

Tentamen i Komplex analys

2025-08-28 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Fullständiga lösningar krävs, om inget annat sägs i uppgifterna.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 3 uppgifter, numrerade 1–3, värda 3 poäng var.
- **Del B** består av 3 uppgifter, numrerade 4–6, värda 3 poäng var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2 poäng.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1 och K2, där

K1: 1 poäng på uppgift n eller – men inte för överbetyg – UPG n godkänd ($n = 1, 2, 3$).

K2: 3/4/5 godkända uppgifter och 8/11/14 poäng totalt, där 1/2 bonuspoäng upp till 8 poäng för betyg 3 erhålls vid behov om 2/3 UPG-omgångar är godkända.

Notera: Rättningen kan komma att avbrytas ifall det står klart att kraven för godkänt betyg inte längre kan uppfyllas.

Svar finns preliminärt kl 21.00 på kursens hemsida.

Del A

1. (a) Lös ekvationen

$$\cos z = \frac{13}{12}.$$

Svaret ska ges i rektangulär form $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. (1p)

- (b) Bestäm en Möbiusavbildning $w(z)$ som avbildar halvplanet $\operatorname{Re} z > 1$ på cirkelskivan $|w| < 2$ samtidigt som $w(\infty) = -2i$ och $w(2) = i$. (2p)

2. (a) Bestäm Laurentserien för

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 3z + 2}$$

i cirkelringen $\sqrt{2} < |z - i| < \sqrt{5}$. (2p)

- (b) Bestäm konvergensradien R för potensserien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n^2 + 2i} z^n. \quad (1p)$$

3. Bestäm antalet nollställen som polynomet

$$p(z) = z^4 - z^3 + 10z^2 - 4z + 9$$

har i högra halvplanet $\operatorname{Re} z > 0$.

Var god vänd!

Del B

4. Beräkna med residykalkyl

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(5 + 4 \cos \theta)^2}.$$

5. Bestäm alla hela analytiska funktioner f sådana att

$$(\operatorname{Im} f)'_y = \operatorname{Re} f.$$

f ska uttryckas i variabeln z , alltså som $f(z)$.

6. Visa att

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sinh x} dx = \frac{\pi}{2} \tanh \frac{\pi}{2}$$

genom att integrera

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{\sinh z}$$

längs rektangeln med hörn $\pm R$, $\pm R + i\pi$ men med små kringgående halvcirklar med radie ϵ vid 0 och $i\pi$.

1. (a) Sätt $w = e^{iz}$. Då är $w \neq 0$ och

$$\frac{13}{12} = \cos z = \frac{w + 1/w}{2} \Leftrightarrow w^2 - \frac{13w}{6} + 1 = 0 \Leftrightarrow w = \frac{3}{2} \text{ eller } w = \frac{2}{3},$$

d.v.s. $iz = \log(3/2) = \ln(3/2) + i2\pi n$ eller $iz = \log(2/3) = -\ln(3/2) + i2\pi n$, som ger:

Svar: $z = 2\pi n \pm i \ln(3/2)$, $n \in \mathbb{Z}$.

- (b) Låt L vara linjen $\operatorname{Re} z = 1$ och $\tilde{L}$ cirkeln $|w| = 2$ (streckade i figuren). För att halvplanet $\operatorname{Re} z > 1$ ska kunna avbildas på cirkelskivan $|w| < 2$ med en Möbiusavbildning $w(z)$ måste, till att börja med, rand avbildas på rand, d.v.s. linjen L på cirkeln $\tilde{L}$.

Att $w(2) = i$ ger med nödvändighet $w(0) = 4i$, eftersom 2 och 0 är spegelpunkter m.a.p. linjen L och i och $4i$ är spegelpunkter m.a.p. cirkeln $\tilde{L}$ (ty i^* ligger på strålen från mittpunkten 0 genom i , som har avstånd $\ell_1 = 1$ till mittpunkten, och $\ell_1 \ell_2 = r^2 = 2^2$, så $\ell_2 = 4$, och därmed är $i^* = 4i$, se figur).

Eftersom dessutom $w(\infty) = -2i$ (randpunkt på randpunkt) är Möbiusavbildningen entydigt bestämd, och ansatsen $(w - 4i)/(w + 2i) = k(z - 0)/1$ och insättning av $w(2) = i$ ger $k = -1/2$ och därmed $w(z) = (8i - 2iz)/(z + 2)$. Denna avbildar linjen L på cirkeln $\tilde{L}$, och eftersom $w(2) = i$ avbildar den dessutom halvplanet $\operatorname{Re} z > 1$ på cirkelskivan $|w| < 2$ (inre punkt avbildas på inre punkt).

$$\text{Svar: } w(z) = \frac{8i - 2iz}{z + 2}.$$

2. (a) Vi ser först att

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 3z + 2} = \frac{1}{(z + 1)(z + 2)},$$

så f är singulär i punkterna -1 och -2 . Avstånden från punkten i till dessa båda punkter är $|i + 1| = \sqrt{2}$ respektive $|i + 2| = \sqrt{5}$, så f är analytisk i cirkelringen $\sqrt{2} < |z - i| < \sqrt{5}$ och har därmed en Laurentserie där. Partialbråksuppdelning och utveckling i geometriska serier via $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1/(1 - q)$ när $|q| < 1$ ger nu

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z + 1} - \frac{1}{z + 2} = \left/ \frac{w = z - i}{\sqrt{2} < |w| < \sqrt{5}} \right/ = \frac{1}{w + 1 + i} - \frac{1}{w + 2 + i} \\ &= \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{1 + (1 + i)/w} - \frac{1}{2 + i} \cdot \frac{1}{1 + w/(2 + i)} = \frac{1}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1 + i}{w}\right)^n - \frac{1}{2 + i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{w}{2 + i}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1 - i)^n}{(z - i)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - i)^n}{(-2 - i)^{n+1}}, \quad \sqrt{2} < |z - i| < \sqrt{5}. \end{aligned}$$

- (b) Sätt $a_n = (1 + i)^n z^n / (n^2 + 2i)$ för fixt $z \neq 0$. Eftersom

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(1 + i)^{n+1} z^{n+1}}{(n + 1)^2 + 2i} \right/ \frac{(1 + i)^n z^n}{n^2 + 2i} \right| = |(1 + i)z| \cdot \left| \frac{1 + 2i/n^2}{(1 + 1/n)^2 + 2i/n^2} \right| \rightarrow \sqrt{2}|z|$$

då $n \rightarrow \infty$ medför kvotkriteriet att potensserien är absolutkonvergent om $\sqrt{2}|z| < 1$, d.v.s. om $|z| < 1/\sqrt{2}$, och att den är divergent om $\sqrt{2}|z| > 1$, d.v.s. om $|z| > 1/\sqrt{2}$; således är konvergensraden $R = 1/\sqrt{2}$.

Svar: $R = 1/\sqrt{2}$.

3. Vi studerar argumenttillskottet för $p(z) = z^4 - z^3 + 10z^2 - 4z + 9$ när z genomlöper kurvan $\Gamma_R = C_R - I_R$ (se figur nere till vänster – observera orienteringen!).

På C_R får vi tillskottet $\Delta_{C_R} \arg p(z) = \Delta_{C_R} \arg z^4 + \Delta_{C_R} \arg(1 - 1/z + 10/z^2 - 4/z^3 + 9/z^4) \rightarrow 4 \cdot \pi + 0 = 4\pi$ då $R \rightarrow \infty$.

På I_R får vi $p(z) = p(iy) = (y^4 - 10y^2 + 9) + i(y^3 - 4y) = (y^2 - 1)(y^2 - 9) + iy(y^2 - 4) = u + iv$, $y: -R \rightarrow R$, och därmed nedanstående teckentabell då $y \geq 0$ (observera att u är jämn och v är udda), samt kurva $w = p(z)$ då z genomlöper I_R (punkten som svarar mot $y = 0$ är markerad):

Notera att $\sinh(-t) = -\sinh t$, $\sinh(t + i\pi) = -\sinh t$ och $\sinh(-t + i\pi) = \sinh t$, så

$$\int_{L_{\epsilon,R}^1} f(z) dz + \int_{L_{\epsilon,R}^4} f(z) dz = \int_{\epsilon}^R \frac{e^{it}}{\sinh t} dt + \int_R^{\epsilon} \frac{e^{-it}}{-\sinh t} (-dt) = 2i \int_{\epsilon}^R \frac{\sin t}{\sinh t} dt$$

och

$$\int_{L_{\epsilon,R}^2} f(z) dz + \int_{L_{\epsilon,R}^3} f(z) dz = \int_R^{\epsilon} \frac{e^{-\pi} e^{it}}{-\sinh t} dt + \int_{\epsilon}^R \frac{e^{-\pi} e^{-it}}{\sinh t} (-dt) = 2i e^{-\pi} \int_{\epsilon}^R \frac{\sin t}{\sinh t} dt,$$

varför

$$\int_{L_{\epsilon,R}^1 + L_{\epsilon,R}^2 + L_{\epsilon,R}^3 + L_{\epsilon,R}^4} f(z) dz \rightarrow 2i(1 + e^{-\pi}) \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sinh t} dt \quad \text{då } \epsilon \rightarrow 0^+ \text{ och } R \rightarrow \infty.$$

Vidare har f enkelpoler vid 0 och $i\pi$ med residyer

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{e^{iz}}{\frac{d}{dz}(\sinh z)} \Big|_{z=0} = \frac{e^{iz}}{\cosh z} \Big|_{z=0} = 1 \quad \text{och} \quad \operatorname{Res}_{z=i\pi} f(z) = \frac{e^{iz}}{\cosh z} \Big|_{z=i\pi} = -e^{-\pi},$$

så för tillräckligt små $\delta > 0$ (här: $\delta \leq \pi$) kan vi skriva

$$f(z) = \frac{1}{z} + g_1(z), \quad 0 < |z| < \delta, \quad \text{respektive} \quad f(z) = \frac{-e^{-\pi}}{z - i\pi} + g_2(z), \quad 0 < |z - i\pi| < \delta,$$

där $g_1(z)$ och $g_2(z)$ är analytiska i skivorna $|z| < \delta$ respektive $|z - i\pi| < \delta$. Om $0 < \epsilon < \delta$ får vi därför, med parametriseringarna $z = \epsilon e^{it}$, $t: \pi \rightarrow 0$, av C_{ϵ}^1 och $z - i\pi = \epsilon e^{it}$, $t: 0 \rightarrow -\pi$, av C_{ϵ}^2 ,

$$\int_{C_{\epsilon}^1} f(z) dz = \int_{\pi}^0 \frac{i e^{it}}{e^{it}} dt + \int_{C_{\epsilon}^1} g_1(z) dz = -i\pi + \int_{C_{\epsilon}^1} g_1(z) dz \rightarrow -i\pi \quad \text{då } \epsilon \rightarrow 0^+$$

och

$$\int_{C_{\epsilon}^2} f(z) dz = -e^{-\pi} \int_0^{-\pi} \frac{i e^{it}}{e^{it}} dt + \int_{C_{\epsilon}^2} g_2(z) dz = i\pi e^{-\pi} + \int_{C_{\epsilon}^2} g_2(z) dz \rightarrow i\pi e^{-\pi} \quad \text{då } \epsilon \rightarrow 0^+.$$

På de lodräta sträckorna $V_R^{1,2}$, där $z = \pm R + it$, $0 \leq t \leq \pi$, är

$$|e^{iz}| = e^{-t} \leq 1 \quad \text{och} \quad |\sinh z| = |e^z - e^{-z}|/2 \geq ||e^z| - |e^{-z}||/2 = (e^R - e^{-R})/2 = \sinh R,$$

så ML-uppskattning där ger

$$\left| \int_{V_R^{1,2}} f(z) dz \right| \leq \frac{1}{\sinh R} \cdot \pi \rightarrow 0 \quad \text{då } R \rightarrow \infty,$$

varför $\int_{V_R^{1,2}} f(z) dz \rightarrow 0$ då $R \rightarrow \infty$.

Eftersom f är analytisk på och innanför $\Gamma_{\epsilon,R}$ får vi

$$0 = \int_{\Gamma_{\epsilon,R}} f(z) dz = \int_{L_{\epsilon,R}^1 + V_R^1 + L_{\epsilon,R}^2 + C_{\epsilon}^2 + L_{\epsilon,R}^3 + V_R^2 + L_{\epsilon,R}^4 + C_{\epsilon}^1} f(z) dz,$$

och genom att låta $\epsilon \rightarrow 0^+$ och $R \rightarrow \infty$ här får vi till slut

$$2i(1 + e^{-\pi}) \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sinh t} dt + 0 + i\pi e^{-\pi} + 0 + (-i\pi) = 0,$$

d.v.s.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sinh t} dt = \frac{i\pi - i\pi e^{-\pi}}{2i(1 + e^{-\pi})} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}}{e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}} = \frac{\pi}{2} \tanh \frac{\pi}{2},$$

vilket skulle bevisas.

1. Inget att kommentera.
2. (a) Nästan alla väljer att svara

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1+i)^n}{(z-i)^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-i)^n}{(2+i)^{n+1}}$$

och det går naturligtvis lika bra.

- (b) Några tror att serien är geometrisk (FEL); nämnaren $n^2 + 2i$ i termerna gör att den inte är det. Det är visserligen sant att den givna potensserien har samma konvergensradie som den geometriska potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^n$ (se Proposition 4.11 i kompendiet 2023), men om man använder detta resultat måste det framgå tydligt i lösningen.

Några tar fram de z för vilka termerna $a_n \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$, men detta villkor är endast *nödvändigt* för konvergens av serien, inte tillräckligt; exempelvis är $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ divergent.

Man kan alternativt använda rotkriteriet:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|(1+i)z|}{|n^2 + 2i|^{1/n}} = \frac{\sqrt{2}|z|}{(n^4 + 4)^{1/2n}} = \sqrt{2}|z| \exp\left(-\frac{4 \ln n + \ln(1 + 4/n^4)}{2n}\right) \rightarrow \sqrt{2}|z|$$

då $n \rightarrow \infty$, och sedan fortsätter man som i lösningsskissen.

3. Svar $\notin \{0, 1, 2, 3, 4\}$ är orimliga.

Självklart behöver man inte utnyttja att u är jämn och v är udda, utan i stället kan man ha med alla reella y i teckentabellen.

Som vanligt går det bra att bara faktorisera den ena av u och v , men då måste man ha med tecknen för både u och v för stora positiva och negativa y som extra kolumner i teckentabellen, lämpligen betecknade med $y = \pm\infty$, se Anmärkning 6.7 i kompendiet 2023. Annars framgår det inte i vilka kvadranter kurvan startar och slutar, och vad argumenttillskottet då blir är oklart.

Några har gjort mindre fel, som att få faktoriseringen $v = y(y^2 + 4)$ (FEL), men ett sådant fel ändrar uppgiftens karaktär i grunden och den blir mycket enklare (ett s.k. förstörande räknepel).

4. Integralen är tydligt positiv, så icke-reella svar och reella svar ≤ 0 är orimliga.

Ett inte ovanligt misstag är att skriva

$$2z + 5 + 2/z = (z+2)(z+1/2) \quad (\text{FEL}).$$

Visserligen har de båda sidorna samma nollställen, men vänsterledet är ju inte ens ett polynom. Rätt faktorisering är

$$2z + 5 + 2/z = \frac{2}{z}(z+2)(z+1/2).$$

Vid beräkningen av residyn i $z = -1/2$ är det viktigt att man skriver integranden

$$f(z) := \frac{z}{(z+2)^2(z+1/2)} = \frac{g(z)}{(z+1/2)^2}; \text{ då är ju } \operatorname{Res}_{z=-1/2} f(z) = g'(-1/2).$$

Det får *inte* stå $(2z+1)^2$ i den sista nämnaren här. I så fall gör man fel på en faktor 4, vilket ett par studenter också gjorde, och de fick därför det felaktiga värdet $40\pi/27$.

5. Flera inser att $u = \varphi(y)e^x$. Går man vidare därifrån utan att använda att u är harmonisk, vilket är fullt möjligt, ger $u'_y = -v'_x$ först att $v = -\varphi'(y)e^x + \psi(y)$ och $u'_x = v'_y$ sedan att $(\varphi''(y) + \varphi(y))e^x = -\psi'(y)$, varur man inser att $\varphi''(y) + \varphi(y) = 0$ och $\psi'(y) = 0$, d.v.s. $\varphi(y) = a \cos y + b \sin y$ och $\psi(y) = A$, där $a, b, A \in \mathbb{R}$. Sedan blir avslutningen densamma som i lösningsskissen.
6. Inget att kommentera.