George Baravdish

Bengt Ove Turesson

Problemsamling

Transformteori

2022

Linköpings universitet

28 mars 2022

Innehåll

1. Repetitionsuppgifter

Trigonometriska funktioner, den komplexa exponentialfunktionen

1.1. (a) Vilka värden har $\cos n\pi$, $\sin n\pi$, $\cos \frac{n\pi}{2}$ och $\sin \frac{n\pi}{2}$ för $n \in \mathbf{Z}$?

(b) Skriv om följande produkter som summor av cosinus och/eller sinus:

$$2\cos s \cos t, \quad 2\cos s \sin t, \quad 2\sin s \sin t$$

1.2. (a) Hur definieras e^{it} för $t \in \mathbf{R}$?

(b) Beräkna $e^{i\pi/2}$, $e^{i\pi}$, $e^{-i\pi/4}$, $e^{5\pi i/6}$, e^{0i}, $e^{2\pi i}$ och $e^{4\pi i}$.

(c) Vilka värden har $e^{in\pi}$ för $n \in \mathbf{Z}$?

(d) Vad är $|e^{it}|$ om $t \in \mathbf{R}$?

(e) Vad är $\overline{e^{it}}$ om $t \in \mathbf{R}$?

(f) Hur ser Eulers formler för cosinus och sinus ut?

(g) Härled en formel för $\cos^3 t$ med hjälp av Eulers formler.

(h) Skriv om $\cos s \cos t$ som en summa av cosinus och/eller sinus med hjälp av Eulers formler.

1.3. Beräkna följande integraler:

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t \sin 2t \, dt$

(b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^t \cos 4t \, dt$

(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cos 3t \, dt$

(d) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos t e^{it} \, dt$

(e) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t e^{it} \, dt$

Jämna och udda funktioner

1.4. (a) Vad menas med att en funktion är udda respektive jämn? Hur ser graferna för sådana funktioner ut?

(b) Avgör vilka av följande funktioner från $\mathbf{R}$ till $\mathbf{R}$ som är udda, jämna eller varken eller:

$$f(t) = t^2, \quad g(t) = t^3 \cos 4t, \quad h(t) = t^2 \cos 4t, \quad k(t) = t + t^2$$

1.5. Visa att om f är udda, så är

$$\int_{-a}^{a} f(t) \, dt = 0$$

och att om f är jämn, så är

$$\int_{-a}^{a} f(t) \, dt = 2 \int_{0}^{a} f(t) \, dt.$$

Tolka likheterna geometriskt.

1.6. Fyll i följande tabell:

f	g	fg	f/g	$f+g$	$f-g$
udda	udda				
jämn	jämn				
udda	jämn				
jämn	udda				

1.7. Visa att om f är udda/jämn, så är f' jämn/udda. Är omvändningen sann?

Periodiska funktioner

1.8. (a) Vad menas med att en funktion är periodisk? Hur ser grafen för en periodisk funktion ut?

(b) Bestäm den minsta perioden för var och en av funktionerna $\cos 2t$, $\sin 3t$, e^{4it} och e^{-2it}.

1.9. Antag att funktionen f har perioden p. Visa att

$$\int_a^{a+p} f(t)\,dt = \int_0^p f(t)\,dt$$

för varje reellt tal a.

1.10. Visa att om f har perioden p, så har även f' perioden p. Är omvändningen sann?

1.11. Antag att funktionen f har perioden p. Visa att f även har perioderna kp, $k = 2, 3, \ldots$.

Kontinuitet och derivata

1.12. Visa att funktionen $\cos t$, $t \in \mathbf{R}$, är kontinuerlig. Beräkna även funktionens derivata med hjälp av derivatans definition.

1.13. För vilka värden på t är funktionen $f(t) = \big||t| - 1\big|$, $t \in \mathbf{R}$, inte deriverbar? Visa att funktionen har höger- och vänsterderivata för dessa t samt beräkna de ensidiga derivatorna.

Partialbråksuppdelning

1.14. Partialbråksuppdela följande rationella funktioner:

(a) $\dfrac{1}{t(t-1)}$

(b) $\dfrac{1}{t^2(t-1)}$

(c) $\dfrac{1}{t(t^2+1)}$

Integraler

1.15. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 e^t\,dt$ med hjälp av definitionen av integral.

1.16. Beräkna följande generaliserade integraler:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}e^{-i\omega t}\,dt$, där $\omega \in \mathbf{R}$

(b) $\displaystyle\int_0^{\infty} t^2 e^{-st}\,dt$, där $s > 0$

Serier

1.17. (a) Vad menas med att en serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent?

(b) Visa att serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^3 - n}$ är konvergent.

2. Likformig konvergens

Definitionen

2.1. För $n = 1, 2, ...$ definieras $f_n(t) = nte^{-nt}$, $0 \leq t \leq 3$.

(a) Är följden punktvis konvergent på $[0, 3]$? I så fall, mot vad?

(b) Är följden likformigt konvergent $[0, 3]$? Förklara resultatet genom att rita grafen för f_n för några värden på n.

2.2. För $n = 1, 2, ...$ definieras $f_n(t) = \dfrac{nt}{1 + n^2t^2}$, $t \geq 0$.

(a) Konvergerar funktionsföljden likformigt på intervallet $[0, \infty[$?

(b) Visa att följden konvergerar likformigt på varje intervall $[a, \infty[$, där $a > 0$.

Integration

2.3. Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_1^5 \frac{nt}{n + t}\, dt$.

2.4. För $n = 1, 2, ...$ definieras $f_n(t) = \dfrac{nt}{1 + nt}$, $t \geq 0$.

(a) Konvergerar funktionsföljden likformigt på intervallet $[0, 1]$?

(b) Konvergerar funktionsföljden likformigt på intervallet $[1, \infty[$?

(c) Gäller det att

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\, dt = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(t)\, dt \text{ ?}$$

2.5. Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\cos(t/n)}{1 + t^2}\, dt$.

2.6. Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{dt}{1 + nt^7}$.

Funktionsserier

2.7. (a) För vilka t är funktionsserien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$ konvergent?

(b) På vilka interval $[-a, a]$ är serien likformigt konvergent?

2.8. Är funktionsserien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n^3 + t^{2n}}$, $t \in \mathbf{R}$, likformigt konvergent på $\mathbf{R}$?

2.9. Sätt $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n + t)^2}$, $t \geq 0$.

(a) Visa att f är kontinuerlig för $t \geq 0$.

(b) Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$.

2.10. Visa att funktionen $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{int}}{n^3}$, $t \in \mathbf{R}$, är kontinuerligt deriverbar på $\mathbf{R}$.

2.11. Visa att funktionen $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^2 + n^2}$, $t \in \mathbf{R}$, är kontinuerlig. Är f deriverbar?

2.12. (a) Beräkna värdet på serien $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}$, där $-1 < t < 1$.

(b) Beräkna värdet på serien $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$, där $-1 < t < 1$.

2.13. Sätt $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} \cos nt, \ t > 0$.

(a) Visa att f är deriverbar för $t > 0$.

(b) Beräkna $f'(\pi)$.

3. Fourierserier

Fourierserier

3.1. Bestäm fourierserien för den funktion f med perioden 2π som ges av

$$f(t) = |t|, \quad -\pi \leq t \leq \pi.$$

3.2. Bestäm fourierserien för den funktion f med perioden 2π som ges av $f(t) = 1 + t$, $-\pi \leq t < \pi$. Rita även grafen för seriens summa i intervallet $[-3\pi, 3\pi]$.

3.3. Antag att f har perioden 2π och $f(t) = (t+1)\cos t$ för $-\pi < t \leq \pi$. Vilket värde har fourierserien för f i 2π? I $t = 3\pi$? Tänk på att du inte behöver ta fram fourierserien!

3.4. Bestäm fourierserierna med perioden 2π för funktionerna

$$f(t) = \cos 3t + \sin t, \ t \in \mathbf{R}, \qquad \text{och} \qquad g(t) = \sin^3 t, \ t \in \mathbf{R}.$$

3.5. Funktionen f med perioden 2π är given genom

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{för } |t| \leq \pi/2, \\ 0 & \text{i resten av intervallet } [-\pi, \pi]. \end{cases}$$

(a) Utveckla f i en fourierserie med perioden 2π.

(b) Beräkna med hjälp av resultatet i a) summan för serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}.$$

3.6. Låt funktionen f med perioden 2π vara definierad genom $f(t) = t^2$, $|t| \leq \pi$.

(a) Ange fourierserien för f.

(b) Beräkna med hjälp av a) värdena på serierna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \qquad \text{och} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

3.7. Bestäm fourierserien för den funktion f med perioden 2π som ges av $f(t) = t$, $-\pi \leq t < \pi$. Beräkna även värdet på serien

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m + 1}.$$

Komplexa fourierserier

3.8. Bestäm den komplexa fourierserien med perioden 2π för $f(t) = 2\cos 2t$, $t \in \mathbf{R}$.

3.9. Bestäm den komplexa fourierserien för den funktion f med perioden 2π som ges av

$$f(t) = \begin{cases} -2, & -\pi \leq t < 0, \\ 2, & 0 \leq t < \pi. \end{cases}$$

3.10. Bestäm den komplexa fourierserien för den funktion med perioden 2π som ges av $f(t) = e^t$ för $-\pi \leq t < \pi$. Använd resultatet för att beräkna värdet på serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

3.11. Låt α vara ett reellt tal som inte är ett heltal. Bestäm den komplexa fourierserien för den funktion med perioden 2π som ges av $f(t) = \cos \alpha t, \ -\pi \leq t \leq \pi$. Använd resultatet för att bevisa formeln

$$\cot t = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t - n\pi}, \quad t \neq n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Formeln kan ses som en slags partialbråksuppdelning av funktionen $\cot t$.

3.12. Bestäm den komplexa fourierserien för funktionen i uppgift 3.3.1 genom att skriva om den reella serien med hjälp av Eulers formel.

3.13. Antag att f har perioden 2π och att fourierserien för f är

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n^3}.$$

Bestäm den komplexa fourierserien för f.

3.14. Bestäm alla lösningar y med perioden 2π, som inte är identiskt 0, till ekvationen

$$y''(t) + 5y(t) = y(t + \pi), \quad t \in \mathbf{R}.$$

3.15. Bestäm den komplexa fourierserien för funktionen

$$f(t) = \frac{1}{3 - e^{it}}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

3.16. Bestäm en funktion som har den komplexa fourierserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{int}}{2^n}.$$

Fourierkoefficienter

3.17. Låt f vara deriverbar med perioden 2π. Visa att följande relationer råder mellan f och dess komplexa fourierkoefficienter $F(n)$:

(a) f är jämn om och endast om $F(n)$ är jämn ($F(-n) = F(n)$ för alla n);

(b) f är udda om och endast om $F(n)$ är udda ($F(-n) = -F(n)$ för alla n);

(c) f är reellvärd om och endast om $\overline{F(n)} = F(-n)$ för alla n;

(d) f antar rent imaginära värden om och endast om $\overline{F(n)} = -F(-n)$ för alla n.

3.18. Antag att f är periodisk med perioden 2π och har de komplexa fourierkoefficienterna $F(n)$. Visa att

(a) funktionen $e^{iat}f(t)$, där $a \in \mathbf{Z}$, har fourierkoefficienterna $F(n - a)$;

(b) funktionen $f(t - b)$, där $b \in \mathbf{R}$, har fourierkoefficienterna $e^{-inb}F(n)$;

(c) funktionen $f'(t)$ har fourierkoefficienterna $inF(n)$;

(d) funktionen $\overline{f(t)}$ har fourierkoefficienterna $\overline{F(-n)}$;

(e) funktionen $\check{f}(t) = f(-t)$ har fourierkoefficienterna $F(-n)$.

3.19. Låt f och g vara två kontinuerliga funktioner med perioden 2π som har de komplexa fourierkoefficienterna $F(n)$ respektive $G(n)$. Faltningen $f * g$ mellan f och g definieras av

$$f * g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t - u)g(u)\, du, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Visa att $f * g$ också har perioden 2π samt att $f * g$ har fourierkoefficienterna $F(n)G(n)$.

3.20. Bestäm en lösning f med perioden 2π till ekvationen

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-u)\cos u\,du = \sin t, \quad -\infty < t < \infty.$$

3.21. Antag att f är kontinuerligt deriverbar med perioden 2π. Visa att $\lim_{n\to\pm\infty} nF(n) = 0$ (där som vanligt $F(n)$ är de komplexa fourierkoefficienterna för f).

3.22. Finns det en kontinuerligt deriverbar funktion f med perioden 2π som har de komplexa fourierkoefficienterna

$$F(n) = \frac{n}{1+n^2},\ n \in \mathbf{Z}\ ?$$

3.23. (a) Antag att f är periodisk med perioden 2π, att f är deriverbar i 0 och att $f(0) = 0$. Visa att om

$$\phi(t) = \frac{f(t)}{e^{it}-1} \quad \text{för } t \neq 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \ldots,$$

så är $F(n) = \Phi(n-1) - \Phi(n)$ för alla n. Använd detta för att visa att fourierserien för f är konvergent i 0 med värdet 0.

(b) Antag att g är periodisk med perioden 2π och att g är deriverbar i t_0. Visa att fourierserien för g är konvergent i t_0 med värdet $g(t_0)$.

Cosinus- och sinusserier

3.24. Bestäm cosinusserien för funktionen $f(t) = \sin t,\ 0 \le t \le \pi$.

3.25. Bestäm sinusserien för funktionen $f(t) = \cos t,\ 0 \le t \le \pi$. Använd resultatet för att visa att

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{16} = \frac{1}{2^2-1} - \frac{3}{6^2-1} + \frac{5}{10^2-1} - \frac{7}{14^2-1} + \ldots.$$

3.26. Låt $f(t) = t,\ 0 \le t \le \pi$.

(a) Bestäm cosinusserien för f.

(b) Bestäm sinusserien för f.

(c) Diskutera varför serierna i a) och b) konvergerar som de gör.

3.27. Antag att f är kontinuerligt deriverbar på $[0, \pi]$ och att f:s cosinus- och sinusserie är

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt \qquad \text{respektive} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt.$$

Vilka värden har serien

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

i intervallet $[-\pi, \pi]$?

3.28. Antag att f har perioden 2π och att f har fourierserien

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Bestäm fourierserierna för funktionerna

$$g(t) = \frac{f(t)+f(-t)}{2}, \quad t \in \mathbf{R}, \qquad \text{och} \qquad h(t) = \frac{f(t)-f(-t)}{2}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Fourierserier med allmän period

3.29. Funktionen f har perioden 1 och ges av $f(t) = t(t-1),\ 0 \le t \le 1$. Utveckla f i en fourierserie med perioden 1 och utred seriens konvergens.

3.30. Bestäm en lösning med perioden 2 till ekvationen

$$y'(t) + y(t-1) = \cos^2 \pi t.$$

Parsevals formel

3.31. Bestäm fourierserien med perioden 2π för $f(t) = |\cos t|,\ -\pi \le t \le \pi$. Använd resultatet för att beräkna värdet på serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}.$$

3.32. Den jämna funktionen f med perioden 2π definieras genom

$$f(t) = (t - \pi/2)^2, \quad 0 \le t \le \pi.$$

(a) Bestäm fourierserien för f.

(b) Beräkna $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

3.33. Låt f vara den funktion med perioden 2π som ges av $f(t) = |t|,\ -\pi \le t \le \pi$. Sätt

$$g(t) = A_0 + A_1 \cos t + A_2 \cos 2t + B_1 \sin t + B_2 \sin 2t, \quad t \in \mathbf{R}.$$

För vilka värden på A_0, A_1, A_2, B_1 och B_2 blir integralen

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g(t)|^2 \, dt$$

så liten som möjligt?

3.34. Beräkna integralen

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^6 t \, dt$$

med hjälp av teorin för fourierserier.

3.35. Beräkna integralen

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{int}}{2^n} \right|^2 dt.$$

3.36. För $N = 1, 2, ...$ definieras

$$f_N(t) = 1 + \sum_{n=1}^{N} (\cos nt - \sin nt), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Beräkna integralen

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_N(t)|^2 \, dt.$$

3.37. Antag att f är kontinuerligt deriverbar med perioden 2π samt att f har de komplexa fourierkoefficienterna $F(n)$. Bestäm fourierserien för funktionen $f * \bar{\check{f}}$ (där $\check{f}(t) = f(-t)$). Använd resultatet för att bevisa Parsevals formel.

3.38. Låt f och g vara två kontinuerliga funktioner med perioden 2π. Visa att om f och g har samma fourierkoefficienter, så är $f(t) = g(t)$ för varje $t \in \mathbf{R}$.

3.39. Visa att det inte finns någon kontinuerlig funktion med perioden 2π som har fourierserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{\sqrt{n}}.$$

Man kan visa att serien är konvergent för varje reellt t.

3.40. Låt f vara en kontinuerlig, positiv funktion på $[0, 2\pi]$. Uttryck arean innanför kurvan $r = f(\theta)$, där $0 \leq \theta \leq 2\pi$, i termer av f:s reella fourierkoefficienter (r och θ är polära koordinater).

3.41. Låt f vara en udda, kontinuerligt deriverbar funktion med perioden 2π. Visa att

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 \, dt.$$

För vilka udda funktioner råder likhet?

3.42. Antag att f är en kontinuerlig funktion med perioden 2π. Visa att serien $\displaystyle\sum_{n \neq 0} \frac{F(n)}{n^\alpha}$ är absolutkonvergent för $\alpha > \frac{1}{2}$ (där $F(n)$ är de komplexa fourierkoefficienterna för f).

Likformig konvergens för fourierserier

3.43. Undersök om fourierserierna för funktionerna i uppgifterna 3.1 och 3.2 är likformigt konvergenta.

3.44. Funktionen f har perioden 2π och ges av

$$f(t) = \begin{cases} a + bt & \text{om } \; -\pi < t < 0, \\ \cos t & \text{om } \; 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

För vilka värden på a och b konvergerar fourierserien för f likformigt mot f på $\mathbf{R}$?

3.45. Bestäm de komplexa fourierkoefficienterna för funktionen

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{int}}{1 + n^2}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Motivera noggrant!

3.46. Antag att den trigonometriska serien

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} F(n) e^{int}, \quad t \in \mathbf{R},$$

är absolutkonvergent för varje $t \in \mathbf{R}$. Kan f vara diskontinuerlig?

3.47. Antag att f är två gånger kontinuerligt deriverbar med perioden 2π. Visa att

$$F(n) = o(n^{-2}) \quad \text{då} \quad n \to \pm\infty, \qquad \text{d.v.s. att} \qquad \lim_{n \to \pm\infty} n^2 F(n) = 0.$$

Visa vidare att fourierserien för f är likformigt konvergent på $\mathbf{R}$.

4. Variabelseparation

Värmeledning

4.1. Lös värmeledningsproblemet

$$\begin{cases} u'_t - u''_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 1 + \cos 3x, & 0 \le x \le \pi, \\ u'_x(0,t) = u'_x(\pi,t) = 0, & t \ge 0. \end{cases}$$

4.2. Lös värmeledningsproblemet

$$\begin{cases} u'_t - u''_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \cos^2 x, & 0 \le x \le \pi, \\ u'_x(0,t) = u'_x(\pi,t) = 0, & t \ge 0. \end{cases}$$

4.3. Lös värmeledningsproblemet

$$\begin{cases} u'_t - u''_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 1 + 2x - \sin 2\pi x, & 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = 1,\ u(1,t) = 3, & t \ge 0. \end{cases}$$

4.4. Lös värmeledningsproblemet

$$\begin{cases} u'_t - u''_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \sin x, & 0 \le x \le \pi, \\ u'_x(0,t) = u'_x(\pi,t) = 0, & t \ge 0. \end{cases}$$

4.5. Lös följande värmeledningsproblem:

$$\text{(a)} \begin{cases} au'_t - u''_{xx} = 0, & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \min\{x, L-x\}, & 0 \le x \le L, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \ge 0, \end{cases}$$

$$\text{(b)} \begin{cases} au'_t - u''_{xx} = 0, & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 100 \cos \dfrac{\pi x}{2L}, & 0 \le x \le L, \\ u(0,t) = 100, & t \ge 0, \\ u(L,t) = 0, & t \ge 0. \end{cases}$$

4.6. En tunn stav, som är isolerad längs alla sina begränsningsytor, har sina ändpunkter i $x = 0$ och $x = L$. Vid tiden $t = 0$ är temperaturfördelningen i staven

$$u(x,0) = x, \qquad 0 \le x \le L.$$

Temperaturfördelningen i staven antas satisfiera differentialekvationen

$$u'_t - \frac{1}{a} u''_{xx} = 0.$$

Sök temperaturfördelningen i staven för $t > 0$. Beräkna även $\lim\limits_{t \to +\infty} u(x,t)$.

4.7. Bestäm en lösning till värmeledningsproblemet

$$\begin{cases} tu'_t - u''_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 1, \\ u(x,1) = \sin x + 2 \sin 3x, & 0 \le x \le \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \ge 1. \end{cases}$$

4.8. Bestäm en lösning till värmeledningsproblemet

$$\begin{cases} u'_t - u''_{xx} + hu = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le \pi, \\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 1, & t \ge 0, \end{cases}$$

där h är en positiv konstant. Problemet beskriver värmeledning i ett material, där materialet avger värme till det omgivande mediet.

Vågekvationen

4.9. En sträng är fäst i punkterna $x = 0$ och $x = \pi$ på x–axeln. Strängens form vid tiden $t > 0$ ges av kurvan $y = u(x, t)$, $0 \leq x \leq \pi$, varvid $u''_{tt} - u''_{xx} = 0$. Vid tiden $t = 0$ är strängen sträckt längs x–axeln, men ges en hastighet $u'_t(x, 0) = \pi x(\pi - x)/8$.

(a) Bestäm $u(x, t)$ för $t > 0$.

(b) Rita strängens ungefärliga utseende vid tiden $t = \pi/2$.

4.10. Lös svängningsproblemet

$$\begin{cases} u''_{tt} - u''_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u'_t(x,0) = \sin 3x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

4.11. Lös svängningsproblemet

$$\begin{cases} u''_{tt} - u''_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 3\sin 2x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u'_t(x,0) = 5\sin 3x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

4.12. Lös svängningsproblemet

$$\begin{cases} u''_{tt} - u''_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \sin^3 x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u'_t(x,0) = \sin x \cos x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

4.13. Lös svängningsproblemet

$$\begin{cases} u''_{tt} - u''_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(x,0) = x(x-\pi), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u'_t(x,0) = \sin^3 x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

4.14. Lös svängningsproblemet

$$\begin{cases} u''_{tt} - u''_{xx} = 0, & -\pi < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \sin x, & -\pi \leq x \leq \pi, \\ u'_t(x,0) = \pi^2 - x^2, & -\pi \leq x \leq \pi, \\ u(-\pi,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

4.15. Lös svängningsproblemet

$$\begin{cases} u''_{tt} - u''_{xx} + 2u'_t = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u'_t(x,0) = \sin^3 x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Laplace ekvation

4.16. Lös Laplace ekvation med randvillkor:

$$\begin{cases} u''_{xx} + u''_{yy} = 0, & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi, \\ u(x,0) = \sin 2x + \sin 3x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(x,\pi) = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0, & 0 \leq y \leq \pi. \end{cases}$$

4.17. En tunn kvadratisk platta med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ och $(0,1)$ är värmeisolerad längs de stora kvadratiska ytorna. Sök den stationära temperaturfördelningen i plattan då tre sidor har temperaturen 0 och den fjärde har temperaturen

(a) $u(1,y) = \sin \pi y, \quad 0 < y < 1,$

(b) $u(1,y) = \dfrac{1}{2} - \left| y - \dfrac{1}{2} \right|, \quad 0 < y < 1.$

4.18. Bestäm temperaturen $u(x,y)$ vid stationärt tillstånd i en kvadratisk platta med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ och $(1,1)$ i xy–planet, då randvillkoren bestäms av $u(x,0) = 0$, $u(x,1) = 1 - 2x$ för $0 \le x \le 1$, samt av att plattan är isolerad längs de sidor, där $x = 0$ och $x = 1$.

4.19. En tunn kvadratisk platta är värmeisolerad längs de stora kvadratiska ytorna samt längs den sida som löper längs x–axeln. I övrigt bestäms randtemperaturen av

$$\begin{cases} u(0,y) = 0, & 0 \le y \le 1, \\ u(1,y) = 1, & 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

och

$$u(x,1) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \dfrac{1}{2}, \\ & \\ 2x - 1, & \dfrac{1}{2} < y \le 1. \end{cases}$$

Bestäm den stationära temperaturfördelningen $u(x,y)$ i plattan.

4.20. Bestäm en lösning u till Dirichlets problem för Laplace ekvation i enhetscirkelskivan med randvärdena $u(e^{i\theta}) = 2 + \cos 3\theta + \sin 4\theta$.

4.21. Bestäm en lösning u till Dirichlets problem för Laplace ekvation i enhetscirkelskivan med randvärdena $u(e^{i\theta}) = 4 \sin^3 \theta$.

4.22. Bestäm en lösning till problemet

$$\begin{cases} u''_{xx} + u''_{yy} = 0, & x^2 + y^2 < 1, \\ u(x,y) = |x|, & x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

4.23. Lös Poissons ekvation med randvillkor:

$$\begin{cases} u''_{xx} + u''_{yy} = x, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \\ u(x,0) = u(x,1) = 0, & 0 \le x \le 1, \\ u(0,y) = u(1,y) = 0, & 0 \le y \le 1. \end{cases}$$

5. Fouriertransformen

Definitionen

5.1. Beräkna fouriertransformen för följande funktioner med hjälp av definitionen:

(a) $f(t) = e^{-|t|}$

(b) $f(t) = \chi(t)e^{-t}$

(c) $f(t) = e^{-|t|} \operatorname{sgn} t$

(d) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{om } |t| < 1 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$

(e) $f(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{om } |t| < 1 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$

(f) $f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{om } -\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$

(g) $f(t) = \sin t$

5.2. Motivera varför det inte finns en funktion $f \in L^1(\mathbf{R})$ med följande fouriertransform:

(a) $F(\omega) = \dfrac{1}{1+\omega}$

(b) $F(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{om } -1 < \omega < 1 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$

(c) $F(\omega) = \cos \omega$

Räknelagar och egenskaper hos fouriertransformen

5.3. Bestäm fouriertransformen för följande funktioner:

(a) $f(t) = te^{-t^2/2}$

(b) $f(t) = e^{-(t^2+2t)}$

(c) $f(t) = e^{-4t^2-4t-1}$

5.4. Antag att f har fouriertransformen $F(\omega) = e^{-\omega^4}$. Bestäm fouriertransformen för följande funktioner:

(a) $f(2t)$

(b) $f(2t+1)$

(c) $e^{it} f(2t+1)$

(d) $f'(t)$

(e) $tf(t)$

(f) $tf'(t)$

5.5. Bestäm fouriertransformen för följande funktioner:

(a) $f(t) = \dfrac{1}{t^2+2t+2}$

(b) $f(t) = \dfrac{1}{t^2+6t+13}$

(c) $f(t) = \dfrac{1}{4t^2+4t+2}$

(d) $f(t) = \dfrac{t}{(1+t^2)^2}$

5.6. Bestäm fouriertransformen för följande funktioner:

(a) $f(t) = \dfrac{1}{1+9t^2}$

(b) $f(t) = \dfrac{e^{it}}{1+9t^2}$

(c) $f(t) = \dfrac{\sin t}{1+9t^2}$

5.7. Antag att $f, f' \in L^1(\mathbf{R})$. Visa att $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$.

5.8. Antag att $f \in L^1(\mathbf{R})$ har fouriertransformen F. Bevisa följande lagar:

(a) Funktionen $e^{iat}f(t)$, där $a \in \mathbf{R}$, har fouriertransformen $F(\omega - a)$.

(b) Funktionen $f(t-b)$, där $b \in \mathbf{R}$, har fouriertransformen $e^{-ib\omega}F(\omega)$.

(c) Funktionen $f(at)$, där $a \neq 0$, har fouriertransformen $\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$.

(d) Funktionen $f'(t)$ har fouriertransformen $i\omega F(\omega)$ (förutsatt $f' \in L^1(\mathbf{R})$).

(e) Funktionen $tf(t)$ har fouriertransformen $iF'(\omega)$ (förutsatt $tf(t) \in L^1(\mathbf{R})$).

(f) Funktionen $\overline{f(t)}$ har fouriertransformen $\overline{F(-\omega)}$.

(g) Funktionen $\check{f}(t) = f(-t)$ har fouriertransformen $F(-\omega)$.

5.9. Antag att $f, f' \in L^1(\mathbf{R})$. Visa att $\lim_{\omega\to\pm\infty} \omega F(\omega) = 0$.

5.10. Härled fouriertransformen för $f(t) = e^{-t^2/2},\ t \in \mathbf{R}$.

5.11. Antag att $f \in L^1(\mathbf{R})$ och att fouriertransformen F har ändligt många nollställen. Undersök om ekvationen

$$g(t+1) - g(t) = f(t), \quad -\infty < t < \infty,$$

har någon lösning $g \in L^1(\mathbf{R})$.

5.12. Visa att om $f \in L^1(\mathbf{R})$, så är fouriertransformen F kontinuerlig på $\mathbf{R}$.

Inversion

5.13. Vilken funktion f har följande fouriertransform?

(a) $F(\omega) = \dfrac{12}{4+\omega^2}$

(b) $F(\omega) = \dfrac{1}{5+3i\omega}$

(c) $F(\omega) = \dfrac{2}{\omega^2+4\omega+13}$

(d) $F(\omega) = \dfrac{5}{(\omega^2+4)(\omega^2+9)}$

(e) $F(\omega) = \omega e^{-\omega^2/2}$

5.14. Funktionen f definieras genom

$$f(t) = \begin{cases} 2t & \text{om } |t| < 1, \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

(a) Beräkna fouriertransformen för f.

(b) Bestäm för varje $t \in \mathbf{R}$ gränsvärdet $\lim_{A\to\infty} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-A}^{A} F(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$.

5.15. Bestäm fouriertransformen för den funktion f som definieras av

$$f(t) = \begin{cases} 2 - |t| & \text{om } |t| < 2, \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

Använd resultatet för att beräkna integralen $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2}\, d\omega$.

5.16. Funktionen f definieras genom

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & \text{om } |t| < 1, \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

Bestäm fouriertransformen för f och beräkna integralen $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega - \omega \cos \omega}{\omega^3}\, d\omega$.

5.17. Härled fouriertransformen för $f(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbf{R}$, och med hjälp av denna fouriertransformen för $g(t) = \dfrac{1}{t^2 + 1}$, $t \in \mathbf{R}$.

5.18. Bestäm fouriertransformen för funktionen $f(t) = \dfrac{1 - \cos t}{t^2}$, $t \neq 0$, med hjälp av uppgift 5.1.e.

5.19. Bestäm (formellt) fouriertransformen för funktionen $f(t) = \dfrac{2 \sin t}{t}$, $t \neq 0$, med hjälp av uppgift 5.1.d.

5.20. Visa att om $f \in L^1(\mathbf{R})$ är deriverbar, så är $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(t) = 2\pi f(-t)$ för varje $t \in \mathbf{R}$.

5.21. Låt $f \in L^1(\mathbf{R})$ vara deriverbar. Visa att följande relationer råder mellan f och dess fouriertransform F:

(a) f är jämn om och endast om F är jämn.

(b) f är udda om och endast om F är udda.

(c) f är reellvärd om och endast om $\overline{F(\omega)} = F(-\omega)$ för alla ω.

(d) f antar rent imaginära värden om och endast om $\overline{F(\omega)} = -F(-\omega)$ för alla ω.

5.22. Visa följande entydighetssats för fouriertransformen: Om $F, G \in L^1(\mathbf{R})$ och $F(\omega) = G(\omega)$ för varje $\omega \in \mathbf{R}$, så är $f(t) = g(t)$ i varje punkt $t \in \mathbf{R}$ där både f och g är kontinuerlig.

Differentialekvationer

5.23. Bestäm en lösning $y \in L^1(\mathbf{R})$ till differentialekvationen

$$y''(t) - 4y(t) = -6e^{-|t|}, \quad -\infty < t < \infty.$$

5.24. Bestäm en lösning $y \in L^1(\mathbf{R})$ till differentialekvationen

$$y''(t) + ty'(t) + y(t) = 0, \quad -\infty < t < \infty,$$

som uppfyller $y(0) = 1$.

Plancherels formel

5.25. Använd resultatet i uppgift 5.15 för att beräkna integralen $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 \omega}{\omega^4}\, d\omega$.

5.26. Använd resultatet i uppgift 5.16 för att beräkna integralen $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \omega - \omega \cos \omega}{\omega^3}\right)^2 d\omega$.

5.27. Beräkna värdet på följande integraler:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{(1 + t^2)^2}\, dt$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)^2}$

Faltning

5.28. Antag att $f, g \in L^1(\mathbf{R})$. Bevisa (åtminstone formellt) faltningsformeln

$$\mathcal{F}(f * g)(\omega) = F(\omega)G(\omega), \quad \omega \in \mathbf{R}.$$

5.29. Bestäm en lösning $f \in L^1(\mathbf{R})$ till följande integralekvation:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)e^{-|u|}\,du = 4e^{-|t|} - 2e^{-2|t|}$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-u|}f(u)\,du = e^{-|t|} + |t|e^{-|t|}$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)e^{-u^2/2}\,du = e^{-t^2/4}$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)f(u)\,du = e^{-t^2/2}$

5.30. För vissa värden på a har integralekvationen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{(t-u)^2+1}\,du = \frac{a}{a^2+t^2}, \quad -\infty < t < \infty,$$

en lösning $f \in L^1(\mathbf{R})$. Lös ekvationen för dessa värden på a.

5.31. Bestäm alla lösningar $f \in L^1(\mathbf{R})$ till integralekvationen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)e^{-|u|}\,du = e^{-t^2/2}, \quad -\infty < t < \infty.$$

5.32. Beräkna faltningen $e^{-t^2/2} * e^{-t^2/2}$.

5.33. Funktionen f_a genom

$$f_a(t) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{t^2+a^2}, \quad -\infty < t < \infty,$$

där a är någon konstant. Beräkna faltningen $f_a * f_b$.

5.34. Funktionen f definieras på $\mathbf{R}$ av

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{om } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}.$$

Beräkna faltningen $f * f$.

5.35. (a) Låt $f(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbf{R}$. Beräkna faltningen $f * f$.

(b) Lös differentialekvationen $y''(t) - y(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbf{R}$.

5.36. Antag att ett linjärt system överför en insignal $f \in L^1(\mathbf{R})$ till en utsignal $y \in L^1(\mathbf{R})$ som är lösning till

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t), \quad -\infty < t < \infty,$$

där a och b är reella konstanter. Visa att om båda rötterna till den karakteristiska ekvationen

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

har negativ realdel, så är systemet kausalt, d.v.s. vid varje tidpunkt t beror $y(t)$ inte på $f(\tau)$ för $\tau > t$. Börja gärna med fallet $a = 10$ och $b = 16$.

5.37. Antag att $f \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$. Bestäm fouriertransformen för funktionen $f * \overline{\tilde{f}}$. Använd detta för att bevisa Plancherels formel. Det är tillåtet att använda att $f * \overline{\tilde{f}} \in C(\mathbf{R}) \cap L^1(\mathbf{R})$ utan bevis.

6. Laplacetransformen

Definitionen

6.1. Beräkna laplacetransformen för följande funktioner med hjälp av definitionen. Ange speciellt för vilka komplexa s som transformen existerar.

(a) $f(t) = 1$

(b) $f(t) = t$

(c) $f(t) = e^{at}$, där $a \in \mathbf{R}$

(d) $f(t) = \cos t$

6.2. Beräkna laplacetransformen för följande funktioner med hjälp av definitionen:

(a) $f(t) = \begin{cases} 1, & 1 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{för övrigt} \end{cases}$

(b) $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t \leq \pi \\ 0, & t > \pi \end{cases}$

(c) $f(t) = \begin{cases} t-2, & 0 \leq t \leq 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases}$

6.3. Beräkna integralen

$$\int_0^\infty te^{-3t} \sin t \, dt.$$

6.4. Antag att f är av exponentiell ordning på $[\,0, \infty\,[$, d.v.s. det finns konstanter $C \geq 0$ och $\sigma_0 \in \mathbf{R}$ sådana att $|f(t)| \leq Ce^{\sigma_0 t}$ för $t \geq 0$.

(a) Visa att f:s laplacetransform $F(s)$ existerar för $\operatorname{Re} s > \sigma_0$.

(b) Visa att det för reella s gäller att $F(s) \to 0$ då $s \to \infty$.

6.5. Antag att $f \in C^1[0, \infty[$. Visa att om f' är av exponentiell ordning på $[\,0, \infty\,[$, så gäller samma sak gäller för f. Är omvändningen sann?

Räknelagar och egenskaper hos laplacetransformen

6.6. Bestäm laplacetransformen för följande funktioner:

(a) $f(t) = e^{-t} \cos 2t$

(b) $f(t) = \sinh t$

(c) $f(t) = e^{-4t} \cosh 2t$

(d) $f(t) = (t^2 + 1)^2$

(e) $f(t) = t \sin 2t$

(f) $f(t) = (t^2 + 4t + 2)e^{2t}$

(g) $f(t) = \sin^2 t$

(h) $f(t) = \chi(t - 2\pi) \cos t$

6.7. Bestäm laplacetransformen för följande funktioner:

(a) $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \pi \\ \sin t, & t \geq \pi \end{cases}$

(b) $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < T \\ 0, & t \geq T \end{cases}$

(c) $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t < 2 \\ 4t, & t \geq 2 \end{cases}$

6.8. Bestäm laplacetransformen för den funktion som ges av

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{e^t - 1}{t} & \text{om } t > 0, \\ 1 & \text{om } t = 0. \end{cases}$$

Här är det enklast att tänka sig att s är reellt.

6.9. Bestäm laplacetransformen för funktionen

$$f(t) = n + 1, \quad n \leq t < n + 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Börja med att skissera funktionens graf.

6.10. Antag att f är av exponentiell ordning med laplacetransformen F. Bevisa följande lagar:

(a) Funktionen $e^{at} f(t)$, där $a \in \mathbf{R}$, har laplacetransformen $F(s - a)$.

(b) Funktionen $\chi(t - a) f(t - a)$, där $a > 0$, har laplacetransformen $e^{-as} F(s)$.

(c) Funktionen $f(at)$, där $a > 0$, har laplacetransformen $\frac{1}{a} F(\frac{s}{a})$.

(d) Funktionen $f'(t)$ har laplacetransformen $sF(s) - f(0)$ (här förutsätts även f' vara av exponentiell ordning).

(e) Funktionen $tf(t)$ har laplacetransformen $-F'(s)$.

6.11. Visa att om f är periodisk med perioden p och integrerbar på $[\,0, p\,]$, så är

$$F(s) = \frac{e^{ps}}{e^{ps} - 1} \int_0^p f(t) e^{-st}\, dt, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

6.12. Bestäm laplacetransformen för den funktion f med perioden 2 som ges av

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{om } 0 \leq t < 1, \\ 0 & \text{om } 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

6.13. Antag att $f^{(n)}$ är av exponentiell ordning på $[\,0, \infty\,[$ och att f har ett nollställe av ordning n i 0, vilket innebär att $f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$. Visa att för reella s gäller att $F(s) = o(s^{-n})$ då $s \to \infty$, d.v.s. att

$$s^n F(s) \to 0 \quad \text{då } s \to \infty.$$

Inversion

6.14. Bestäm den funktion f som har följande laplacetransform:

(a) $F(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$

(b) $F(s) = \dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$

(c) $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s+1)}$

(d) $F(s) = \dfrac{4}{s(s+2)^2}$

(e) $F(s) = \dfrac{b^2}{s(s^2+b^2)}$

(f) $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$

(g) $F(s) = \dfrac{3}{(s-1)^2}$

(h) $F(s) = \dfrac{24s}{(s-3)^5}$

(i) $F(s) = \dfrac{1}{s^2 - 3s + 2}$

(j) $F(s) = \dfrac{s+2}{s^2 + 2s + 2}$

(k) $F(s) = \dfrac{5}{s^2(s-5)^2}$

6.15. Bestäm den funktion f som har följande laplacetransform:

(a) $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{(s-1)(s-2)}$

(b) $F(s) = \dfrac{4e^{-s}}{s(s^2+4)}$

(c) $F(s) = \dfrac{e^{-s}(s+4)}{s(s^2+2s+4)}$

6.16. Antag att f är av exponentiell ordning på $[\,0, \infty\,[$, d.v.s. det finns konstanter $C \geq 0$ och $\sigma_0 \in \mathbf{R}$ sådana att $|f(t)| \leq Ce^{\sigma_0 t}$ för $t \geq 0$. Antag vidare att $f(t) = 0$ för $t < 0$.

(a) Visa att $\mathcal{L}f(s) = \mathcal{F}(e^{-\sigma t} f(t))(\omega)$ för $\operatorname{Re} s > \sigma_0$, där $s = \sigma + i\omega$.

(b) Bevisa inversionsformeln för laplacetransformen: Om f är kontinuerlig i $t \geq 0$, så är

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} s = \sigma} \mathcal{L}f(s) e^{st} \, ds,$$

där $\operatorname{Re} s > \sigma_0$.

(c) Bevisa entydighetssatsen för laplacetransformen: Om $\mathcal{L}f(s) = 0$ för alla s med $\operatorname{Re} s > \sigma_0$, så är $f(t) = 0$ i varje punkt där f är kontinuerlig.

6.17. Bestäm med hjälp av inversionsformeln den funktion f som har följande laplacetransform:

(a) $F(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$

(b) $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s-1)}$

Differentialekvationer

6.18. Lös differentialekvationen

$$y'(t) - y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ t-1, & 1 \leq t < \infty \end{cases}$$

med begynnelsevillkoret $y(0) = 0$.

6.19. Lös följande begynnelsevärdesproblem:

(a) $y'' + 3y' - 4y = 0, \qquad y(0) = 3,\ y'(0) = -2$

(b) $y'' + 4y' + 4y = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

(c) $y'' + 4y = 0, \qquad y(0) = 2,\ y'(0) = 2$

(d) $ty'' + 2y' + ty = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

6.20. Lös följande begynnelsevärdesproblem:

(a) $y''(t) + y(t) = 2e^t, \qquad y(0) = 2,\ y'(0) = 2$

(b) $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 5e^t, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

(c) $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = e^{-t} \sin t, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = -3$

6.21. Lös följande system av differentialekvationer med begynnelsevillkor:

(a) $\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{cases}$ där $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$ där $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x'(t) = 2y(t) + (1-t)e^{-t} \\ y'(t) = -2x(t) + 2te^{-t} \end{cases}$ där $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Faltning

6.22. Bestäm en lösning f till integralekvationen

$$f(t) - 2\int_0^t \cos(t-u)f(u)\,du = \sin t, \quad t \geq 0.$$

6.23. Bestäm en lösning f till följande integralekvation:

(a) $f(t) - \int_0^t \sin(t-\tau)f(\tau)\,d\tau = 1,\ t \geq 0$

(b) $\int_0^t e^{-\tau}\cos\tau f(t-\tau)\,d\tau = t^2e^{-t},\ t \geq 0$

(c) $f'(t) + \int_0^t f(\tau)\,d\tau = \sin t,\ t \geq 0,\ f(0) = 1$

Kan du lösa den sista ekvationen utan att använda laplacetransformen?

6.24. Bestäm en lösning y till differentialekvationen

$$y''(t) + y(t) = f(t), \quad 0 \leq t < \infty,$$

som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = y'(0) = 0$. Här betecknar f en given funktion av exponentiell ordning.

6.25. Använd faltningsformeln för att bestämma f då laplacetransformen av f är

(a) $F(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$,

(b) $F(s) = \dfrac{1}{s(s^2+1)}$.

6.26. Antag att $F(s)$ och $G(s)$ existerar för $\operatorname{Re} s > \sigma_f$ respektive $\operatorname{Re} s > \sigma_g$. Bevisa (åtminstone formellt) faltningsformeln

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = F(s)G(s) \quad \text{för} \quad \operatorname{Re} s > \max(\sigma_f, \sigma_g).$$

6.27. Antag att f och g är av exponentiell ordning på $[\,0,\infty\,[$. Visa att även faltningen $f * g$ är av exponentiell ordning på $[\,0,\infty\,[$.

7. z-transformen

Definitionen

7.1. Beräkna z-transformen för följande funktioner med hjälp av definitionen. Ange speciellt för vilka komplexa z som transformen existerar.

(a) $f(k) = 1$

(b) $f(k) = a^k$

(c) $f(k) = \delta(k-m)$, där $m = 0, 1, ...$

(d) $f(k) = \dfrac{a^k}{k!}$

(e) $f(k) = k$

(f) $f(k) = \cos k\alpha$, där α är reellt

(g) $f(k) = \dbinom{k}{2}$

7.2. Beräkna z-transformen för funktionen

$$f(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, 2, 4, ... \\ 0, & k = 1, 3, 5, ... \end{cases}.$$

För vilka z existerar transformen?

Räknelagar och egenskaper hos z-transformen

7.3. Bestäm z-transformen för följande funktioner:

(a) $f(k) = k\delta(k-3)$

(b) $f(k) = k\dbinom{k}{2}$

(c) $\chi(k-1)(k-1)^2$

(d) $f(k) = \begin{cases} (-1)^{k/2} & \text{om } k \text{ är jämnt} \\ 0 & \text{om } k \text{ är udda} \end{cases}$

7.4. Antag att f växer högst exponentiellt: det finns konstanter C och R sådana att $|f(k)| \leq CR^k$ för $k = 0, 1, \dots$. Visa att z-transformen $F(z)$ existerar för alla komplexa z med $|z| > R$.

7.5. Antag att f har z-transformen $F(z)$ och att denna existerar för $|z| > R$. Bevisa följande räkneregler och ange transfomens konvergensområde:

(a) Funktionen $\overline{f(k)}$ har z-transformen $\overline{F(\overline{z})}$.

(b) Funktionen $a^k f(k)$, där $a \neq 0$, har z-transformen $F(\frac{z}{a})$.

(c) Funktionen $\chi(k-m)f(k-m)$, där $m = 1, 2, ...$, har z-transformen $z^{-m}F(z)$.

(d) Funktionen $kf(k)$ har z-transformen $-zF'(z)$.

(e) Funktionen $f(k+m)$, där $m = 1, 2, ...$, har z-transformen $z^m F(z) - \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} f(k) z^{m-k}$.

(f) Funktionen $\displaystyle\sum_{m=0}^{k} f(m)$ har z-transformen $\dfrac{z}{z-1}F(z)$.

Inversion

7.6. Bestäm $f(k),\ k = 0, 1, 2 \dots$, då $F(z)$ ges av

(a) $F(z) = \dfrac{z^2}{(z+2)^2}$,

(b) $F(z) = \dfrac{z}{z^2 - 1}$,

(c) $F(z) = \dfrac{1}{z-2}$,

(d) $F(z) = \dfrac{1}{z(z+1)}$,

(e) $F(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$,

(f) $F(z) = \log \dfrac{z}{z-a}$,

(g) $F(z) = \dfrac{e^{1/z}}{z}$.

7.7. Antag att z-transformen $F(z)$ för f existerar för $|z| > R$. Bevisa inversionsformeln för z-transformen:

$$f(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) z^{k-1}\, dz, \quad k = 0, 1, \dots,$$

där C är en positivt orienterad kurva i området $\{z \in \mathbf{C} : |z| > R\}$ som går ett varv kring origo.

7.8. Bevisa entydighetssatsen för z-transformen: Om det gäller att $F(z) = G(z)$ för $|z| > R$, så är $f(k) = g(k),\ k = 0, 1, \dots$.

7.9. Använd inversionsformeln för att bestämma $f(k)$, då

(a) $F(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$,

(b) $F(z) = \dfrac{z+1}{(z-2)^2}$.

Differensekvationer

7.10. Lös differensekvationen

$$y(k+1) - 2y(k) = 0, \quad k = 0, 1, 2 \dots,$$

med begynnelsevillkoret $y(0) = 3$.

7.11. Lös differensekvationen

$$y(k+1) - y(k) = k^2, \quad k = 0, 1, 2 \dots,$$

med begynnelsevillkoret $y(0) = 0$.

7.12. Lös differensekvationen

$$y(k+2) + y(k+1) - 6y(k) = 0, \quad k = 0, 1, 2 \dots,$$

med begynnelsevillkoren $y(0) = 0,\ y(1) = 5$.

7.13. Den s.k. fibonacciföljden $y(k),\ k = 0, 1, 2 \dots$, definieras av rekursionsformeln

$$y(k+2) = y(k+1) + y(k), \quad k = 0, 1, 2 \dots,$$

och $y(0) = y(1) = 1$. Visa att

$$y(k) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right).$$

7.14. Lös differensekvationen

$$y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k) = 1, \quad k = 0, 1, 2 \ldots,$$

med begynnelsevillkoren $y(0) = 0,\ y(1) = 1$.

7.15. Lös differensekvationen

$$y(k+2) + 2y(k+1) + y(k) = 4k, \quad k = 0, 1, 2 \ldots,$$

med begynnelsevillkoren $y(0) = y(1) = 0$.

7.16. Lös differensekvationen

$$y(k+2) + y(k) = 2, \quad k = 0, 1, 2 \ldots,$$

med begynnelsevillkoren $y(0) = y(1) = 0$.

Faltning

7.17. Antag att f och g har z-transformerna $F(z)$ respektive $G(z)$ och att dessa existerar för $|z| > R_f$ respektive $|z| > R_g$. Visa att faltningen

$$f * g(k) = \sum_{m=0}^{k} f(k-m)g(m), \quad k \in \mathbf{Z},$$

har z-transformen $F(z)G(z)$ och ange speciellt för vilka z denna existerar.

7.18. Räkna ut faltningen

$$f * g(k) = \sum_{m=0}^{k} f(k-m)g(m), \quad k = 0, 1, 2 \ldots,$$

då $f(k) = k$ och $g(k) = k^2,\ k = 0, 1, 2 \ldots$.

7.19. Räkna ut värdet på summan

(a) $y(k) = \displaystyle\sum_{m=0}^{k} m^2,\ k = 0, 1, 2 \ldots$

(b) $y(k) = \displaystyle\sum_{m=0}^{k} 2^m,\ k = 0, 1, 2 \ldots$

7.20. Lös differensekvationen

$$y(k+1) - 2y(k) = f(k), \quad k = 0, 1, 2 \ldots,$$

med begynnelsevillkoret $y(0) = 0$, där f är en given funktion på $\mathbf{N}$.

7.21. Betrakta differensekvationen

$$y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k) = f(k), \quad k = 0, 1, 2 \ldots,$$

med begynnelsevillkoren $y(0) = y(1) = 0$.

(a) Lös problemet med $f = \delta$. Lösningen kallas *impulssvaret*.

(b) Visa att för en allmän funktion f är lösningen $y = h * f$, där h är impulssvaret.

7.22. Lös faltningsekvationen

$$\sum_{m=0}^{k} 2^{k-m} y(m) = k^2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

7.23. Lös faltningsekvationen

$$y(k) + 2 \sum_{m=0}^{k} (k-m) y(m) = 5 \cdot 2^k, \quad k = 0, 1, 2 \ldots .$$

7.24. Lös faltningsekvationen

$$y(k) = \sum_{m=0}^{k} a^{k-m} y(m) + f(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots ,$$

då f är given och $f(0) = 0$.

7.25. Lös ekvationen

$$k y(k) - 2 \sum_{m=0}^{k} y(m) = k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Ledningar

2.6. Använd att man har likformig konvergens på varje intervall $[\delta, 1]$ för $\delta > 0$ (men inte på $[0, 1]$).

2.8. Bestäm maximum för seriens termer $\dfrac{t^n}{n^3 + t^{2n}}$, $t \in \mathbf{R}$, för att kunna använda Weierstrass majorantsats.

2.12. (a) Använd att $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} t^n.$

(b) Använd att $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \tau^{n-1}\, d\tau.$

3.3. Använd att fourierserien har perioden 2π. Vilka värden har serien i 0 och π?

3.4. Vilken är serieutvecklingen av en av funktionerna i fourierbasen?

3.8. Använd Eulers formel.

3.13. Använd Eulers formel.

3.14. Ansätt en komplex fourierserie. Man kan faktiskt inse att fourierserien för en lösning y till ekvationen konvergerar överallt mot y.

3.15. Funktionen kan skrivas som en geometrisk serie.

3.16. Summera den geometriska serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{it}}{2}\right)^n.$

3.17. (a) För att visa att F är jämn om f är det använder man definitionen av $F(n)$. För att visa omvändningen använder man fourierserien för f.

3.18. I alla deluppgifterna använder man definitionerna av de olika funktionernas fourierkoefficienter.

3.19. För att visa att $f * g$ har perioden 2π använder man definitionen av $f * g$. För att beräkna fourierkoefficienterna för $f * g$ använder man definitionen.

3.20. Ansätt en komplex fourierserie och använd formeln i uppgift 3.19.

3.21. Vilken funktion har fourierkoefficienterna $nF(n)$?

3.22. Använd uppgift 3.21.

3.23. (b) Bilda hjälpfunktionen $f(t) = g(t + t_0) - g(t_0)$, $t \in \mathbf{R}$, som är deriverbar i 0 med värdet 0.

3.27. Här använder man konvergenssatsen för cosinus- och sinusserier.

3.28. Observera att g är en jämn funktion som överensstämmer med f på $[0, \pi]$ medan h är en udda funktion som överensstämmer med f på $]0, \pi[$.

3.30. Ansätt en komplex fourierserie med perioden 2 och skriv om högra ledet med Eulers formel.

3.33. Använd att partialsumman till fourierserien för f bäst approximerar f bland alla trigonometriska polynom av grad 2.

3.34. Parsevals formel

3.35. Parsevals formel

3.36. Parsevals formel

3.37. Använd först faltningsformeln i uppgift 3.19 i kombination med uppgift 3.18 för att ta fram fourierkoefficienterna för $f * \bar{\check{f}}$. Använd sedan att fourierserien för $f * \bar{\check{f}}$ konvergerar mot $f * \bar{\check{f}}(0)$ i $t = 0$.

3.38. Använd Parsevals likhet på $h = f - g$.

3.39. Om det funnes en sådan funktion f, vore serien $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ konvergent enligt Parsevals likhet.

3.40. Arean är $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r(\theta)^2\,d\theta$. Använd Parsevals likhet.

3.41. Skriv om vänstra och högra ledet med Parsevals likhet.

3.42. Använd Cauchy–Schwartz olikhet i kombination med Parsevals likhet.

3.43. För serien för funktionen i uppgift 3.1 fungerar Weierstrass majorantsats. Fundera på om fourierserien för funktionen i uppgift 3.2 är kontinuerlig.

3.44. För att serien ska konvergera likformigt räcker det (i det här fallet) att f är kontinuerlig och har perioden 2π.

3.45. Integrera serien termvis för att bestämma koefficienterna.

3.46. Observera att i det här fallet medför absolutkonvergens likformig konvergens.

3.47. Vilken funktion har fourierkoefficienterna $n^2F(n)$? Använd Weierstrass majorantsats.

4.3. Ansätt $u(x,t) = v(x,t) + Ax + B$, där A och B väljs så att du får homogena villkor.

4.8. Ansätt $u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x)$, där φ väljs lämpligt.

5.2. Vilka egenskaper har fouriertransformen F om $f \in L^1(\mathbf{R})$?

5.5. I de tre första deluppgifterna kan man kvadratkomplettera, i den sista kan man använda att funktionen är derivatan av en funktion vars transform man känner.

5.7. Använd att $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(\tau)\,d\tau$ för att visa att gränsvärdet $\lim_{t\to\infty} f(t)$ existerar. Varför måste gränsvärdet vara 0?

5.8. (d) När man partialintegrerar, behöver man använda uppgift 5.7.
(e) Derivera $F(\omega)$ under integraltecknet.

5.9. Vilken funktion har fouriertransformen $\omega F(\omega)$?

5.10. Använd att f uppfyller sambandet $f'(t) + tf(t) = 0$. Att $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$ är användbart.

5.11. Fouriertransformera ekvationen och resonera.

5.12. Använd att

$$F(\omega+\delta) - F(\omega) = \int_{-A}^{A} f(t)(e^{-i\delta t} - 1)e^{-i\omega t}\,dt + \int_{|t|\geq A} f(t)(e^{-i(\omega+\delta)t} - e^{-i\omega t})\,dt$$

för varje δ och varje $A > 0$.

5.13. (c) Kvadratkomplettera.
(d) Partialbråksuppdela.
(e) Använd att $\omega e^{-\omega^2/2} = -\frac{d}{d\omega}e^{-\omega^2/2}$.

5.14. (b) Använd inversionsformeln.

5.15. Integralen beräknas lättast med hjälp av inversionsformeln.

5.17. Använd inversionsformeln för att härleda transformen för g.

5.20. Det här är egentligen bara inversionsformeln.

5.21. (a) För att visa att F är jämn om f är det använder man definitionen av $F(\omega)$. För att visa omvändningen använder man inversionsformeln.

5.23. Fouriertransformera båda leden i ekvationen.

5.25. Använd Plancherels formel.

5.28. Använd definitionen av fouriertransformen för $f * g$. Det, som är svårt att motivera, är att man får kasta om integrationsordningen.

5.29. Var och en av ekvationerna är en faltningsekvation.

5.30. För att bestämma möjliga värden på a använder man att $F(\omega) \to 0$ då $\omega \to \pm\infty$ om $f \in L^1(\mathbf{R})$.

5.32. Fouriertransformera faltningen och invertera sedan.

5.36. Skriv lösningen y som en faltning och resonera.

5.37. Använd först faltningsformeln i uppgift 5.28 i kombination med uppgift 5.8 för att ta fram fouriertransformen för $f * \bar{\check{f}}$. Använd sedan inversionsformeln för ett lämpligt värde på t.

6.3. Integralen är en laplacetransform.

6.4. (a) Visa att $F(s)$ är absolutkonvergent för $\operatorname{Re} s > \sigma_0$.

(b) Detta bör följa av den första deluppgiften.

6.5. Använd att $f(t) = f(0) + \displaystyle\int_0^{t} f'(\tau)\, d\tau,\ t \geq 0$, för att visa att f är av exponentiell ordning om f' är det. För omvändningen: Leta efter en begränsad funktion som oscillerar snabbt.

6.7. (a) $f(t) = \chi(t-\pi)\sin((t-\pi)+\pi) = -\chi(t-\pi)\sin(t-\pi)$. Använd förskjutningsformeln.

6.8. Transformera båda leden i identiteten $tf(t) = e^t - 1$ för att få en differentialekvation för $F(s)$.

6.9. Exempelvis kan man transformera identiteten $\chi(t)f(t) - \chi(t-1)f(t-1) = 1,\ t \geq 0$. Man kan också beräkna transformen direkt med definitionen: $F(s) = \displaystyle\sum_0^\infty (n+1) \int_n^{n+1} e^{-st}\, dt$. Man behöver då kunna summera serien $\displaystyle\sum_0^\infty (n+1)(e^{-s})^n$, där $\operatorname{Re} s > 0$.

6.10. (e) Derivera $F(s)$ under integraltecknet.

6.11. Ersätt $f(t)$ med $f(t+p)$ i definitionen av laplacetransformen, substituera och räkna en stund.

6.13. Vilken funktion har laplacetransformen $s^n F(s)$?

6.14. Parialbråksuppdela och/eller kvadratkomplettera.

6.15. (a) Invertera först $\dfrac{1}{(s-1)(s-2)}$ och använd sedan förskjutningsformeln.

6.23. Efter derivering blir den sista ekvationen $f''(t) + f(t) = \cos t$. Från ekvationen får man dessutom att $f'(0) = 0$.

6.26. Använd definitionen av laplacetransformen för $f * g$. Det, som är svårt att motivera, är att man får kasta om integrationsordningen.

6.27. Använd att det finns konstanter A, B, σ_1, σ_2 sådana att $|f(t)| \leq Ae^{\sigma_1 t}$ och $|g(t)| \leq Be^{\sigma_2 t}$ för $t \geq 0$ för att skatta faltningen $f * g(t) = \displaystyle\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau,\ t \geq 0$, uppåt.

7.1. (a) Använd att $\sum_0^\infty r^k = \dfrac{1}{1-r}$ för $|r| < 1$.

(d) Använd serieutvecklingen av exponentialfunktionen.

(e) Derivera identiteten $\sum_0^\infty r^k = \dfrac{1}{1-r}$.

(f) Transformera först $g(k) = e^{ik\alpha},\ k = 0, 1, \dots$.

(g) Använd att $\dbinom{k}{2} = \dfrac{k(k-1)}{2}$.

7.5. (d) Derivera $F(z)$ och multiplicera med z.

(f) Kasta om summationsordningen i $\sum_{k=0}^\infty \left(\sum_{m=0}^k f(m) \right) z^{-k}$.

7.6. (f) Använd att $F(z) = -\log\left(1 - \dfrac{a}{z}\right)$ i kombination med serieutvecklingen av $\log(1-w)$. Man kan också derivera $F(z)$.

(g) Använd serieutvecklingen av exponentialfunktionen.

7.7. Skriv $F(z) = \sum_{m=0}^\infty f(m) z^{-m}$ och integrera serien termvis. Integralerna kan beräknas t.ex. genom parametrisering av cirkeln.

7.8. Använd inversionsformeln eller en entydighetssats för potensserier.

7.17. Kasta om summationsordningen i $\sum_{k=0}^\infty \left(\sum_{m=0}^k f(k-m) g(m) \right) z^{-k}$.

7.18. Använd faltningsformeln.

7.19. Summorna kan ses som faltningarna mellan $f(k) = k^2$ och $g(k) = 1$ respektive $f(k) = 2^k$ och $g(k) = 1$.

Svar

1.1. (a) $\cos n\pi = (-1)^n$, $\sin n\pi = 0$,

$$\cos\tfrac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{om } n = 2k+1 \\ (-1)^k & \text{om } n = 2k \end{cases}, \quad \sin\tfrac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{om } n = 2k \\ (-1)^k & \text{om } n = 2k+1 \end{cases}$$

(b) $2\cos s \cos t = \cos(s+t) + \cos(s-t)$, $2\cos s \sin t = \sin(s+t) - \sin(s-t)$, $2\sin s \sin t = \cos(s-t) - \cos(s+t)$

1.2. (a) $e^{it} = \cos t + i \sin t$

(b) $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{-i\pi/4} = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$, $e^{5\pi i/6} = \dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$, $e^{0i} = e^{2\pi i} = e^{4\pi i} = 1$

(c) $(-1)^n$

(d) 1

(e) e^{-it}

(f) $\cos t = \dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}$, $\sin t = \dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$

(g) $\cos^3 t = \dfrac{3}{4}\cos t + \dfrac{1}{4}\cos 3t$

1.3. (a) $-\pi$

(b) $\dfrac{1}{17}e^{\pi} - \dfrac{1}{17}e^{-\pi}$

(c) 0

(d) π

(e) $2\pi i$

1.4. (a) f är udda om $f(-t) = -f(t)$ för alla t. f är jämn om $f(-t) = f(t)$ för alla $t \in \mathbf{R}$.

(b) f och h är jämna, g är udda, k är varken udda eller jämn

1.6.

f	g	fg	f/g	$f+g$	$f-g$
udda	udda	jämn	jämn	udda	udda
jämn	jämn	jämn	jämn	jämn	jämn
udda	jämn	udda	udda	—	—
jämn	udda	udda	udda	—	—

1.7. Nej. Motexempel: $f'(t) = 2t$ är udda, $f(t) = 1 + t^2$ är varken udda eller jämn.

1.8. (a) f har perioden p om $f(t+p) = f(t)$ för alla $t \in \mathbf{R}$.

(b) π, $\dfrac{2\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{2}$ resp. π

1.10. Nej. Motexempel: $f'(t) = 1 + \cos t$ har perioden 2π, $f(t) = t + \sin t$ är inte periodisk.

1.13. Funktionen saknar derivata för $t = -1, 0, 1$. $f'_-(-1) = f'_+(0) = f'_-(1) = -1$, $f'_+(-1) = f'_-(0) = f'_+(1) = 1$

1.14. (a) $\dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t}$

(b) $\dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2}$

(c) $\dfrac{1}{t} - \dfrac{t}{t^2+1}$

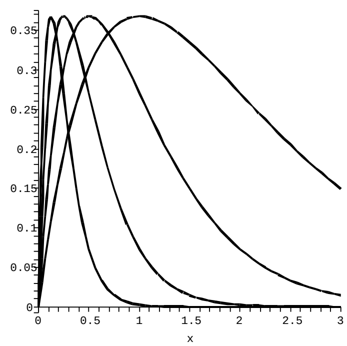
1.16. (a) $\dfrac{2}{1+\omega^2}$

(b) $\dfrac{2}{s^3}$

1.17. (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent med summan S om $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = S$.

2.1. (a) Ja, mot $f(t) = 0$

(b) Nej. I figuren nedan syns f_n för $n = 1, 2, 4, 8$ på intervallet $[0, 3]$.



2.2. (a) Nej

2.3. 12

2.4. (a) Nej

(b) Ja

(c) Ja

2.5. $\dfrac{\pi}{4}$

2.6. 0

2.7. (a) $-1 \le t < 1$

(b) $[-a, a]$ med $0 \le a < 1$

2.8. Ja

2.9. (b) 1

2.11. Ja

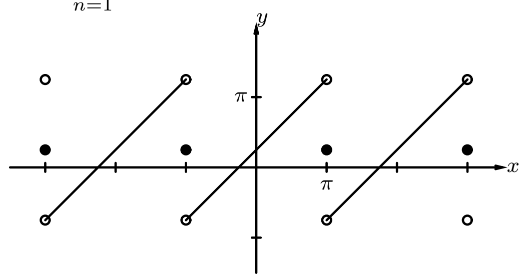
2.12. (a) $f(t) = \dfrac{1}{(1-t)^2}$

(b) $g(t) = -\ln(1-t)$

2.13. (b) $\dfrac{e^{\pi}}{(e^{\pi}+1)^2}$

3.1. $\displaystyle\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)t}{(2m+1)^2}$

3.2. $1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nt$



3.3. 1 resp. -1

3.4. $\cos 3t+\sin t$; $\frac{3}{4}\sin t-\frac{1}{4}\sin 3t$

3.5. (a) $\frac{1}{\pi}+\frac{\cos t}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{m+1}}{\pi(4m^2-1)}\cos 2mt$,

(b) $\frac{2-\pi}{4}$

3.6. (a) $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt$,

(b) $-\frac{\pi^2}{12}$ respektive $\frac{\pi^2}{6}$

3.7. $-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nt$; $\quad \frac{\pi}{4}$ (japp, med +)

3.8. $e^{2it}+e^{-2it}$

3.9. $-\frac{4i}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(2m+1)it}}{2m+1}$

3.10. $\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-in}e^{int}$; $\quad \frac{1}{2}(\pi\coth\pi-1)$

3.11. $\frac{\alpha\sin\alpha\pi}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}e^{int}$

3.12. $\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(2m+1)it}}{(2m+1)^2}$

3.13. $\sum_{n\neq 0}\frac{e^{int}}{in^3}$

3.14. $y(t)=Ae^{2it}+Be^{-2it}$, där A och B är godtyckliga tal

3.15. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{int}}{3^{n+1}}$

3.16. $\frac{e^{it}}{2-e^{it}}$

3.20. $f(t)=2\sin t$

3.22. Nej

3.24. $\dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2mt}{4m^2 - 1}$

3.25. $\dfrac{8}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \dfrac{m \sin 2mt}{4m^2 - 1}$

3.26. (a) $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{\cos(2m+1)t}{(2m+1)^2}$

(b) $2 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt$

(c) Cosinusserien konvergerar snabbare än sinusserien p.g.a. att den periodiska utvidningen av den udda utvidgningen av f har diskontinuiteter vilket inte den periodiska utvidningen av den jämna utvidgningen av f har.

3.27. $\begin{cases} 2f(t), & 0 < t < \pi \\ 0, & -\pi < t < 0 \\ f(0), & t = 0 \\ f(\pi), & t = \pm\pi \end{cases}$

3.28. $g(t) \sim \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt,\ h(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$

3.29. $-\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2n\pi t}{n^2}$. Serien konvergerar mot f överallt.

3.30. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi \sin 2\pi t + \frac{1}{2} \cos 2\pi t}{1 + 4\pi^2}$

3.31. $\dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{m+1}}{4m^2 - 1} \cos 2mt;\qquad \dfrac{\pi^2 - 8}{16}$

3.32. (a) $\dfrac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} \cos 2nt$

(b) $\dfrac{\pi^4}{90}$

3.33. $A_0 = \dfrac{\pi}{2},\ A_1 = -\dfrac{4}{\pi},\ A_2 = B_1 = B_2 = 0$

3.34. $\dfrac{5\pi}{8}$

3.35. $\dfrac{2\pi}{3}$

3.36. $2\pi(1 + N)$

3.37. $\sum_{-\infty}^{\infty} |F(n)|^2 e^{int}$

3.40. $\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right).$

3.41. Likhet för $f(t) = B \sin t$, där B är godtyckligt

3.43. Serien i 3.1 är likformigt konvergent. Serien i 3.2 är inte likformigt konvergent.

3.44. $a = 1,\ b = \dfrac{2}{\pi}$

3.45. $F(n) = \dfrac{1}{1+n^2}$

3.46. Nej

4.1. $u(x,t) = 1 + e^{-9t}\cos 3x$

4.2. $u(x,t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}e^{-4t}\cos 2x$

4.3. $u(x,t) = 1 + 2x - e^{-4\pi^2 t}\sin 2\pi x$

4.4. $u(x,t) = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{4m^2-1}e^{-4m^2 t}\cos 2mx$

4.5. (a) $u(x,t) = \dfrac{4L}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2m+1)^2}e^{-(2m+1)^2\pi^2 t/L^2 a}\sin\frac{(2m+1)\pi x}{L}$

(b) $u(x,t) = 100\Big(1-\dfrac{x}{L}\Big) + \dfrac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(4n^2-1)}e^{-n^2\pi^2 t/L^2 a}\sin\frac{nx}{L}$

4.6. $u(x,t) = \dfrac{L}{2} - \dfrac{4L}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2m+1)^2}e^{-(2m+1)^2\pi^2 t/L^2 a}\cos\frac{(2m+1)\pi x}{L}, \quad \lim_{t\to+\infty}u(x,t) = \dfrac{L}{2}$

4.7. $u(x,t) = \dfrac{\sin x}{t} + \dfrac{2\sin 3x}{t^9}$

4.8. $u(x,t) = \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(-1)^n}{n^2+h}e^{-(n^2+h)t}\sin nx + \dfrac{\sinh\sqrt{h}x}{\sinh\sqrt{h}\pi}$

4.9. (a) $u(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2m+1)^4}\sin(2m+1)t\sin(2m+1)x$

4.10. $u(x,t) = \dfrac{1}{3}\sin 3t\sin 3x$

4.11. $u(x,t) = 3\cos 2t\sin 2x + \frac{5}{3}\sin 3t\sin 3x$

4.12. $u(x,t) = \dfrac{3}{4}\cos t\sin x + \dfrac{1}{4}\sin 2t\sin 2x - \dfrac{1}{4}\cos 3t\sin 3x$

4.13. $u(x,t) = \dfrac{3}{4}\sin t\sin x - \dfrac{1}{12}\sin 3t\sin 3x - \dfrac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2m+1)^3}\cos(2m+1)t\sin(2m+1)x$

4.14. $u(x,t) = \cos t\sin x + \dfrac{64}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2m+1)^4}\sin\frac{(2m+1)t}{2}\sin\frac{(2m+1)x}{2}$

4.15. $u(x,t) = \frac{3}{4}te^{-t}\sin x - \frac{1}{8\sqrt{2}}e^{-t}\sin(\sqrt{8}t)\sin 3x$

4.16. $u(x,y) = (\cosh 2y - \coth 2\pi\sinh 2y)\sin 2x + (\cosh 3y - \coth 3\pi\sinh 3y)\sin 3x$

4.17. (a) $u(x,y) = \dfrac{\sinh\pi x}{\sinh\pi}\sin\pi y$

(b) $u(x,y) = \dfrac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{n^2\sinh n\pi}\sinh n\pi x\ \sin n\pi y$

4.18. $u(x,y) = \dfrac{8}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2m+1)^2\sinh\pi(2m+1)}\sinh\pi(2m+1)y\ \cos\pi(2m+1)x$

4.19. $u(x,y) = x + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)^2 \cosh \pi(2m+1)} \cosh \pi(2m+1)y \, \sin \pi(2m+1)x$

4.20. $u(re^{i\theta}) = 2 + r^3 \cos 3\theta + r^4 \sin 4\theta$

4.21. $u(re^{i\theta}) = 3r \sin\theta - r^3 \sin 3\theta$

4.22. $u(r,\theta) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{4m^2-1} r^{2m} \cos 2m\theta$

4.23. $u(x,y) = \frac{2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3(e^{n\pi}+1)} (e^{n\pi y} + e^{n\pi - n\pi y}) \sin n\pi x + \frac{1}{6}(x^3 - x)$

5.1. (a) $F(\omega) = \dfrac{2}{1+\omega^2}$

(b) $F(\omega) = \dfrac{1}{1+i\omega}$

(c) $F(\omega) = \dfrac{-2i\omega}{1+\omega^2}$

(d) $F(\omega) = \begin{cases} \dfrac{2\sin\omega}{\omega} & \text{om } \omega \neq 0 \\ 2 & \text{om } \omega = 0 \end{cases}$

(e) $F(\omega) = \begin{cases} 2\dfrac{1-\cos\omega}{\omega^2} & \text{om } \omega \neq 0 \\ 1 & \text{om } \omega = 0 \end{cases}$

(f) $F(\omega) = \begin{cases} \dfrac{2\cos(\omega\pi/2)}{1-\omega^2} & \text{om } \omega \neq \pm 1 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{om } \omega = \pm 1 \end{cases}$

(g) F existerar inte eftersom f inte tillhör $L^1(\mathbf{R})$

5.2. (a) $F(\omega)$ är obegränsad

(b) $F(\omega)$ är diskontinuerlig

(c) $F(\omega)$ går inte mot 0 då $\omega \to \infty$

5.3. (a) $F(\omega) = -i\sqrt{2\pi}\omega e^{-\omega^2/2}$

(b) $F(\omega) = \sqrt{\pi} e^{1+i\omega-\omega^2/4}$

(c) $F(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\omega/2} e^{-\omega^2/16}$

5.4. (a) $F(\omega) = \frac{1}{2} e^{-\omega^4/16}$

(b) $F(\omega) = \frac{1}{2} e^{i\omega/2-\omega^4/16}$

(c) $F(\omega) = \frac{1}{2} e^{i(\omega-1)/2-(\omega-1)^4/16}$

(d) $F(\omega) = i\omega e^{-\omega^4}$

(e) $F(\omega) = -4i\omega^3 e^{-\omega^4}$

(f) $F(\omega) = (4\omega^4 - 1)e^{-\omega^4}$

5.5. (a) $F(\omega) = \pi e^{i\omega-|\omega|}$

(b) $F(\omega) = \frac{\pi}{2} e^{3i\omega-2|\omega|}$

(c) $F(\omega) = \frac{\pi}{2} e^{(i\omega-|\omega|)/2}$

(d) $F(\omega) = -\frac{i\pi\omega}{2} e^{-|\omega|}$

5.6. (a) $F(\omega) = \frac{\pi}{3}e^{-|\omega|/3}$

(b) $F(\omega) = \frac{\pi}{3}e^{-|\omega-1|/3}$

(c) $F(\omega) = \frac{\pi}{6i}(e^{-|\omega-1|/3} - e^{-|\omega+1|/3})$

5.11. Nej

5.13. (a) $f(t) = 3e^{-2|t|}$

(b) $f(t) = \frac{1}{3}e^{-5t/3}\chi(t)$

(c) $f(t) = \frac{1}{3}e^{-2it-3|t|}$

(d) $f(t) = \frac{1}{4}e^{-2|t|} - \frac{1}{6}e^{-3|t|}$

(e) $f(t) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}te^{-t^2/2}$

5.14. (a) $F(\omega) = 4i\dfrac{\omega\cos\omega - \sin\omega}{\omega^2},\ \omega \neq 0,\ F(0) = 0$

(b) $\begin{cases} 2t & \text{om } |t| < 1 \\ 1 & \text{om } t = 1 \\ -1 & \text{om } t = -1 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$

5.15. $F(\omega) = 4\left(\dfrac{\sin\omega}{\omega}\right)^2,\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\,d\omega = \pi$

5.16. $F(\omega) = 4\dfrac{\sin\omega - \omega\cos\omega}{\omega^3},\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega - \omega\cos\omega}{\omega^3}\,d\omega = \frac{\pi}{2}$

5.18. $F(\omega) = \begin{cases} \pi(1-|\omega|) & \text{om } |\omega| < 1 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$

5.19. $F(\omega) = \begin{cases} 2\pi & \text{om } |\omega| < 1 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$

5.23. $y(t) = 2e^{-|t|} - e^{-2|t|}$

5.24. $y(t) = e^{-t^2/2}$

5.25. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4\omega}{\omega^4}\,d\omega = \frac{2\pi}{3}$

5.26. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin\omega - \omega\cos\omega}{\omega^3}\right)^2 d\omega = \frac{2\pi}{15}$

5.27. (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{2}$

5.29. (a) $f(t) = 3e^{-2|t|}$

(b) $f(t) = e^{-|t|}$

(c) $f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2/2}$

(d) $f(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} e^{-t^2}$

5.30. $f(t) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{a-1}{(a-1)^2+t^2},\ a > 1$

5.31. $f(t) = \left(1 - \frac{1}{2}t^2\right)e^{-t^2/2}$

5.32. $e^{-t^2/2} * e^{-t^2/2} = \sqrt{\pi}e^{-t^2/4}$

5.33. $f_a * f_b = f_{a+b}$

5.34. $f * f(t) = \begin{cases} 2 - |t| & \text{om } -2 < t < 2 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$

5.35. (a) $f * f(t) = \frac{1}{4}(1 + |t|)e^{-|t|}$

(b) $y(t) = -\frac{1}{8}(1 + |t|)e^{-|t|}$

5.37. $|F(\omega)|^2$

6.1. (a) $F(s) = \dfrac{1}{s}$, $\operatorname{Re} s > 0$

(b) $F(s) = \dfrac{1}{s^2}$, $\operatorname{Re} s > 0$

(c) $F(s) = \dfrac{1}{s - a}$, $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$

(d) $F(s) = \dfrac{s}{s^2 + 1}$, $\operatorname{Re} s > 0$

6.2. Transformerna existerar för alla komplexa s.

(a) $F(s) = \begin{cases} 1 & \text{om } s = 0 \\ \dfrac{e^{-s} - e^{-2s}}{s} & \text{för övrigt} \end{cases}$

(b) $F(s) = \dfrac{e^{-\pi s} + 1}{s^2 + 1}$, $s \in \mathbf{C}$ med $s \neq \pm i$; $F(\pm i) = \pm i\pi/2$

(c) $F(s) = \begin{cases} -2 & \text{om } s = 0 \\ \dfrac{1 - 2s - e^{-2s}}{s^2} & \text{för övrigt} \end{cases}$

6.3. $\dfrac{3}{50}$

6.5. Nej, ett motexempel är $f(t) = \cos(e^{t^2}),\ t \geq 0$.

6.6. (a) $F(s) = \dfrac{s + 1}{s^2 + 2s + 5}$

(b) $F(s) = \dfrac{1}{s^2 - 1}$

(c) $F(s) = \dfrac{s + 4}{s^2 + 8s + 12}$

(d) $F(s) = \dfrac{24}{s^5} + \dfrac{4}{s^3} + \dfrac{1}{s}$

(e) $F(s) = \dfrac{4s}{(s^2 + 4)^2}$

(f) $F(s) = 2\dfrac{(s - 1)^2}{(s - 2)^3}$

(g) $F(s) = \dfrac{2}{s(s^2 + 4)}$

(h) $F(s) = \dfrac{se^{-2\pi s}}{s^2 + 1}$

6.7. (a) $F(s) = -\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2 + 1}$

(b) $F(s) = \dfrac{1}{s}(1 - e^{-Ts})$

(c) $F(s) = \dfrac{2}{s^3} + e^{-2s}\left(\dfrac{4}{s} - \dfrac{2}{s^3}\right)$

6.8. $F(s) = \ln \dfrac{s}{s-1}, \ s > 1$

6.9. $F(s) = \dfrac{e^s}{s(e^s - 1)}, \ \operatorname{Re} s > 0$

6.12. $F(s) = \dfrac{e^s}{s(1 + e^s)}, \ \operatorname{Re} s > 0$

6.14. (a) $f(t) = 1 - e^{-t}$

(b) $f(t) = \dfrac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$ om $a \neq b$ och te^{at} om $a = b$

(c) $f(t) = t + e^{-t} - 1$

(d) $f(t) = 1 - (2t+1)e^{-2t}$

(e) $f(t) = 1 - \cos bt$

(f) $f(t) = t - \sin t$

(g) $f(t) = 3te^t$

(h) $f(t) = t^3 e^{3t}(3t + 4)$

(i) $f(t) = e^{2t} - e^t$

(j) $f(t) = e^{-t}\cos t + e^{-t}\sin t$

(k) $f(t) = \dfrac{1}{25}((5t-2)e^{5t} + 5t + 2)$

6.15. (a) $f(t) = \chi(t-1)(e^{2(t-1)} - e^{t-1})$

(b) $f(t) = \chi(t-1)(1 - \cos(2(t-1)))$

(c) $f(t) = \chi(t-1)(1 - e^{-(t-1)}\cos(\sqrt{3}(t-1)))$

6.17. (a) $f(t) = 1 - e^{-t}$

(b) $f(t) = e^t - 1 - t$

6.18. $y(t) = \chi(t-1)(e^{t-1} - t)$

6.19. (a) $y(t) = e^{-4t} + 2e^t$

(b) $y(t) = e^{-2t} + 2te^{-2t}$

(c) $y(t) = 2\cos 2t + \sin 2t$

(d) $y(t) = \dfrac{\sin t}{t}$

6.20. (a) $y(t) = \cos t + \sin t + e^t$

(b) $y(t) = e^t - e^{-t}\sin t$

(c) $y(t) = \dfrac{3}{2}e^{-2t} - \dfrac{1}{2}e^{-t}(\cos t + \sin t)$

6.21. (a) $\begin{cases} x(t) = \cosh t \\ y(t) = \sinh t \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x(t) = te^{-t} + \sin 2t \\ y(t) = \cos 2t \end{cases}$

6.22. $f(t) = te^t$

6.23. (a) $f(t) = \dfrac{t^2}{2} + 1$

(b) $f(t) = \dfrac{1}{3}e^{-t}(t^3 + 6t)$

(c) $f(t) = \cos t + \dfrac{1}{2}t\sin t$

6.24. $y(t) = \sin t * f(t)$

6.25. (a) $f(t) = 1 - e^{-t}$

(b) $f(t) = 1 - \cos t$

7.1. (a) $F(z) = \dfrac{z}{z-1}, \ |z| > 1$

(b) $F(z) = \dfrac{z}{z-a}, \ |z| > |a|$

(c) $F(z) = z^{-m}, \ z \neq 0$

(d) $F(z) = e^{a/z}, \ z \neq 0$

(e) $F(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2}, \ |z| > 1$

(f) $F(z) = \dfrac{z^2 - z\cos\alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}, \ |z| > 1$

(g) $F(z) = \dfrac{z}{(z-1)^3}, \ |z| > 1$

7.2. $F(z) = \dfrac{z^2}{z^2-1}, \ |z| > 1$

7.3. (a) $F(z) = \dfrac{3}{z^3}$

(b) $F(z) = \dfrac{2z^2 + z}{(z-1)^4}$

(c) $F(z) = \dfrac{z+1}{(z-1)^3}$

(d) $F(z) = \dfrac{z^2}{z^2+1}$

7.5. (a) $|z| > R$

(b) $|z| > |a|R$

(c) $|z| > R$

(d) $|z| > R$

(e) $|z| > R$

(f) $|z| > \max\{1, R\}$

7.6. (a) $f(k) = (k+1)(-2)^k$

(b) $f(k) = \dfrac{1-(-1)^k}{2}$

(c) $f(k) = \chi(k-1)2^{k-1}$

(d) $f(k) = \delta(k-1) - \delta(k) + (-1)^k = \chi(k-2)(-1)^k$

(e) $f(k) = \begin{cases} 0, & k = 0, 1, 3, ... \\ -(-1)^{k/2}, & k = 2, 4, ... \end{cases}$

(f) $f(k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \dfrac{a^k}{k}, & k = 1, 2, ... \end{cases}$

(g) $f(k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \dfrac{1}{(k-1)!}, & k = 1, 2, ... \end{cases}$

7.9. (a) $f(k) = \begin{cases} 0, & k = 0, 1, 3, ... \\ -(-1)^{k/2}, & k = 2, 4, ... \end{cases}$

(b) $f(k) = \dfrac{1}{4}\delta(k) + \dfrac{3k-1}{4}2^k$

7.10. $y(k) = 3 \cdot 2^k$

7.11. $y(k) = \dbinom{k+1}{3} + \dbinom{k}{3} = \dfrac{(k-1)k(2k-1)}{6}$

7.12. $y(k) = 2^k - (-3)^k$

7.14. $y(k) = 2^{k+1} - k - 2$

7.15. $y(k) = (k-1)(1 - (-1)^k)$

7.16. $y(k) = 1 - \cos \frac{k\pi}{2} - \sin \frac{k\pi}{2}$

7.17. $|z| > \max\{R_f, R_g\}$

7.18. $f * g(k) = \dbinom{k+2}{4} + \dbinom{k+1}{4} = \dfrac{k^4 - k^2}{12}$

7.19. (a) $y(k) = \dbinom{k+2}{3} + \dbinom{k+1}{3} = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

(b) $y(k) = 2^{k+1} - 1$

7.20. $y(k) = f * g(k-1)$, $k = 1, 2, ...$, där $g(k) = 2^k$

7.21. (a) $y(k) = \chi(k-1)(2^{k-1} - 1)$

7.22. $y(k) = \dbinom{k+1}{2} - \dbinom{k}{2} - 2\dbinom{k-1}{2} = 2\delta(k) - k^2 + 4k - 2$

7.23. $y(k) = 2^k + 4\cos \frac{k\pi}{2} - 2\sin \frac{k\pi}{2}$

7.24. $y(k) = f(k) - \dfrac{1}{a}f(k+1)$

7.25. $y(k) = -k + C\chi(k-1)(k-1)$, där C är godtycklig