Lösningsskiss till tentamen i Diskret matematik, TATA65, 2026-01-05

Nedan följer förslag på hur problemen kan lösas, men det kan mycket väl finnas andra tillvägagångssätt som löser problemen. Lösningsskisserna till uppgifterna är inte fullständiga, men du måste redovisa fullständiga lösningar.

1. (a) Hur många ”ord” med 4 bokstäver kan bildas med bokstäverna ur ordet MATEMATIKTENTAMEN? (2p)

   Ordet innehåller 3 M, 3 A, 4 T, 3 E, 1 I, 1 K och 2 N, totalt 7 olika bokstäver.

   <u>Fall 1: Alla 4 bokstäver olika</u>. Välj bokstav för en plats i ordet i taget. Enligt multiplikationsprincipen fås $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ olika ord.

   <u>Fall 2: 2 lika bokstäver, 2 unika</u>. Välj en av 5 dubbletter, välj sedan 2 av 4 platser till de lika bokstäverna, välj sedan varsin bokstav för de övriga två platserna. Då fås $\binom{5}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 900$ olika ord.

   <u>Fall 3: 2 par av lika bokstäver</u>. ... Då fås $\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} = 60$ olika ord.

   <u>Fall 4: 3 lika bokstäver, 1 unik</u>. ... Då fås $\binom{4}{1} \cdot \binom{4}{3} \cdot 6 = 96$ olika ord.

   <u>Fall 5: 4 lika bokstäver</u>. 1 ord (TTTT).

   Svar: Totalt $840 + 900 + 60 + 96 + 1 = 1897$ olika ord med 4 bokstäver.

   (b) Hur många palindrom med 5 bokstäver kan man bilda med bokstäverna ur ordet MATEMATIK? (1p)

   Ordet innehåller 2 M, 2 A, 2 T, 1 E, 1 I och ett K, totalt 6 olika bokstäver. Ett palindrom med 5 bokstäver har samma bokstav på plats 1 och 5, och samma bokstav på plats 2 och 4.

   Då finns 3 val på plats 1, sedan 2 val på plats 2, och till sist 4 val (alla olika bokstäver som inte valts på plats 1 eller 2) på plats 3.

   Svar: Totalt $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ olika palindrom med 5 bokstäver.

2. (a) Ange (explicit) samtliga positiva heltalslösningar (x, y) till ekvationen $126x + 154y = 2100$. (2p)

   Euklides algoritm ger att $\text{sgd}(126, 154) = 14$, och alltså kan ekvationen skrivas $9x + 11y = 150$. Euklides algoritm för $\text{sgd}(9, 11) = 1$ ger nu (använd baklänges) att $1 = 5 \cdot 9 - 4 \cdot 11$ och därmed är $150 = 750 \cdot 9 - 600 \cdot 11$, så en lösning är $x = 750$, $y = -600$. Alla lösningar ges då av $x = 750 - 11n$, $y = -600 + 9n$, $n \in \mathbb{Z}$.

   Alla positiva lösningar fås då $x > 0$, $y > 0$:

   $x = 750 - 11n > 0 \iff n < \dfrac{750}{11} = 68 + \dfrac{2}{11} \iff n \leq 68$, då n heltal.

   $y = -600 + 9n > 0 \iff n > \dfrac{600}{9} = 66 + \dfrac{2}{3} \iff n \geq 67$, då n heltal.

   Alltså är $67 \leq n \leq 68$. $n = 67$ ger lösningen $x = 13$, $y = 3$ och $n = 68$ ger lösningen $x = 2$, $y = 12$.

   Svar: De positiva heltalslösningarna (x, y) är $(13, 3)$ samt $(2, 12)$.

   (b) Ange entalssiffran i talet $3 \cdot 4^{13} \cdot 7^{11}$. (1p) Entalssiffran är den minsta icke-negativa resten när man delar med 10, så vi räknar modulo 10.

   $3 \cdot 4^{13} \cdot 7^{11} = 3 \cdot 4 \cdot 16^6 \cdot 7 \cdot 49^5 \equiv 12 \cdot 6^6 \cdot 7 \cdot (-1)^5 \equiv 2 \cdot 36^3 \cdot 7 \cdot (-1) \mod 10$

   $\equiv 2 \cdot 6^3 \cdot (-7) \equiv 12 \cdot 36 \cdot 3 \equiv 2 \cdot 6 \cdot 3 = 36 \equiv 6 \mod 10.$

   Svar: Entalssiffran är 6.

3. Visa att $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} 3^k(k+1)(k-1) = \frac{3^{n+1}(n^2-n)}{2}$ för alla $n \geq 2$. (3p)

Använd induktion över n. Var noggrann med att få med alla nödvändiga delar i induktionsbeviset.

4. Örjan har 5 chokladbitar och 10 olika småsyskon.

(a) På hur många sätt kan Örjan fördela chokladbitarna bland syskonen om chokladbitarna är identiska? (1p)

Detta motsvarar antalet lösningar till staketproblemet $x_1 + x_2 + \cdots + x_9 + x_{10} = 5$, vilket är $\binom{5+10-1}{5} = \binom{14}{5}$. **Svar**: På $\binom{14}{5}$ sätt.

(b) På hur många sätt kan Örjan fördela chokladbitarna bland syskonen om chokladbitarna är olika och varje syskon får högst en chokladbit? (1p)

Varje chokladbit ges alltså till ett unikt syskon. Första chokladbiten kan ges till ett av 10 olika syskon. Den andra biten kan ges till ett av de 9 kvarvarande syskonen, osv. Det är 5 chokladbitar, så antalet sätt blir då $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$.

Svar: På $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ sätt.

(c) På hur många sätt kan Örjan placera chokladbitarna och syskonen i en rad om chokladbitarna är olika och två chokladbitar inte får ligga intill varandra? (1p)

Ordna först syskonen. Detta kan göras på 10! sätt. Chokladbitarna får inte ligga bredvid varandra. Då måste de ligga i 5 av de 11 ”mellanrum” som finns innan, mellan och efter de 10 syskonen. Dessa 5 kan väljas på $\binom{11}{5}$ sätt. Slutligen behöver man välja vilken chokladbit som ligger på var och en av de 5 valda platserna, vilket kan göras på 5! sätt. **Svar**: På $10! \cdot \binom{11}{5} \cdot 5!$ sätt.

5. $M = \{$EN, SEN, VEN, ENA, REN, REAN, SENAP, VASEN, PAREN, ARVEN, SPENAR, VARPEN, SPARVEN$\}$. (3p)

$x\,\mathcal{R}_1\,y$ om ordet x kan bildas med bokstäver ur ordet y.

Visa att $\mathcal{R}_1$ är en partialordning på M, rita Hassediagrammet för po-mängden $(M, \mathcal{R}_1)$ samt avgör om $(M, \mathcal{R}_1)$ är ett lattice.

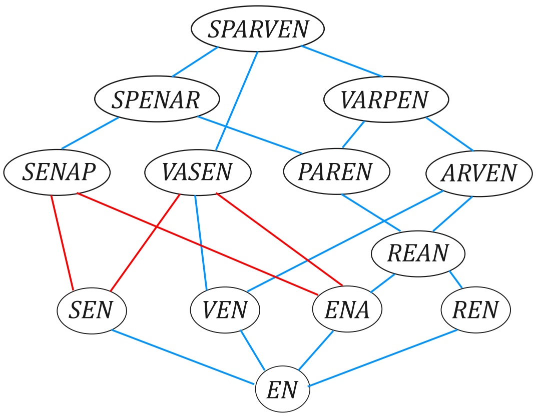
$\mathcal{R}_1$ **är en partialordning** på M om $\mathcal{R}_1$ är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv.

Reflexivitet: Låt $x \in M$. $x\,\mathcal{R}_1\,x$ eftersom ordet x kan bildas av bokstäverna i ordet x, så $\mathcal{R}_1$ är reflexiv.

Antisymmetri: Låt $x, y \in M$. Antag att $x\,\mathcal{R}_1\,y$ och att $y\,\mathcal{R}_1\,x$. Inga ord i M har upprepningar av någon bokstav, så att x kan bildas ur bokstäverna i y och y ur bokstäverna i x betyder att de består av exakt samma bokstäver. Men det finns inte två olika ord i M som består av exakt samma bokstäver, och alltså måste $x = y$. Således är $\mathcal{R}_1$ antisymmetrisk.

Transitivitet: Låt $x, y, z \in M$. Antag att $x\,\mathcal{R}_1\,y$ och att $y\,\mathcal{R}_1\,z$. Då kan x bildas av bokstäver ur ordet y, och y bildas av bokstäver ur ordet z. Alltså kan x bildas av bokstäver ur ordet z, så $x\,\mathcal{R}_1\,z$. Således är $\mathcal{R}_1$ transitiv.

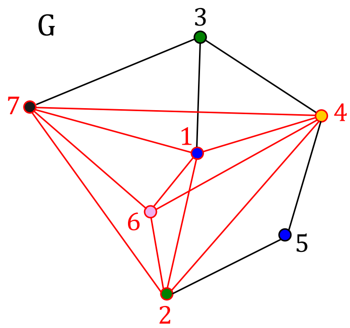
Hassediagram



Är $(M, \mathcal{R}_1)$ ett lattice?

Mängden $\{\text{SEN}, \text{ENA}\}$ har bland annat de övre begränsningarna SENAP och VASEN (se röda linjer i Hassediagrammet).
SENAP och VASEN är inte relaterade, och det finns inte heller någon övre begränsning till $\{\text{SEN}, \text{ENA}\}$ som relaterar till både SENAP och VASEN.
Alltså finns inte möb$\{\text{SEN}, \text{ENA}\}$, så $(M, \mathcal{R}_1)$ är inte ett lattice.

6. Grafen G har hörnmängd $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ och ser ut som till höger:



(Hörn 1 och 5 är blåa, hörn 2 och 3 är gröna, hörn 4 är gult, hörn 6 är rosa och hörn 7 är svart.)

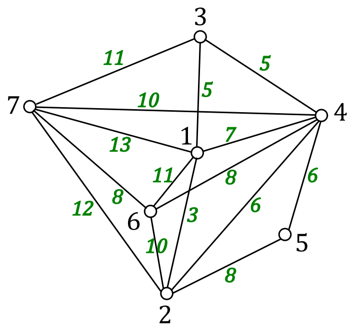
(a) Avgör om G är planär. (1p)

G innehåller K_5 som delgraf (den röda delgrafen i bilden). Därför är G inte planär enligt Kuratowskis sats.

(b) Bestäm det kromatiska talet $\chi(G)$. (1p)

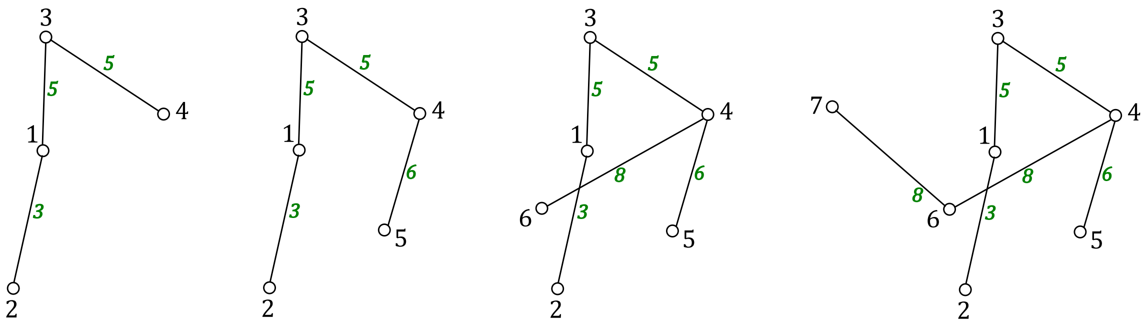
Eftersom K_5 är en delgraf och $\chi(K_5) = 5$ måste $\chi(G) \geq 5$. Det är möjligt att färga G korrekt med 5 färger (se grafen), så $\chi(G) \leq 5$. Alltså är $\chi(G) = 5$.

(c) Bilda en viktad graf från G genom att tilldela varje kant ij, där $i < j$, vikten $(2j - i)$. (Se gröna vikter i grafen till höger.)



Bestäm ett minimalt uppspännande träd i denna viktade graf. (1p)

Använd Kruskals algoritm. De tre kanterna med lägst vikter (3 och 5) kan läggas till utan problem. Bara en av kanterna med vikt 6 kan läggas till utan att bilda en cykel, nämligen kant $\{4, 5\}$. Kanten med vikt 7 kan ej läggas till utan att bilda en cykel. Två av kanterna med vikt 8 kan läggas till utan att bilda cykler, först kant $\{4, 6\}$ och sedan kant $\{6, 7\}$. Se bild nedan. Resultatet är nu ett minimalt uppspännande träd (med total vikt 35), längst till höger i bilden.



7. För $x, y \in \mathbb{Z}$ gäller $x\,\mathcal{R}_2\,y$ om $x^3 \equiv y \mod 3$.
Visa att $\mathcal{R}_2$ är en ekvivalensrelation och ange alla skilda ekvivalensklasser.

$\mathcal{R}_2$ **är en ekvivalensrelation** om $\mathcal{R}_2$ är reflexiv, symmetrisk och transitiv.

<u>Reflexivitet</u>: Låt $x \in \mathbb{Z}$.

Om $x \equiv 0 \mod 3$ så är $x^3 \equiv 0^3 = 0 \equiv x \mod 3$.
Om $x \equiv 1 \mod 3$ så är $x^3 \equiv 1^3 = 1 \equiv x \mod 3$.
Om $x \equiv 2 \mod 3$ så är $x^3 \equiv 2^3 = 8 \equiv 2 \equiv x \mod 3$.

Alltså är $x^3 \equiv x \mod 3$, så $x\,\mathcal{R}_2\,x$ och därmed är $\mathcal{R}_2$ reflexiv.

<u>Symmetri</u>: Låt $x, y \in \mathbb{Z}$ och anta att $x\,\mathcal{R}_2\,y$, dvs att $x^3 \equiv y \mod 3$.

Eftersom $\mathcal{R}_2$ är reflexiv vet vi att $x^3 \equiv x \mod 3$ och $y^3 \equiv y \mod 3$.

Nu är $y^3 \equiv y \equiv x^3 \equiv x \mod 3$, dvs $y\,\mathcal{R}_2\,x$. Alltså är $\mathcal{R}_2$ symmetrisk.

<u>Transitivitet</u>: Låt $x, y, z \in \mathbb{Z}$ och anta att $x\,\mathcal{R}_2\,y$ och $y\,\mathcal{R}_2\,yz$, dvs att $x^3 \equiv y \mod 3$ och $y^3 \equiv z \mod 3$.

Enligt reflexiviteten vet vi att $y^3 \equiv y \mod 3$.

Nu är $x^3 \equiv y \equiv y^3 \equiv z \mod 3$, dvs $x\,\mathcal{R}_2\,z$. Alltså är $\mathcal{R}_2$ transitiv.

Ekvivalensklasser:

Eftersom $x^3 \equiv x \mod 3$ för alla $x \in \mathbb{Z}$, så betyder det att $x\,\mathcal{R}_2\,y$ om och endast om $x \equiv y \mod 3$. Ekvivalensklasserna är alltså

$[0] = \{\ldots, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$
$[1] = \{\ldots, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$
$[2] = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, \ldots\}$.