Talteori 6hp, Kurskod TATA54, Provkod TEN1
3 juni 2023
LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Examinator: Jan Snellman

Alla problem ger maximalt 3 poäng. Full poäng kräver fullständig lösning. 8p räcker för betyg 3, 11p för betyg 4, 14p för betyg 5.

Med μ avses Möbiusfunktionen, den multiplikativa funktion som uppfyller $\mu(1) = 1$, $\mu(p) = -1$ för p primtal, och $\mu(n) = 0$ för alla $n > 1$ som delas av kvadraten av något primtal. Med ϕ avses Eulers phi-funktion, som räknar antalet multiplikativt inverterbara kongruensklasser modulo n.

1) Hitta alla heltalslösningar till
$$4^x \times 8^y \times 32^z = 2$$

2) Hitta alla lösningar till
$$x^5 + 2x + 3 \equiv 0 \mod 25 \times 49$$
(Det räcker att specifiera en lösning modulo 25 samt modulo 49, du behöver inte utföra KRS-beräkningarna).

3) Bestäm en primitiv rot modulo 7, och hitta sedan alla heltalslösningar till
$$x^x \equiv x \mod 7$$
(Obs: $19^{19} \equiv 19 \mod 7$ och $19 \equiv 5 \mod 7$, men $5^5 \equiv 3 \mod 7$.)

4) Bevisa att $\sum_{d|n} \phi(d) = n$ och med hjälp av detta att $\sum_{d|n} d\mu(n/d) = \phi(n)$. (Du behöver inte visa att ϕ och μ är multiplikativa).

5) Ange alla udda primtal p så att kongruensen $x^2 \equiv 11 \mod p$ är lösbar.

6) Hitta den lösning (x, y) i positiva heltal till
$$x^2 - 11y^2 = 1$$
som ligger närmast origo. Hitta sedan en annan lösning i positiva heltal. Ge sedan en rationell approximation till $\sqrt{11}$ med absolutfel $< 10^{-4}$.

7) Skriv 87 som en summa av fyra kvadrater. Visa sedan att det inte går med tre.