Inlämningsuppgift 1, TATA65, HT2024

Handskrivna lösningar på uppgifterna samlas i de utdelade omslagen och lämnas till lektionsledaren eller i facken vid ing 23 i B-huset **senast fredag 13 september 2024**. Eventuella returer ska vara godkända **senast 25 oktober 2024**. Lämna alltid in i god tid så att returer hinner rättas. Samarbete är tillåtet, men inlämnade lösningar ska vara självständigt skrivna och formulerade. Fullständiga lösningar med motiveringar ska ges till varje uppgift.

Slantsingling

Matte och Ida spelar spel om pengar. Matte har a kronor och Ida har b kronor i starten. I varje omgång vinner Matte en krona av Ida med sannolikheten p eller så förlorar han en krona till Ida med sannolikheten $q = 1 - p$, där $0 < p < 1$. Spelet är över då en av de två har vunnit alla pengarna. Vi söker sannolikheten att Matte vinner alla pengarna och därmed spelet.

Låt A_k vara sannolikheten att Matte vinner spelet då han har k kronor. Då är $A_0 = 0$ och $A_{a+b} = 1$, och vi söker A_a. Man kan också se att A_k uppfyller det rekursiva sambandet

$$A_k = p \cdot A_{k+1} + q \cdot A_{k-1}, \text{ om } 1 \leq k < a + b, \tag{1}$$

eftersom om Matte till slut vinner måste han ha antingen $k+1$ kr (med sannolikheten p) eller $k-1$ kr (med sannolikheten q) i omgången efter han hade k kr.

Sambandet är komplicerat att studera eftersom varje tal i följden beror både på det tal som kommer före och det som kommer efter. Man kan lösa ut A_{k+1} och stega neråt, men A_1 är obekant och vi kan inte på ett enkelt sätt komma på lösningen (dvs ett explicit uttryck för A_k) till rekursionen på detta vis. Däremot är $A_1 = p \cdot A_2$, eftersom $A_0 = 0$, och detta kan användas för att beräkna A_k för olika val av konstanterna a, b och p. Olika val för värdena a, b och p kan speciellt leda till en bra gissning för A_1.

Uppgift 1: Visa att om $p \neq q$, så uppfyller uttrycket

$$A_k = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} - 1},$$

rekursionsformeln (1) ovan (använd att $q = 1 - p$ i räkningarna).

Observera att man behöver beräkna A_1 för givna konstanter a, b och p, för att kunna visa med induktion att formeln för A_k är sann för alla $k \geq 0$. (Notera att du alltså inte skall göra ett induktionsbevis i Uppgift 1 ovan.)

Exempel: Matte och Ida startar med 5 kr var. Varje omgång kastar de en tärning där Matte vinner om det blir en sexa, och Ida vinner om det blir något annat än en sexa. Då blir $p = 1/6$ och $q = 5/6$, så att $q/p = 5$, och vi får att Matte vinner alla pengarna med sannolikheten

$$A_5 = \frac{5^5 - 1}{5^{10} - 1} = \frac{3125 - 1}{9765625 - 1} = 0.00031989\ldots \qquad \square$$

I fortsättningen skall vi anta att $p = q = 1/2$ (som vid slantsingling). Observera att då kan inte uttrycket för A_k i Uppgift 1 gälla (varför inte?). Vi försöker därför gissa oss fram till en explicit formel för A_k i detta fall med hjälp av beräkningar. Observera att vi nu har det rekursiva sambandet

$$A_k = \frac{1}{2} \cdot A_{k+1} + \frac{1}{2} \cdot A_{k-1}, \quad 1 \leq k < a+b,$$

med $A_0 = 0$, och $A_{a+b} = 1$.

Exempel: Vi beräknar A_1 i fallet då $a = 2$, $b = 1$. Då är $A_3 = A_{a+b} = 1$, och eftersom $A_1 = \frac{1}{2} \cdot A_2$ som tidigare, får vi av rekursionssambandet

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot A_3 + \frac{1}{2} \cdot A_1,$$

att

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot A_3 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot A_2 \right),$$

så att vi får relationen

$$\frac{3}{4} \cdot A_2 = \frac{1}{2} \cdot A_3,$$

dvs.

$$A_2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot A_3 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Detta ger slutligen att

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot A_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}. \qquad \square$$

Genom att använda metoden i exemplet och välja a och b till olika större värden går det att gissa vad A_1 och A_k är för allmäna tal k, a och b.

Uppgift 2: Vad bör A_1 vara för allmänna tal a och b? Vad är ditt förslag (gissning) för en formel för A_k för $k = 0, 1, 2, \ldots, a+b$? Motivera ditt förslag.

Uppgift 3: Visa med induktion att din explicita formel för A_k i Uppgift 2 är en lösning till det rekursiva sambandet

$$A_k = 2A_{k-1} - A_{k-2}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

(vilket är en omskrivning av den tidigare rekursionsformeln) med begynnelsevärden $A_0 = 0$ och $A_1 = f(a, b)$, där $f(a, b)$ är den formel för A_1 för allmänna tal a och b som du tog fram i Uppgift 2.

Uppgift 4: Om a är lika med talet du får av de fem första siffrorna i ditt tiosiffriga personnummer och b talet du får av de fem sista siffrorna, vad blir A_a då $p = 1/2$?