

Tentamen i Diskret Matematik

2025-08-29 kl. 14.00-19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. (Deluppgifter får lösas på samma ark.) Alla lösningar ska motiveras väl och förenklas så långt som möjligt. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng och för betyg 3/4/5 krävs 5/8/10 poäng på Del A och 2/4/6 poäng på Del B, samt totalt minst 8 poäng. Skrivningsresultat meddelas via epost och visningstid kommer att anslås på kurshemsidan.

Del A.

1. (a) Bestäm alla positiva heltal x och y sådana att $1001x + 770y = 100100$. (2p)
(b) Bestäm den minsta positiva resten då 2^{2010} divideras med 14. (1p)
2. Visa att
$$3 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + \cdots + 3n \cdot (n+1) = n(n+1)(n+2),$$
för alla heltal $n \geq 1$. (3p)
3. På hur många sätt kan 35 tallrikar fördelas på 4 diskmaskiner om
 - (a) tallrikarna är identiska men diskmaskinerna är olika? (1p)
 - (b) alla tallrikar är olika och alla diskmaskiner är olika? (1p)
 - (c) tallrikarna är identiska, diskmaskinerna är olika och diskmaskin nr 2 och 4 får innehålla maximalt 10 tallrikar vardera. (1p)
4. Låt $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ och betrakta relationen $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 3), (3, 4)\}$.
 - (a) Är relationen $\mathcal{R}$ reflexiv, symmetrisk, antisymmetrisk? (2p)
 - (b) Är relationen $\mathcal{R}$ transitiv? Om så är fallet, visa detta! Om så inte är fallet, lägg till ett minimalt antal element till $\mathcal{R}$, så att en transitiv relation erhålls. (1p)

Del B.

5. (a) Låt A vara mängden av alla olika booleska funktioner $f(x, y)$ med 2 variabler x, y . Låt $\mathcal{R}$ vara en relation på A som definieras av att $f \mathcal{R} g$ om $f(1, y) \leq g(1, y)$, d.v.s. $f(x, y) \leq g(x, y)$ om $x = 1$. Är $\mathcal{R}$ en partialordning? (2p)
- (b) Hur många booleska funktioner f i fyra variabler uppfyller att $f(x, y, z, w) = 1$ då $x + y + z + w = 1$ (boolesk addition)? (För övriga val av x, y, z, w tillåts båda funktionsvärdena 0 och 1.) (1p)

VAR GOD VÄND!

6. (a) Finns det någon graf (utan multipla kanter och loopar) med gradtalen $7, 7, 5, 5, 3, 3, 2, 2$?
Varför/varför inte? (1p)
- (b) Bestäm hur många stigar av längd 3 som den kompletta bipartita grafen $K_{7,8}$ innehåller.
(2p)
7. Tilldela varje kant i den kompletta grafen K_7 med 7 hörn en vikt från mängden $\{1, 2, \dots, 50\}$.
Låt A vara mängden av alla viktade grafer som kan bildas på detta sätt. Som bekant har varje viktad graf i A ett billigaste uppspännande träd. Låt B vara mängden av alla olika billigaste uppspännande träd som kan bildas från en viktad graf i mängden A . Vi definierar en relation $\mathcal{R}_2$ på mängden B genom att sätta $T_1 \mathcal{R}_2 T_2$ om T_1 och T_2 har samma kostnad, där T_1 och T_2 är två viktade uppspännande träd. Visa att $\mathcal{R}_2$ är en ekvivalensrelation och bestäm antalet olika ekvivalensklasser. Motivera noggrant! (3p)

Lycka till!

Lösningsskisser för tentamen 2025-08-29

1. (a) Euklides algoritmen ger att $\text{sgd}(1001, 770) = 77$ och ekvationen kan skrivas $13x + 10y = 1300$. Euklides algoritmen (igen) ger sedan att $1 = 4 \cdot 10 - 3 \cdot 13$ och alltså $1300 = 10 \cdot 5200 - 13 \cdot 3900$. Alla lösningar är således $x = -3900 + 10n$, $y = 5200 - 13n$, där n är ett godtyckligt heltal. Kravet att $x, y > 0$ ger sedan att $390 < n < 400$.
(b) Eftersom $2^4 \equiv 2 \pmod{14}$ fås $2^{2010} = 2^2 \cdot (2^4)^{502} \equiv 2^2 \cdot 2^2 \cdot (2^4)^{125} \equiv 2^2 \cdot 2^{124} \equiv 2^2 \cdot 2^{31} \equiv 2^2 \cdot 2^{28} \equiv 2^2 \cdot 2^7 \equiv 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.
2. Använd induktion över n .
3. (a) Antalet sätt att fördela tallrikarna är lika med antalet lösningar till systemet $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 35$, $x_i \geq 0$. Antalet lösningar är $\binom{35+4-1}{35} = \binom{38}{35}$.
(b) Antalet sätt att fördela tallrikarna är 4^{35} .
(c) Vi söker antalet lösningar till ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 35$, $x_1 \geq 0$, $10 \geq x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $10 \geq x_4 \geq 0$. Antalet lösningar är (med hjälp av inklusion-exklusion) $\binom{38}{35} - 2\binom{27}{24} + \binom{16}{13}$.
4. (a) Relationen är varken reflexiv eller symmetrisk, men dock antisymmetrisk.
(b) Relationen är ej transitiv, men om vi lägger till elementet $(2, 4)$ så fås en transitiv relation.
5. (a) Relationen är reflexiv och transitiv men inte antisymmetrisk, och alltså inte en partialordning. Till exempel gäller att om $f(x, y) = x + y$ och $g(x, y) = x$, så är $f(1, y) \leq g(1, y)$ och $g(1, y) \leq f(1, y)$, men $f \neq g$.
(b) Om man betraktar tabellen för en sådan funktion så gäller att $x + y + z + w = 1$ för alla rader utom en i tabellen. Alltså finns 2 sådana funktioner.
6. (a) Det finns inte någon sådan graf. (Försök att rita upp den!)
(b) Det finns $8 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6$ sådana stigar (ty vi ska välja ett hörn med gradtal 2 och ett hörn med gradtal 1 i varje del av grafen).
7. Relationen är reflexiv, symmetrisk och transitiv, och därmed en ekvivalensrelation.
Antalet olika ekvivalensklasser är $6 \cdot 50 - 6 + 1 = 295$, ty ett träd i B har en kostnad som tillhör mängden $C = \{6, 7, \dots, 300\}$, och för alla tal c i C finns ett träd med kostnad c som är ett billigaste uppspännande träd i någon viktad K_7 där varje kant har en vikt i mängden $\{1, 2, \dots, 50\}$. (Varför då?)