Talteori, Föreläsning 3

Aritmetiska funktioner, Dirichletfaltning, Multiplikativa funktioner, Möbiusinversion

Jan Snellman[1]

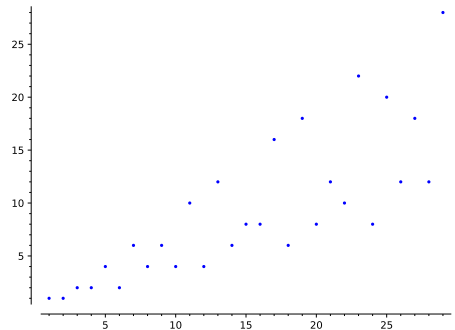
[1]Matematiska Institutionen
Linköpings Universitet
Föreläsningsanteckningar på kurshemsidan `http://courses.mai.liu.se/GU/TATA54/`

Summary

Definition

En *aritmetisk funktion* är en funktion $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{C}$.

Oftast, men inte alltid, så kommer f att anta heltalsvärden.
Euler-ϕ ett exempel:



Aritmetiska funktioner definierade genom primtalsfaktorisering

$$n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}, \quad p_i \text{ olika primtal}$$

Liouvilles funktion λ, Möbiusfunktionen μ:

$$\omega(n) = r$$
$$\Omega(n) = a_1 + \cdots + a_r$$
$$\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$$
$$\mu(n) = \begin{cases} \lambda(n) & \omega(n) = \Omega(n) \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Aritmetiska funktioner relaterade till divisorer

d antal delare, σ summa av delare, kändisen Euler ϕ.

$$d(n) = \sum_{k|n} 1$$

$$\sigma(n) = \sum_{k|n} k$$

$$\phi(n) = \sum_{\substack{1 \le k < n \\ \gcd(k,n)=1}} 1$$

Ännu fler aritmetiska funktioner

p primtal. Von Mangoldt-funktion Λ, primtalsräknarfunktionen π, Legendre symbol $\left(\frac{n}{p}\right)$, p-valuation v_p.

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log q & n = q^k,\ q \text{ primtal} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$\pi(n) = \sum_{\substack{1 \le k \le n \\ k \text{ primtal}}} 1$$

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \begin{cases} 0 & n \equiv 0 \mod p \\ +1 & n \not\equiv 0 \mod p \text{ och existerar } a \text{ så att } n \equiv a^2 \mod p \\ -1 & n \not\equiv 0 \mod p \text{ och existerar inget } a \text{ så att } n \equiv a^2 \mod p \end{cases}$$

$$v_p(n) = k,\ p^k | n,\ p^{k+1} \nmid n$$

Viktiga aritmetiska funktioner (ej standardnotation)

$$\mathsf{e}(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$$

$$0(n) = 0$$

$$1(n) = 1 \qquad \text{ofta betecknad } \zeta$$

$$\mathsf{I}(n) = n$$

$$\mathsf{e}_i(n) = \begin{cases} 1 & n = i \\ 0 & n \neq i \end{cases}$$

Definition

Låt f, g vara aritmetiska funktioner. Deras *Dirichletfaltning* är den aritmetiska funktion som ges av

$$(f * g)(n) = \sum_{\substack{1 \le a,b \le n \\ ab=n}} f(a)g(b) = \sum_{\substack{1 \le k \le n \\ k \mid n}} f(k)g(n/k) = \sum_{\substack{1 \le \ell \le n \\ \ell \mid n}} f(n/\ell)g(\ell) \qquad \text{(DC)}$$

Exempel

$$(f * g)(10) = f(1)g(10) + f(2)g(5) + f(5)g(2) + f(10)g(1)$$

Algebran av aritmetiska funktioner

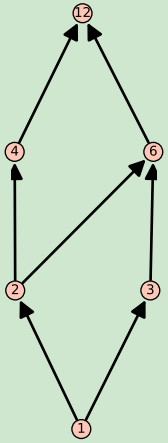
- $f * (g * h) = (f * g) * h$
- $f * g = g * f$
- Multiplikativ enhet, $\mathrm{e}(1) = 1$, $\mathrm{e}(n) = 0$ för $n > 1$
- Inte alla a.f. är inverterbara
- Vi kan addera: $(f + g)(n) = f(n) + g(n)$
- Vi kan skala: $(cf)(n) = cf(n)$
- $0(n) = 0$ nollvektor
- Ett $\mathbb{C}$-vektorrum med multiplikation; en *algebra*. Också en unitär kommutativ ring.

Matristolkning

- Låt $n \in \mathbb{Z}_+$ och $D(n) = \{\, 1 \leq k \leq n \mid k|n \,\}$ vara dess delare.
- Vi vill förstå a.f. begränsade till $D(n)$, speciellt hur multiplikationen fungerar
- Givet a.f. f, bilda matris A med rader och kolumner indexerade med $D(n)$, och $A_{ij} = f(j/i)$ om $i|j$, 0 annars
- P.s.s. för a.f. g, får matris B
- Då AB matrisen för $f * g$

Exempel

- $n = 12$, $D(n)$ as follows



- $f = 1$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $A * A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Summering

- $F(n) = (1 * f)(n) = \sum_{k|n} f(k)$
- Summeringen av f
- Ibland känner vi F men vill återskapa f
- $$\begin{aligned} F(1) &= f(1) \\ F(2) &= f(1) + f(2) \\ F(3) &= f(1) + f(3) \\ F(4) &= f(1) + f(2) + f(4) \\ &\vdots \end{aligned}$$
- Kan lösa ut f unikt:
- $$\begin{aligned} f(1) &= F(1) \\ f(2) &= F(2) - f(1) \\ &= F(2) - F(1) \\ f(3) &= F(3) - f(1) \\ &= F(3) - F(1) \\ f(4) &= F(4) - f(1) - f(2) \\ &= F(4) - F(1) - (F(2) - F(1)) \\ &= F(4) - F(2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Inverser

Teorem

f har multiplikativ invers $g = f^{-1}$ omm $f(1) \neq 0$

Bevis.

Vill ha $f * g = e$, så $(f * g)(m) = 1$ om $m = 1$, 0 annars. Får

$$
\begin{aligned}
1 &= (f * g)(1) = f(1)g(1) \\
0 &= (f * g)(2) = f(1)g(2) + f(2)g(1) \\
0 &= (f * g)(3) = f(1)g(3) + f(3)g(1) \\
0 &= (f * g)(4) = f(1)g(4) + f(2)g(2) + f(4)g(1) \\
0 &= (f * g)(5) = f(1)g(5) + f(5)g(1) \\
&\vdots \\
0 &= (f * g)(n) = f(1)g(n) + \sum_{\substack{k \mid n \\ 1 < k \leq n}} f(k)g(n/k)
\end{aligned}
$$

så vi kan, med induktion, lösa ut $g(n)$. □

Exempel

$$g(1) = \frac{1}{f(1)}$$

$$g(2) = \frac{-f(2)g(1)}{f(1)} = \frac{-f(2)}{f(1)^2}$$

$$g(3) = \frac{-f(3)g(1)}{f(1)} = \frac{-f(3)}{f(1)^2}$$

$$g(4) = \frac{-f(2)g(2) - f(4)g(1)}{f(1)} = \frac{-f(2)\frac{-f(2)}{f(1)^2} - \frac{f(4)}{f(1)}}{f(1)}$$

Definition

Om $f \neq \mathbf{0}$, så är *ordningen* av f

$$\operatorname{ord}(f) = \min\{\, n | f(n) \neq 0 \,\}$$

och *normen*

$$\|f\| = 2^{-\operatorname{ord}(f)}$$

Nota bene att detta är ett exempel på en *ultranorm*; $\left\|\frac{1}{1000} f\right\| = \|f\|$

Exempel

Låt

$$f(n) = \begin{cases} p & \text{om } n = p^2 \text{ där } p > 2 \text{ är ett primtal} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
f	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	4

Då är $\operatorname{ord}(f) = 9$ och $\|f\| = 2^{-9}$.

Lemma

- *Sätt* $f_n = f(n)e_n$, *då gäller att* $f_n * f_m = (f(n)e_n) * (f(m)e_m) = f(n)f(m)e_{nm}$.
- $f = \sum_n f_n$, *i.e., partialsummorna konvergerar mot* f*:*

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} f_n \right\| \to 0 \text{ då } N \to \infty$$

- *om* $f(1) = 0$ *så* $e + f$ *inverterbar, med invers given av den konvergenta geometriska serien*

$$\frac{e}{e+f} = e - f + f * f - f * f * f + \cdots$$

Definition

- f är *totalt multiplikativ* om $f(nm) = f(n)f(m)$ för alla m, n
- f är *multiplikativ* om $f(nm) = f(n)f(m)$ närhelst $\gcd(n, m) = 1$

Observera att för en multiplikativ funktion f så gäller

$$f_n * f_m = f_n * f_m = (f(n)e_n) * (f(m)e_m) = f(n)f(m)e_{nm} = f(nm) = e_{nm} = f_{nm}$$

för alla relativt prima n, m, och för en totalt multiplikativ funktion f så gäller detta för alla n, m.

Teorem

Låt $n = \prod_j p_j^{a_j}$, primtalsfaktorisering.

- *Om f mult. så antingen $f = 0$ eller $f(1) = 1$ och $f(n) = \prod_j f(p^j)$, i.e., f är bestämd av dess värden på primtalspotenser*
- *Om f tot. mult. så antingen $f = 0$ eller $f(1) = 1$ och $f(n) = \prod_j f(p)^j$, i.e., f är bestämd av dess värden på primtal*

Bevis.

Om $f(1) = 0$ och f är multiplikativ så är $f(n) = f(1n) = f(1)f(n) = 0$ för alla n. Om $f(1) \neq 0$ och f är multiplikativ, så är $f(1) = f(1)f(1)$, och eftersom $f(1) \neq 0$ så $f(1) = 1$. I detta fall så är $f(p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}) = f(p_1^{a_1}) \cdots f(p_r^{a_r})$.
Eftersom en totalt multiplikativ funktion också är multiplikativ så gäller ovanstående, och dessutom så är $f(p^r) = f(p)^r$.

□

Teorem

Euler ϕ är multiplikativ.

Bevis

Antag $\gcd(m, n) = 1$. Vill visa $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$, d.v.s.

$$|\mathbb{Z}^*_{mn}| = |\mathbb{Z}^*_m|\,|\mathbb{Z}_n*| \tag{1}$$

Hävdar att nedanstående funktion är en bijektion:

$$\mathbb{Z}^*_{mn} \ni [a]_{mn} \mapsto ([a]_m, [a]_n) \in \mathbb{Z}^*_m \times \mathbb{Z}^*_n \tag{2}$$

Bevis.

- Väldefinierad, ty $a \equiv a' \mod mn$ medför $a \equiv a' \mod m$ och $a \equiv a' \mod n$. Vidare, $\gcd(a, mn) = 1$ omm $\gcd(a, n) = 1$ och $\gcd(a, m) = 1$.
- Injektiv, ty $a \equiv a' \mod m$ och $a \equiv a' \mod n$ medför $a \equiv a' \mod mn$
- Surjektiv, p.g.a. Kinesiska Restsatsen: välj c, d så att $\gcd(c, m) = 1$, $\gcd(d, n) = 1$. Då finns unikt x mod mn med

$$x \equiv c \mod m$$
$$x \equiv d \mod n$$

så $[x]_{mn} \mapsto ([c]_m, [d]_n)$. Som tidigare, $\gcd(x, mn) = 1$.

Alternativt bevis: $\mathbb{Z}_{mn} \to \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ bijection enligt KRS, och $(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n)^* = \mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_n^*$. □

Example 7.3. Let $m = 4$ and $n = 9$, so that $mn = 36$. We list the integers from 1 to 36 in a rectangular chart, as shown in Figure 7.1.

(1)	(5)	9	(13)	(17)	21	(25)	(29)	33
2	6	10	14	18	22	26	30	34
3	(7)	(11)	15	(19)	(23)	27	(31)	(35)
4	8	12	16	20	24	28	32	36

Figure 7.1 *Demonstrating that* $\phi(36) = \phi(4)\phi(9)$.

Neither the second nor the fourth row contains integers relatively prime to 36, since each element in these rows is not relatively prime to 4, and hence not relatively prime to 36. We enclose the other two rows; each element of these rows is relatively prime to 4. Within each of these rows, there are 6 integers relatively prime to 9. We circle these; they are the 12 integers in the list relatively prime to 36. Hence, $\phi(36) = 2 \cdot 6 = \phi(4)\phi(9)$. ◀

Elementärt bevis (forts)

Theorem 7.4. Let m and n be relatively prime positive integers. Then $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$.

Proof. We display the positive integers not exceeding mn in the following way.

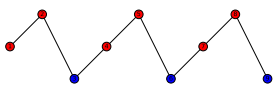
$$\begin{array}{cccccc}
1 & m+1 & 2m+1 & \dots & (n-1)m+1 \\
2 & m+2 & 2m+2 & \dots & (n-1)m+2 \\
3 & m+3 & 2m+3 & \dots & (n-1)m+3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
r & m+r & 2m+r & \dots & (n-1)m+r \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
m & 2m & 3m & \dots & mn
\end{array}$$

Now, suppose that r is a positive integer not exceeding m, and suppose that $(m, r) = d > 1$. Then no number in the rth row is relatively prime to mn, because any element of this row is of the form $km + r$, where k is an integer with $1 \le k \le n-1$, and $d \mid (km + r)$, because $d \mid m$ and $d \mid r$.

Consequently, to find those integers in the display that are relatively prime to mn, we need to look at the rth row only if $(m, r) = 1$. If $(m, r) = 1$ and $1 \le r \le m$, we must determine how many integers in this row are relatively prime to mn. The elements in this row are r, $m + r$, $2m + r$, $\dots$, $(n-1)m + r$. Because $(r, m) = 1$, each of these integers is relatively prime to m. By Theorem 4.6 the n integers in the rth row form a complete system of residues modulo n. Hence, exactly $\phi(n)$ of these integers are relatively prime to n. Because these $\phi(n)$ integers are also relatively prime to m, they are relatively prime to mn.

Because there are $\phi(m)$ rows, each containing $\phi(n)$ integers relatively prime to mn, we can conclude that $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$. ∎

1. Tag p primtal
2. Då alla $1 \leq a < p$ relativt prima till p, så $\phi(p) = p - 1$
3. Nu betraktar vi primpotensen p^r
4. För $1 \leq a < p^r$, $\gcd(a, p^r) > 1$ omm $p|a$
5. Exempel: $p = 3$, $r = 2$:



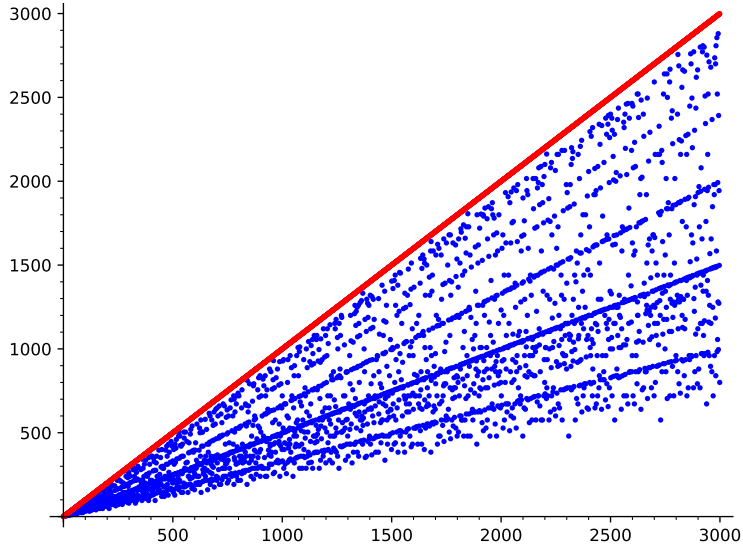
6. Så $\phi(p^r) = p^r - \frac{p^r}{p} = p^r - p^{r-1} = p^r \left(1 - \frac{1}{p}\right)$
7. För $n = p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}$, så ger multiplikativiteten att

$$\begin{aligned}\phi(p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}) &= \phi(p_1^{r_1}) \cdots \phi(p_s^{r_s}) \\ &= p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}(1 - 1/p_1) \cdots (1 - 1/p_s) \\ &= n \prod_j (1 - 1/p_j)\end{aligned}$$

Exempel

- $\phi(15) = \phi(3)\phi(5) = 2 * 4 = 8$
- $\phi(16) = \phi(2^4) = 2^4 - 2^3 = 8$
- $\phi(120) = \phi(2^3 * 3 * 5) = 120(1 - 1/2)(1 - 1/3)(1 - 1/5) = 120 * (4/15) = 32.$

$n = p$ ger $\phi(n) = n - 1$. Det kan ses i grafen till $\phi(n)$. Kan du tolka de andra linjerna?



Teorem

f, g (ej konstant noll) multiplikativa aritmetiska funktioner, $h = f * g$

(i) e *är multiplikativ*

(ii) $f(1) = 1$, *så f inverterbar*

(iii) *h är multiplikativ*

(iv) *f^{-1} är multiplikativ*

Bevis

(i-ii) Trivial. (iii): Antag $\gcd(m, n) = 1$. Då

$$h(mn) = (f * g)(mn) = \sum_{k|mn} f(k)g(\frac{mn}{k}) = \sum_{\substack{k_1|m \\ k_2|n}} f(k_1k_2)g(\frac{m}{k_1}\frac{n}{k_2})$$

$$= \sum_{\substack{k_1|m \\ k_2|n}} f(k_1)f(k_2)g(\frac{m}{k_1})g(\frac{n}{k_2}) = \sum_{k_1|m} f(k_1)g(\frac{m}{k_1}) \sum_{k_2|n} f(k_2)g(\frac{n}{k_2}) = h(m)h(n)$$

Bevis.

(iv): Formeln för inversen blir nu

$$f^{-1}(n) = -\sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f^{-1}(d) f(\frac{n}{d})$$

så om $\gcd(n, m) = 1$ så

$$f^{-1}(nm) \quad = \quad -\sum_{\substack{d|nm \\ d<nm}} f^{-1}(d) f(\frac{nm}{d}) \quad = \quad -\sum_{\substack{d_1|n \\ d_2|m \\ d_1 d_2<nm}} f^{-1}(d_1 d_2) f(\frac{nm}{d_1 d_2})$$

Antag med induktion att f^{-1} är multiplikativ för argument $< nm$. □

Teorem (Möbiusinversion)

1. $1 * \mu = \mathrm{e}$
2. $F(n) = \sum_{k|n} f(k)$ *för alla* n *omm* $f(n) = \sum_{k|n} F(k)\mu(n/k)$ *för alla* n

Bevis.

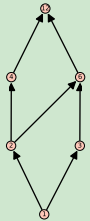
(1): Då de aktuella a.f. är multiplikativa (kontrollera!), räcker det att undersöka värdena på primpotenser p^r. Då $(1 * \mu)(p^0) = 1$, och för $r > 0$

$$(1 * \mu)(p^r) = (\mu * 1)(p^r) = \sum_{k=0}^{r} \mu(p^k) = 1 - 1 + 0 + \cdots + 0 = 0.$$

(2): Om $F = f * 1$ så $f = f * e = f * 1 * \mu = F * \mu$. □

Exempel

- $n = 12$, $D(n)$



-
- $f = 1$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $g = \mu$
- $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Divisorfunktioner

Kom ihåg:

$$d(n) = \sum_{k|n} 1, \qquad \sigma(n) = \sum_{k|n} k$$

Vi kan skriva detta som

$$d = 1 * 1, \qquad \sigma = 1 * \mathrm{I}$$

och dra slutsatsen att d, σ är multiplikativa, och att

$$\mu * d = 1, \qquad \mu * \sigma = \mathrm{I}$$

eller med andra ord

$$\sum_{k|n} \mu(k) d(n/k) = 1, \qquad \sum_{k|n} \mu(k) \sigma(n/k) = n$$

Definition

$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$. Speciellt, $\sigma_0 = d$, $\sigma_1 = \sigma$.

Lemma

σ_k *är multiplikativ*

Bevis.

Antag $\gcd(m, n) = 1$. Då

$$\sigma_k(mn) = \sum_{d|mn} d^k = \sum_{\substack{d_1|m \\ d_2|n}} (d_1 d_2)^k = \sum_{\substack{d_1|m \\ d_2|n}} d_1^k d_2^k =$$

$$\sum_{d_1|m} d_1^k \sum_{d_2|n} d_2^k = \sigma_k(m)\sigma_k(n)$$

□

Teorem

1. $\sigma_k(p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}) = \prod_{j=1}^{r} \frac{1-p_j^{k(a_j+1)}}{1-p_j^k}$
2. $\sum_{d|n} d^k \mu(n/d) = n^k$

Bevis.

Försök på egen hand! □

Lemma

$1 * \phi = \mathrm{I}$

Bevis.

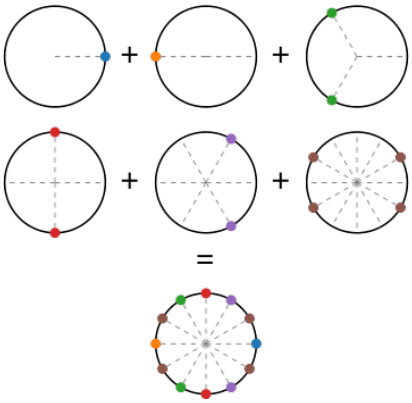
M.a.o., vill bevisa

$$\sum_{k|n} \phi(k) = n.$$

Multiplikativ, så sätt $n = p^r$.
Om $r = 0$: $\mathrm{LHS} = 1$, OK.
Om $r > 0$: $\mathrm{LHS} = \sum_{j=0}^{r} \phi(p^j) = 1 + \sum_{j=1}^{r} (p^j - p^{j-1}) = p^r$, ty teleskopsumma. □

Divisorer till 12

$$\phi(1) + \phi(2) + \phi(3) + \phi(6) + \phi(12) = 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4 = 12$$



Teorem

$$\phi(n) = \sum_{k|n} \mu(k)\frac{n}{k} = \sum_{k|n} k\mu(\frac{n}{k})$$

Bevis.

Då

$$1 * \phi = \mathsf{I},$$

har vi att

$$\phi = \mu * \mathsf{I} = \mathsf{I} * \mu$$

□

Definition

En n:e enhetsrot är en komplex rot till ekvationen $z^n = 1$. En primitiv sådan är ej k:e enhetsrot för mindra k.

Lemma

Sätt $\xi_n = \exp(\frac{2\pi}{n} i)$. Då är de n: enhetsrötterna ξ_n^s, $1 \leq s \leq n$, och de primitiva är ξ_n^k, $\gcd(k, n) = 1$.

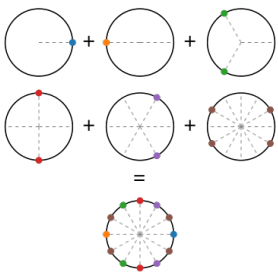
Lemma

För $n > 1$,

$$\sum_{s=1}^{n} \xi_n^s = \frac{\xi_n^n - 1}{\xi_n - 1} = 0.$$

Lemma

$$0 = \sum_{s=1}^{n} \xi_n^s = \sum_{k|n} \sum_{\gcd(\ell,k)=1} \xi_n^\ell$$



Låt $f(d)$ beteckna summan av de primitiva d:e enhetsrötterna. Då $f(1) = 1$, och för $n > 1$, $\sum_{d|n} f(d) = 0$. Så $1 * f = e$, varför $f = \mu$. Så the Möbiusfunktionen är summan av de primitiva enhetsrötterna.

Definition

Om f är en aritmetisk funktion så definierar vi dess *Dirichletserie* som

$$\mathfrak{D}_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

där s är en komplex variabel. Om f inte växer för fort så konvergerar serien i stora delar av $\mathbb{C}$: tex om $f(n) \in \mathcal{O}(n^k)$ så konvergerar serien för $\mathfrak{Re}(s) > k+1$. Definitionsområdet kan ofta utvidgas vidare via *analytisk fortsättning*.

Dirichletfaltningen är inspirerad av följande:

Lemma

Låt f, g vara aritmetiska funktioner. Då

$$\mathfrak{D}_f(s)\mathfrak{D}_g(s) = \mathfrak{D}_{f*g}(s)$$

Bevis.

Vi ser att

$$\frac{a}{k^s}\frac{b}{\ell^s} = \frac{ab}{(k\ell)^s}$$

så

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(k)}{k^s}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{g(\ell)}{\ell^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{k\ell=n} f(k)g(\ell) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}(f*g)(n)$$

□

Teorem

Om f är en inverterbar a.f. så är $\mathfrak{D}_f$ inverterbar, och

$$\frac{1}{\mathfrak{D}_f(s)} = \mathfrak{D}_{f^{-1}}(s).$$

Definition

Riemanns zetafunktion definieras som

$$\zeta(s) = \mathfrak{D}_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Serien konvergerar för $\mathfrak{Re}(s) > 1$, har en essentiel singularitet i $s = 1$, och kan analytiskt fortsättas till nästan hela $\mathbb{C}$. Den har då nollställen i $-2, -4, -6, -8, \ldots$ och *Riemanns förmodan* säger att de övriga nollställena alla har imaginärdel $\frac{1}{2}$.

Teorem

Riemann zeta kan skrivas som en oändlig Eulerporukt:

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ primtal}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

Bevis.

Använder att 1 är *multiplikativ*. □

Teorem

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \mathfrak{D}_{\mu}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

Bevis.

Använder *Möbiusinversion*. □