har i följande områden: (a) $\operatorname{Re} z < 0$, (b) $|z| < 1$. (2p+1p)

Var god vänd!

Del B

4. Beräkna med residykalkyl

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+9)}.$$

5. Låt Ω vara området mellan cirklarna $|z| = 2$ och $|z-1| = 1$ i z-planet.

   (a) Bestäm en Möbiusavbildning som avbildar Ω på remsan $0 < \operatorname{Im} w < 1$. (1p)

   (b) Bestäm en konform avbildning som avbildar Ω på cirkelskivan $|w| < 1$. (2p)

6. Beräkna

$$I(a,\omega) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{i\omega t}\, dt, \qquad 0 < a < 1,\ \omega > 0,$$

genom att integrera en lämpligt vald funktion längs randen till en indragen kvarts-cirkelskiva

$$\{z = r\, e^{i\theta} \in \mathbb{C} :\ \epsilon < r < R,\ \alpha < \theta < \alpha + \pi/2\}$$

för en lämpligt vald vinkel α. Svaret får innehålla den så kallade gammafunktionen

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \qquad x > 0.$$

TATA45 Komplex analys 2025-01-18, lösningsskisser

1. (a) Eftersom

$$\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = (2y + e^x \cos y) + (-e^x \cos y) = 2y \neq 0$$

utanför linjen $y = 0$ är u inte harmonisk i $\mathbb{R}^2$ och därför finns ingen hel analytisk f sådan att $u = \operatorname{Re} f$.
<u>Svar</u>: Ingen sådan f finns.

(b) Sätt $w = e^z$. Då är $w \neq 0$ och

$$-\frac{3}{4} = \sinh z = \frac{w - 1/w}{2} \quad \Leftrightarrow \quad w^2 + \frac{3w}{2} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w = \frac{1}{2} \text{ eller } w = -2,$$

vilket är ekvivalent med att $z = \log(1/2)$ eller $z = \log(-2)$, d.v.s.:
<u>Svar</u>: $z = -\ln 2 + i2n\pi$ eller $z = \ln 2 + i(\pi + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$.

(c) Varje gren till $\log z$ i Ω kan skrivas $g(z) = \ln|z| + i\,\theta(z)$, där $\theta(z)$ är ett kontinuerligt varierande argument för z i Ω. Kravet $0 = g(1) = \ln|1| + i\,\theta(1)$ ger $\theta(1) = 0$, vilket är ett argument för $z = 1$. Eftersom vi inte kan passera positiva imaginäraxeln (rita figur!) måste vi gå medurs till $z = -2$, och därför är $\theta(-2) = -\pi$. Till sist, $g'(z) = 1/z$, så vi får:
<u>Svar</u>: $g(-2) = \ln 2 - i\pi$ och $g'(-2) = -1/2$.

2. Att $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ när $|q| < 1$ och att $f(z) = \dfrac{z+3}{z^2 - z - 2} = \dfrac{z+3}{(z+1)(z-2)} = \dfrac{-2/3}{z+1} + \dfrac{5/3}{z-2}$ ger oss följande utvecklingar i de två områdena:

(a) f har singulariteter (poler) i $z = -1$ och $z = 2$, så Maclaurinseriens konvergensskiva är $|z| < 1$, d.v.s. dess konvergensradie $R = 1$. Vidare,

$$f(z) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1+z} - \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{1 - z/2} = -\frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n - \frac{5}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$$= \underline{\underline{-\frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n - \frac{5}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}}}, \qquad |z| < 1, \qquad \underline{\underline{R = 1}}.$$

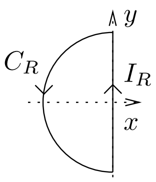
(b)

$$f(z) = \frac{-2/3}{z+1} + \frac{5/3}{z-2} = \Bigg/ \begin{matrix} w = z - 1 \\ 1 < |w| < 2 \end{matrix} \Bigg/ = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{w+2} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{w-1}$$

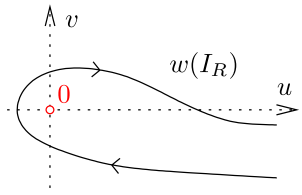
$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + w/2} + \frac{5}{3w} \cdot \frac{1}{1 - 1/w} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{w}{2}\right)^n + \frac{5}{3w} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{w}\right)^n$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^n}{2^n} + \frac{5}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^{n+1}}}}, \qquad 1 < |z - 1| < 2.$$

3. (a) Vi studerar argumenttillskottet för $p(z) = z^4 + 5iz^2 + 25z - 16$ när z genomlöper kurvan $\Gamma_R = C_R + I_R$ (se figur nere till vänster).
På C_R får vi tillskottet $\Delta_{C_R} \arg p(z) = \Delta_{C_R} \arg z^4 + \Delta_{C_R} \arg(1 + 5i/z^2 + 25/z^3 - 16/z^4) \to 4 \cdot \pi + 0 = 4\pi$ då $R \to \infty$.
På I_R får vi $p(z) = p(iy) = (y^4 - 16) + i(25y - 5y^2) = (y^4 - 16) + i\,5y(5 - y) = u + iv$, $y : -R \to R$, och nedanstående teckentabell samt kurva $w = p(z)$ då z genomlöper I_R:



y	$<$	-2	$<$	0	$<$	2	$<$	5	$<$
u	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
v	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$



Dessutom får vi av gradskäl att $v/u \to 0$ då $y \to \pm\infty$ (u drar mer än v), och detta tillsammans med tabellen ovan ger skissen ovan till höger, där vi ser att $\Delta_{I_R} \arg p(z) \to -2\pi$ då $R \to \infty$. Eftersom poler saknas blir antalet nollställen i vänstra halvplanet därför $(1/2\pi) \lim_{R\to\infty} (\Delta_{C_R} \arg p(z) + \Delta_{I_R} \arg p(z)) = (4\pi - 2\pi)/2\pi = 1$, enligt argumentprincipen.
<u>Svar</u>: Ett.

(b) Sätt $f(z) = 25z$ och $g(z) = z^4 + 5iz^2 - 16$. På hela cirkeln $|z| = 1$ är $|f(z)| = |25||z| = 25$ och $|g(z)| \le |z|^4 + |5i||z|^2 + |-16| = 22 < 25$, så $|f(z)| > |g(z)|$ för alla z på denna cirkel. Enligt Rouchés sats har därför $p(z) = f(z) + g(z)$ lika många nollställen i $|z| < 1$ som $f(z)$, d.v.s. ett. <u>Svar</u>: Ett.

4. Eftersom integranden är jämn kan vi skriva den sökta integralen

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+9)} = \frac{J}{2}, \quad \text{där} \quad J = \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+9)}.$$

Sätt $f(z) = 1/\big((z^2+1)^2(z^2+9)\big)$. Låt L_R vara sträckan från $-R$ till R och C_R^+ halvcirkeln från R till $-R$ i övre halvplanet och sätt $\Gamma_R = L_R + C_R^+$ (rita figur!). Om $R > 3$ så är f analytisk på och innanför Γ_R förutom i dubbelpolen $z = i$ och i enkelpolen $z = 3i$. Enligt residysatsen och sedvanlig residyberäkning är därför

$$\begin{aligned}
\int_{L_R + C_R^+} f(z)\,dz &= 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=3i} f(z) \right) = \Big/ f(z) = \frac{(z+i)^{-2}(z^2+9)^{-1}}{(z-i)^2} = \frac{(z^2+1)^{-2}}{z^2+9} \Big/ \\
&= 2\pi i \left(\frac{d}{dz}\big((z+i)^{-2}(z^2+9)^{-1}\big)\Big|_{z=i} + \frac{(z^2+1)^{-2}}{\frac{d}{dz}(z^2+9)}\Big|_{z=3i} \right) \\
&= 2\pi i \left(\big(-2(z+i)^{-3}(z^2+9)^{-1} - (z+i)^{-2}(z^2+9)^{-2}2z\big)\Big|_{z=i} + \frac{(z^2+1)^{-2}}{2z}\Big|_{z=3i} \right) \\
&= 2\pi i \left(\frac{2}{64i} - \frac{1}{2\cdot 64i} + \frac{1}{6\cdot 64i} \right) = \frac{5\pi}{96}, \qquad R > 3. \qquad (*)
\end{aligned}$$

Vidare,

$$\int_{L_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^R f(t)\,dt \to J, \qquad R \to \infty,$$

och en ML-uppskattning ger, eftersom $|z^2+1| \ge |z|^2 - |1| = R^2 - 1 > 0$ och $|z^2+9| \ge R^2 - 9 > 0$ på C_R^+ om $R > 3$, att

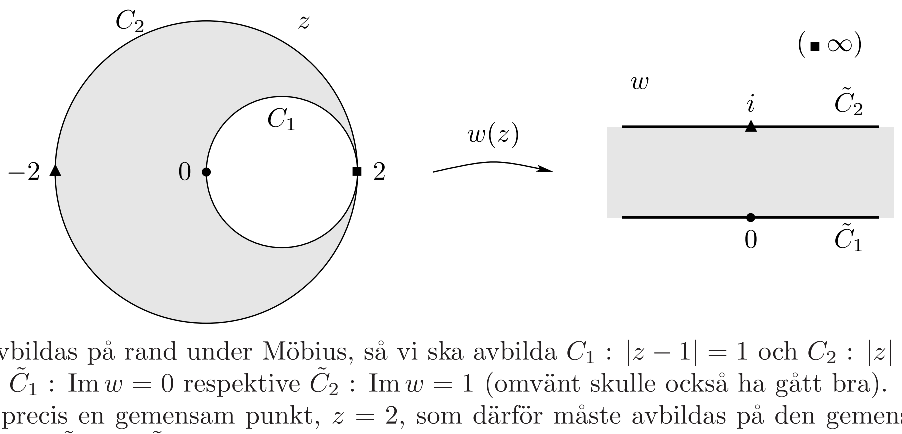
$$\left| \int_{C_R^+} f(z)\,dz \right| \le \frac{1}{(R^2-1)^2(R^2-9)} \cdot \pi R \to 0, \qquad R \to \infty,$$

av gradskäl, så $\int_{C_R^+} f(z)\,dz \to 0$ då $R \to \infty$.

Låt nu $R \to \infty$ i $(*)$. Då får vi att $J + 0 = 5\pi/96$, så $I = J/2 = 5\pi/192$.

<u>Svar</u>: $\dfrac{5\pi}{192}$.

5. (a)



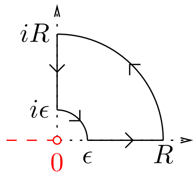
Rand avbildas på rand under Möbius, så vi ska avbilda $C_1 : |z-1| = 1$ och $C_2 : |z| = 2$ på linjerna $\tilde{C}_1 : \operatorname{Im} w = 0$ respektive $\tilde{C}_2 : \operatorname{Im} w = 1$ (omvänt skulle också ha gått bra). C_1 och C_2 har precis en gemensam punkt, $z = 2$, som därför måste avbildas på den gemensamma punkten för $\tilde{C}_1$ och $\tilde{C}_2$, alltså $w = \infty$.
Med $w(2) = \infty$ kommer $\tilde{C}_1$ och $\tilde{C}_2$ bli två parallella linjer. Om vi dessutom väljer $w(0) = 0$ och $w(-2) = i$, så att $(2, 0, -2) \mapsto (\infty, 0, i)$, får vi med standardmetoder $w(z) = 2iz/(z-2)$, och nu vet vi att $\tilde{C}_1$ och $\tilde{C}_2$ är två parallella linjer för vilka $0 \in \tilde{C}_1$ och $i \in \tilde{C}_2$, men vi måste också motivera att linjerna är vågräta. Det kan vi t.ex. göra genom att avbilda tredje punkter på C_1 och C_2: t.ex. $1 + i \in C_1 \Rightarrow w(1+i) = 2 \in \tilde{C}_1$ och $2i \in C_2 \Rightarrow w(2i) = 1 + i \in \tilde{C}_2$. Eftersom slutligen t.ex. $w(-1) = 2i/3$ (inre punkt på inre punkt) ser vi att avbildningen avbildar rätt.

<u>Svar</u>: T.ex. $w(z) = \dfrac{2iz}{z-2}$.

(b) Låt $\zeta(z) = 2iz/(z-2)$ vara avbildningen i (a). Remsan $0 < \operatorname{Im}\zeta < 1$ kan avbildas konformt på övre halvplanet $\operatorname{Im} s > 0$ med $s(\zeta) = e^{\pi\zeta}$. Sedan kan övre halvplanet $\operatorname{Im} s > 0$ avbildas på $|w| < 1$ med en Möbiusavbildning som bestäms av att t.ex. $(i, -i, \infty) \mapsto (0, \infty, 1)$, eftersom $s = i$ (inre punkt) och $s = -i$ är spegelpunkter m.a.p. linjen $\operatorname{Im} s = 0$ och $w = 0$ (inre punkt) och $w = \infty$ är spegelpunkter m.a.p. cirkeln $|w| = 1$, och $s = \infty$ och $w = 1$ är punkter på linjen $\operatorname{Im} s = 0$ respektive cirkeln $|w| = 1$; med standardmetoder får man $w(s) = (s-i)/(s+i)$, och sammansättningen $w(s(\zeta(z)))$ avbildar Ω konformt på $|w| < 1$.

<u>Svar</u>: T.ex. $w(z) = \dfrac{e^{\pi\zeta(z)} - i}{e^{\pi\zeta(z)} + i}$, där $\zeta(z) = \dfrac{2iz}{z-2}$.

6. Sätt $f(z) = \widetilde{z^{a-1}} \cdot e^{i\omega z} = \exp\big((a-1)L(z)\big) \cdot e^{i\omega z}$, där $L(z)$ är en gren till $\log z$. Med tanke på vilken integral vi vill räkna ut måste den ena av de två sträckorna i randen till den indragna kvartscirkelskivan ligga på positiva realaxeln. Eftersom $|e^{i\omega z}| = e^{-\omega y} \leq 1$ då $y \geq 0$ och $\omega > 0$ väljer vi $\alpha = 0$ och studerar därför konturen $L_{\epsilon,R} + C_R + I_{\epsilon,R} + C_\epsilon$ till höger, och väljer grenen $L(z) = \operatorname{Log} z$ (principalgrenen), som är analytisk på och innanför konturen.



Vi får då, med parametriseringen $z = t$, $t : \epsilon \to R$, på den vågräta sträckan $L_{\epsilon,R}$

$$\int_{L_{\epsilon,R}} f(z)\,dz = \int_\epsilon^R t^{a-1} e^{i\omega t} dt$$

och med $z = it$, $t : R \to \epsilon$, på den lodräta sträckan $I_{\epsilon,R}$

$$\int_{I_{\epsilon,R}} f(z)\,dz = \int_R^\epsilon t^{a-1} e^{i(a-1)\pi/2} e^{-\omega t}\, i\,dt = -e^{ia\pi/2} \int_\epsilon^R t^{a-1} e^{-\omega t} dt = /u = \omega t,\ \omega > 0/$$
$$= -e^{ia\pi/2} \int_{\omega\epsilon}^{\omega R} \big(\frac{u}{\omega}\big)^{a-1} e^{-u} \frac{du}{\omega} = -\frac{e^{ia\pi/2}}{\omega^a} \int_{\omega\epsilon}^{\omega R} u^{a-1} e^{-u} du \to -\frac{e^{ia\pi/2}}{\omega^a}\,\Gamma(a)$$

då $\epsilon \to 0^+$ och $R \to \infty$, om $a > 0$.

På den lilla kvartscirkeln C_ϵ är $|f(z)| = |z|^{a-1} e^{-\omega y} \leq \epsilon^{a-1} \cdot 1$, så ML-uppskattning ger

$$\left| \int_{C_\epsilon} f(z)\,dz \right| \leq \epsilon^{a-1} \cdot \pi\epsilon/2 = \pi\epsilon^a/2 \to 0$$

då $\epsilon \to 0^+$, om $a > 0$, så $\int_{C_\epsilon} f(z)\,dz \to 0$ då.

På den stora kvartscirkeln C_R är $|f(z)| = R^{a-1}|e^{i\omega z}|$, så med Jordans lemma får vi, eftersom $\omega > 0$ och kvartscirkeln C_R är en del av halvcirkeln C_R^+ från $z = R$ till $z = -R$ i övre halvplanet,

$$\left| \int_{C_R} f(z)\,dz \right| \leq R^{a-1} \int_{C_R} |e^{i\omega z}||dz| \leq R^{a-1} \int_{C_R^+} |e^{i\omega z}||dz| \leq R^{a-1} \cdot \frac{\pi}{\omega} \to 0$$

då $R \to \infty$, om $a < 1$, så $\int_{C_R} f(z)\,dz \to 0$ då.

Slutligen, eftersom f är analytisk på och innanför konturen $L_{\epsilon,R} + C_R + I_{\epsilon,R} + C_\epsilon$ är

$$\int_{L_{\epsilon,R}} f(z)\,dz = -\int_{C_R} f(z)\,dz - \int_{I_{\epsilon,R}} f(z)\,dz - \int_{C_\epsilon} f(z)\,dz, \qquad 0 < \epsilon < R,$$

så

$$\int_\epsilon^R t^{a-1} e^{i\omega t} dt \to 0 + \frac{e^{ia\pi/2}}{\omega^a}\,\Gamma(a) + 0 = \frac{e^{ia\pi/2}}{\omega^a}\,\Gamma(a)$$

då $\epsilon \to 0^+$ och $R \to \infty$, om $0 < a < 1$ och $\omega > 0$.

<u>Svar</u>: $\dfrac{e^{ia\pi/2}}{\omega^a}\,\Gamma(a)$

TATA45 Komplex analys 2025-01-18, kommentarer

1. (a) Alternativt kan man använda Cauchy-Riemanns ekvationer: $u'_x = 2xy + e^x \cos y = v'_y$ ger $v = xy^2 + e^x \sin y + \varphi(x)$, som insatt i $u'_y = x^2 - e^x \sin y = -v'_x = -y^2 - e^x \sin y - \varphi'(x)$ ger $\varphi'(x) = -x^2 - y^2$, som ju är en motsägelse eftersom $\varphi'(x)$ inte kan bero på y; alltså finns ingen hel funktion f med given realdel u. Om man i stället börjar med $u'_y = -v'_x$ får man på motsvarande sätt en motsägelse $\psi'(y) = 2xy$.

   (b) Några förkastar fallet $e^z = -2$ i tron att e^z inte kan vara negativt (FEL); däremot är det ju sant att $e^x > 0$ om $x \in \mathbb{R}$.

   (c) Man kan alternativt börja med att ta fram *en* log-gren $\ln|z| + i\,\theta(z)$, $-3\pi/2 < \theta(z) < \pi/2$, i Ω; då ges ju *alla* log-grenar i Ω av $\ln|z| + i\big(\theta(z) + 2\pi n\big)$, och kravet $g(1) = 0$ medför nu att $n = 0$, så att $g(z) = \ln|z| + i\,\theta(z)$, $-3\pi/2 < \theta(z) < \pi/2$.

   Några får fel derivata, men alla log-grenar har derivata $1/z$ i sina områden.

2. Flera tar fram partialbråksuppdelningen både i (a) och (b), men en gång räcker så klart!

   (a) Väldigt många har här gjort en ansats med $\mathcal{O}$-restterm, men i uppgiften frågas det ju efter Maclaurinserien, alltså *alla* termer i serien, precis som i (b). Se Exempel 4.27 i kompendiet.

   Konvergens-*skivan* är $|z| < 1$, så konvergens-*radien* är $R = 1$. Att svara $R < 1$ är alltså FEL.

   (b) Här bör man inte svara med potenser av $1/(z-1)$ eller av $(1-z)/2$, utan man bör skriva om så att man får just $(z-1)^n$ som naturlig faktor i termerna i serien.

3. (a) Alternativt kan man nöja sig med att faktorisera bara den ena av u och v, men tänk då på att man i så fall måste ha med kolumner för stora positiva och stora negativa y i tabellen (lämpligen markerade med $+\infty$ respektive $-\infty$), se Anmärkning 6.7 i kompendiet.

   (b) Några påstår utan bevis att $|z^4 + 5iz - 16| < |z|^4 + |5i||z| + |-16|$ då $|z| = 1$, alltså med $<$ i stället för $\leq$. Ett sådant starkare påstående måste naturligtvis motiveras (men i uppgiften räcker ju $\leq$).

   Här följer nu en ALLMÄN DISKUSSION AV VANLIGA FEL när man använder Rouchés sats. Exemplet nedan avser $p(z) = z^4 + 5iz^2 + 25z - 16$ i skivan $|z| < 1$, med uppdelningen $p = f + g$ där $f(z) = 25z$ och $g(z) = z^4 + 5iz^2 - 16$, men resonemanget är allmängiltigt.

   Uppskattningarna ska ske på randen $|z| = 1$ – hela randen! – och ingen annanstans, om man vill använda Rouchés sats. Det måste också framgå av lösningarna att det är just randen man undersöker.

   Notera att Rouchés sats fungerar lika bra för den slutna skivan $|z| \leq 1$ som för den öppna skivan $|z| < 1$, eftersom både f och $f + g$ saknar nollställen på cirkeln $|z| = 1$ om villkoret i satsen är uppfyllt, se kompendiet.

   En provkarta på andra vanliga FEL:

   - ”Då $|z| = 1$ är $|f(z)| \leq 25$ och $|g(z)| \leq 22$, och därmed är $|f(z)| > |g(z)|$ där”. Att $|f(z)| \leq 25$ och $|g(z)| \leq 22$ då $|z| = 1$ är i och för sig sant, men dessa uppskattningar medför inte att $|f(z)| > |g(z)|$ då $|z| = 1$ – t.ex. skulle det kunna vara så att $|f(z_0)| = 18$ och $|g(z_0)| = 21$ för någon punkt z_0 på randen.
   - ”$|g(z)| = |z|^4 + 5|z|^2 + 16 = 22$ då $|z| = 1$”. Här behöver det inte vara likhet – oftast är det sträng olikhet – och man måste använda triangelolikheten i stället: $|g(z)| \leq |z|^4 + 5|z|^2 + 16 = 22$ då $|z| = 1$.
   - ”$|f(1)| = 25$ och $|g(1)| \leq 22$, alltså är $|f(1)| > |g(1)|$”. I och för sig sant, men det räcker inte att kolla en enda punkt (här: $z = 1$) på randen $|z| = 1$, som ju är en hel cirkel.
   - ”Alltså är $|f(z)| > |g(z)|$ då $|z| < 1$, och därmed har $p = f+g$ och f lika många nollställen i $|z| < 1$, d.v.s. ett”. Här består felet i ett enda tecken (den första förekomsten av ”$<$” ska ersättas med ”$=$”), men konsekvensen är desto större, eftersom $f(z) + g(z)$ inte kan vara noll över huvud taget i skivan $|z| < 1$ om $|f(z)| > |g(z)|$ i hela denna skiva; summan av två olika långa komplexa tal kan ju aldrig bli noll.

4. Eftersom integranden är tydligt positiv är icke-reella svar och reella svar ≤ 0 orimliga.

   Att $\int_0^\infty f(x)\,dx = (1/2)\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ här beror alltså på att f är jämn, vilket ska påpekas – likheten gäller ju inte allmänt.

   Några gör fel i ML-uppskattningen, typiskt genom att vända olikheten för nämnaren fel: $|z^2+1| \leq R^2 + 1$ och $|z^2+9| \leq R^2 + 9$, men man måste ju göra nämnaren *mindre* för att göra kvoten *större*.

5. (a) De flesta inser att det är nödvändigt att $w(2) = \infty$, och sedan avbildar de en punkt på vardera randcirkel i z-planet på en punkt på vardera randlinje i w-planet. Därefter måste man motivera att remsan i w-planet verkligen blir vågrät (om den blir det), vilket många inte gjorde; beroende på hur man väljer dessa två z-punkter och dessa två w-punkter kan man nämligen få mer eller mindre sneda remsor i w-planet. Om man t.ex. avbildar $(2, 0, 2i) \mapsto (\infty, 0, i)$, vilket några gjorde, blir $w(z) = (-1 + i)z/(z - 2)$ och bilden i w-planet blir då den sneda remsan $0 < \operatorname{Im} w - \operatorname{Re} w < 1$.

   Det finns många Möbiusavbildningar $w(z)$ som avbildar på önskat sätt, och de kan skrivas

$$\frac{(a + 2i)z - 2a}{z - 2} \qquad \text{eller} \qquad \frac{(a - i)z - 2(a + i)}{z - 2},$$

   där $a \in \mathbb{R}$. De till vänster avbildar C_1 på $\operatorname{Im} w = 0$ och C_2 på $\operatorname{Im} w = 1$ som i lösningsskissen (där $a = 0$), medan de till höger tvärtom avbildar C_1 på $\operatorname{Im} w = 1$ och C_2 på $\operatorname{Im} w = 0$, vilket ju går lika bra.

   Några försöker hitta par av gemensamma spegelpunkter för cirklarna C_1 och C_2, men sådana finns inte eftersom cirklarna har en gemensam punkt ($z = 2$).

   (b) Problemet kan *inte* lösas med en Möbiusavbildning (observera också skillnaden i uppgiftsformuleringen i (a) och (b)). Om man använder resultatet i (a) är alltså det återstående problemet att avbilda remsan på enhetsskivan. Uppgift 7.17 i kompendiet, som ingår i kursprogrammet som en ordinarie uppgift (ej parentesuppgift), är i stort sett samma problem – där avbildar man den lodräta remsan $0 < \operatorname{Re} z < 1$ på cirkelskivan $|w| < 1$.

   Även här finns för övrigt många lösningar: Man kan visa om $w(z)$ är som i lösningsskissen, så ges alla lösningar av $\lambda\big(w(z) - \alpha\big)/\big(1 - \bar{\alpha}\, w(z)\big)$, där $|\lambda| = 1$ och $|\alpha| < 1$.

6. Någon skrev svaret som $i^a \Gamma(a)/\omega^a$, men eftersom i^a är flervärd för aktuella a måste man precisera vilket värde som avses. Här ges värdet av den gren till z^{a-1} som definierades i början, och då får man att det relevanta värdet på i^a är $e^{ia\pi/2}$.

   Jag har förstått att en del studenter tycker att denna sexa är lika svår som de sjuor som fanns på gamla tentor. Jag håller inte med! På sjuorna behövde man oftast komma på något själv – få en idé, mer eller mindre originell – för att komma vidare. Det behövs inte här, utan när man väl har insett hur den föreslagna konturen ska ligga återstår det ”bara” att parametrisera de fyra kurvbitarna, göra relevanta uppskattningar på två av dem och skriva om integralen längs en tredje så att man känner igen Γ-funktionen.

Lars Alexandersson, 4 februari 2025