

Tentamen i Diskret Matematik

2025-10-27 kl. 8.00-13.00

Man får använda linjal. Inga formelsamlingar, miniräknare eller andra hjälpmedel är tillåtna.

Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. (Deluppgifter får lösas på samma ark.)

Alla lösningar ska vara fullständiga, välmotiverade, tydligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förenklas så långt som möjligt.

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng och för betyg **3/4/5** krävs **5/8/10** poäng på Del A och **2/4/6** poäng på Del B, samt **totalt minst 8 poäng**.

Skrivningsresultat meddelas via epost och visningstid kommer att anslås på kurshemsidan.

Del A.

1. Visa att likheten

$$1^2 \cdot (-2) + 2^2 \cdot 2 + 3^2 \cdot 6 + \dots + n^2 \cdot (4n - 6) = n^4 - 2n^2 - n$$

gäller för alla heltal $n \geq 1$. (3p)

2. Lisa ska ha kalas och förbereder godispåsar. Hon har 5 olika sorters godis och vill lägga 26 godisbitar i varje påse. På hur många sätt kan hon fylla en påse med godis om

(a) varje påse ska innehålla minst en godisbit av varje sort? (1p)

(b) varje påse ska innehålla minst två och högst sex godisbitar av varje sort? (2p)

3. (a) Ange alla multiplikativa inverser till 15 modulo 8. (1p)

(b) Leo virkar elefanter och hundar. Till en elefant går det åt 119 g garn, och till en hund går det åt 34 g garn. Totalt använder Leo 680 g garn. Hur många elefanter respektive hundar kan han ha virkat? Ange alla möjliga lösningar. (2p)

4. (a) Låt $f(x, y) = \overline{\overline{x + y} + \overline{x} \cdot y}$. Skriv f på fullständig disjunktiv normalform (dvs som en summa av fundamentalkonjunktioner). (1p)

(b) Hur många booleska funktioner $f(x, y, z, w)$ med fyra variabler x, y, z, w finns det som uppfyller att $f(1, 1, 1, 1) \geq f(0, 1, 1, 0) + f(1, 0, 0, 1) \geq f(0, 0, 0, 0)$ (boolesk addition)? (2p)

Var god vänd!

Del B.

5. Låt $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 360\}$ och $B = A \times A$. Definiera en relation $\mathcal{R}_1$ på B genom att sätta $(x_1, y_1) \mathcal{R}_1 (x_2, y_2)$ om $x_1 \leq x_2$ och $y_1 \mid y_2$. Visa att $\mathcal{R}_1$ är en partialordning och avgör vilka maximala respektive minimala element po-mängden $(B, \mathcal{R}_1)$ har samt om det finns största eller minsta element. (3p)
6. Låt C vara mängden av alla cykler i grafen K_6 . Definiera en relation $\mathcal{R}_2$ på C genom att för $x, y \in C$ sätta $x \mathcal{R}_2 y$ om x har samma längd som y . Visa att $\mathcal{R}_2$ är en ekvivalensrelation och ange alla skilda ekvivalensklasser och antalet element i varje sådan klass. (3p)
7. Låt G vara grafen med hörnmängd $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ och kantmängd $E = \{\{1, 2\}, \{1, 7\}, \{2, 3\}, \{2, 7\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}\}$.
 - (a) Bestäm det kromatiska polynomet $P(G, \lambda)$ för G och använd det för att beräkna på hur många sätt man kan färga G korrekt med $\lambda = 3$ färger. (2p)
 - (b) Avgör om det finns en öppen eller sluten Eulerväg i grafens komplement $\overline{G}$. (1p)

Lycka till!