TATA45 Komplex analys 2023-03-17, kommentarer

1. Det går bra att svara med en summa av flera serier, som i lösningsskissen.

   Även i (a)-uppgiften går det bra att partialbråksuppdela, även om räkningarna då blir lite längre.

   Av någon anledning bryter en handfull studenter ut ett z före partialbråksuppdelningen och får $z/(z^2-4) = (z/4)\big(1/(z-2) - 1/(z+2)\big)$, vilket inte är fel men onödigt. (Jag misstänker att de har påverkats av z-transformer i TATA77 Fourieranalys.)

   I (b)-uppgiften måste man svara med en serie / flera serier med $(z-1)$-potenser. Termerna får alltså inte se ut som konstant gånger $z(z-1)^n$, t.ex. – då är det inte längre en Laurentserie. Några som bröt ut z först (se föregående stycke) gjorde detta FEL.

2. Vid beräkningen av residyn i trippelpolen $z = 0$ kan man också använda derivataformeln, vilket också de allra flesta gjorde:

   $$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1/\cos z}{z^3} = \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{\cos z}\right)\Big|_{z=0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dz}\left(\frac{\sin z}{\cos^2 z}\right)\Big|_{z=0} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos z} + \frac{2\sin^2 z}{\cos^3 z}\right)\Big|_{z=0} = \frac{1}{2}.$$

   Några missar faktorn $1/2!$ här (FEL).

   Några gör fel vid beräkningen av residyn i enkelpolen $z = \pi/2$ och tror att

   $$\operatorname*{Res}_{z=\pi/2} \frac{1/z^3}{\cos z} = \frac{1}{z^3}\Big|_{z=\pi/2} \qquad \text{(FEL)},$$

   som om man bara kunde stryka den ”farliga” faktorn $\cos z$.

3. Det går naturligtvis bra att svara med $f(z) = \cos z - i \sin z + z^2 - (1+i)$.

   Några studenter bestämmer u (eller v) på samma sätt som i lösningsskissen, men i stället för att använda att vi vet vad $u - v$ är för att därefter bestämma v (respektive u) börjar de om och bestämmer även v (respektive u) från Cauchy-Riemanns ekvationer och får då typiskt

   $$f = u + iv = (e^y \cos x + x^2 - y^2 + A) + i\,(-e^y \sin x + 2xy + B), \quad A, B \in \mathbb{R} \qquad \text{(FEL)},$$

   som om A och B vore oberoende. De får i och för sig att $A = -1 = B$, vilket är rätt, men i regel inte för att $u - v$ är givet utan för att $f(0) = -i$; med detta resonemang skulle man (felaktigt) kunna få vilket värde på $f(0)$ som helst, eftersom $f(0) = (1 + A) + iB$.

4. Utan att använda gemensamma spegelpunkter blir uppgiften onödigt svår, och alla som försökte lösa uppgiften på annat sätt konstruerade en avbildning som inte avbildar Ω på en cirkelring.

5. Vid undersökningen längs C_R måste man motivera att $e^{-z}/z^2 \to 0$ då $|z| \to +\infty$, $0 \leq \operatorname{Arg} z \leq \pi/2$; det är ju viktigt att $|e^{-z}| = e^{-x} \leq 1$ där, och om vi exempelvis hade undersökt andra kvadranten i stället hade det blivit mycket mera komplicerat.

   Vid undersökningen längs L_R, där $z = x$, $x : 0 \to R$, och $u = x^2 + e^{-x} + \pi^2$, $v = 0$, resonerar några på ett av följande sätt för att motivera att argumenttillskottet längs L_R är noll:

   - ”$v = 0$”. Sant men det RÄCKER EJ, ty även u skulle ju ha kunnat vara noll någonstans, och i så fall vore argumenttillskottet odefinierat.
   - ”$u(0) = \pi^2 + 1$, $u \to \infty$ då $x \to \infty$ och $v = 0$”. Sant men det RÄCKER EJ, ty inte heller nu vet vi att $u \neq 0$ (Envar 1).
   - ”$u \geq \pi^2 + 1 > 0$, $v = 0$”. FEL, ty $u'(0) = -1 < 0$, så u antar mindre värden än $u(0) = \pi^2 + 1$ (Envar 1).

   Att däremot $u \geq \pi^2 > 0$ och $v = 0$ på L_R ser man omedelbart, och det räcker så klart.

6. Några skriver $f(z) = \ln|z^2 + z| + i\,\theta(z)$, utan att först dela upp $\log(z^2 + z) = \log(z+1) + \log z$ (UNDVIK DETTA), men gör då fel vid hanteringen av θ; t.ex. tror de ofta att θ-värdena tillhör ett intervall av längd 2π (FEL).

   Några skriver till och med $f(z) = \ln|z^2 + z| + i\,\theta(z^2 + z)$ (FEL); t.ex. är ju $i^2 + i = -1 + i = (-1-i)^2 + (-1-i)$, men θ-värdena i punkterna $z = i$ och $z = -1 - i$ är olika, se lösningsskissen.

7. Inget att kommentera.

Lars Alexandersson, 27 mars 2023