

Lösningsskiss till tentamen i Diskret matematik, TATA65/9AMA57, 2025-10-27

Nedan följer förslag på hur problemen kan lösas, men det kan mycket väl finnas andra tillvägagångssätt som löser problemen. Lösningsskisserna till uppgifterna är inte fullständiga, men du måste redovisa fullständiga lösningar.

1. Använd induktion över n .
2. (a) Vi söker antalet lösningar till staketproblemet $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 26$, $x_i \geq 1$.
Inför variablerna $y_i = x_i - 1$ så kan ekvationen skrivas $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 21$, $y_i \geq 0$. Antalet lösningar är således $\binom{25}{21}$, vilket alltså är antal sätt påsarna kan fyllas på.

(b) Vi söker antalet lösningar till staketproblemet $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 26$, $2 \leq x_i \leq 6$.
Inför variablerna $y_i = x_i - 2$ så kan ekvationen skrivas $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 16$, $0 \leq y_i \leq 4$. Låt $A_i = \{\text{Lösningar sådana att } y_i \geq 5\}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Antalet lösningar är då $\binom{20}{16} - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5|$. Inklusion-exklusion ger nu att
$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5| = 5 \cdot \binom{15}{11} - \binom{5}{2} \cdot \binom{10}{6} + \binom{5}{3} \cdot \binom{5}{1} - 0 + 0.$$

Totala antalet lösningar är således $\binom{20}{16} - 5 \cdot \binom{15}{11} + \binom{5}{2} \cdot \binom{10}{6} - \binom{5}{3} \cdot 5$, vilket alltså är antal sätt påsarna kan fyllas på.
3. (a) Alla tal x sådana att $x \equiv 7 \pmod{8}$

(b) Vi söker icke-negativa lösningar till ekvationen $119x + 34y = 680$. Euklides algoritmen ger att $\text{sgd}(119, 34) = 17$ och alltså kan ekvationen skrivas $7x + 2y = 40$. Från Euklides algoritmen följer nu att $1 = 1 \cdot 7 - 3 \cdot 2$ och en lösning är således $x = 40$, $y = -120$. Den allmänna lösningen är $x = 40 + 2n$ och $y = -120 - 7n$, där $n \in \mathbb{Z}$. Kravet att lösningarna ska vara icke-negativa ger nu att $-20 \leq n \leq -18$, så de tre möjliga lösningarna är (0 elefanter, 20 hundar), (2 elefanter, 13 hundar) samt (4 elefanter, 6 hundar).
4. (a) $f(x, y) = \overline{x + y + \overline{x} \cdot y}$ ger tabellen

x	y	$f(x, y)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Detta ger att $f(x, y) = x\overline{y} + xy$.

(b) Vi delar upp problemet i tre olika fall:
 $\mathbf{f(1, 1, 1, 1) = 0}$: Då är $f(0, 1, 1, 0)$, $f(1, 0, 0, 1)$ samt $f(0, 0, 0, 0)$ entydigt bestämda, så i detta fall finns 2^{12} sådana funktioner.
 $\mathbf{f(1, 1, 1, 1) = 1}$ och $\mathbf{f(0, 0, 0, 0) = 0}$: Övriga funktionsvärden är valfria, så i detta fall finns 2^{14} sådana funktioner.
 $\mathbf{f(1, 1, 1, 1) = 1}$ och $\mathbf{f(0, 0, 0, 0) = 1}$: Då är minst en av $f(0, 1, 1, 0)$ och $f(1, 0, 0, 1)$ lika med 1, vilket går att ordna på 3 sätt. I detta fall finns alltså $3 \cdot 2^{12}$ sådana funktioner.
Totalt finns då $2^{12} + 2^{14} + 3 \cdot 2^{12} = 2^{15}$ sådana funktioner.

5. Relationen är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv, och alltså en partialordning.

Det maximala elementet är $(360, 360)$ och de minimala elementen är $(2, 2)$, $(2, 3)$ och $(2, 5)$. Därmed är största elementet $(360, 360)$ och minsta element saknas.

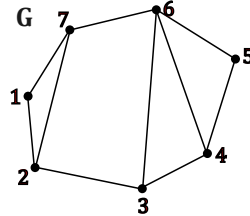
6. Relationen är reflexiv, symmetrisk och transitiv, och alltså en ekvivalensrelation.

Ekvivalensrelationen ger upphov till fyra ekvivalensklasser: cykler av längd 3, cykler av längd 4, cykler av längd 5 och cykler av längd 6. Antalet element i ekvivalensklasserna:

$$|[\text{cykel av längd 3}]| = \binom{6}{3} \quad |[\text{cykel av längd 4}]| = \binom{6}{4} \cdot \frac{3!}{2}$$

$$|[\text{cykel av längd 5}]| = \binom{6}{5} \cdot \frac{4!}{2} \quad |[\text{cykel av längd 6}]| = \binom{6}{6} \cdot \frac{5!}{2} = \frac{5!}{2}$$

7. Grafen G ser ut som följer:



- (a) Vi tillämpar rekursionsformeln $P(G, \lambda) = P(G - e, \lambda) - P(G \cdot e, \lambda)$ på grafen G och kanten e mellan hörnen 6 och 7. Då gäller (via multiplikationsprincipen vid val av färger åt hörnen i ordningen 7, 1, 2, 3, 4, (6), 5):

$$P(G - e, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2 = \lambda(\lambda - 1)^3(\lambda - 2)^3.$$

$$P(G \cdot e, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)^4.$$

Alltså får vi att $P(G, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)^3(\lambda^2 - 3\lambda + 3)$. Antalet sätt att färga G korrekt med 3 färger är således $P(G, 3) = 3 \cdot 2 \cdot 1^3 \cdot 3 = 18$.

- (b) Gradtalen för hörnen i $\overline{G}$ är 4, 3, 3, 3, 4, 2, 3. Eftersom antalet hörn med udda gradtal är fler än två saknas Eulerväg.