Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA65/TEN1

Tentamen i Diskret Matematik

2025-01-07 kl. 14.00-19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. (Deluppgifter får lösas på samma ark.) Alla lösningar ska motiveras väl och förenklas så långt som möjligt. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng och för betyg 3/4/5 krävs 5/8/10 poäng på Del A och 2/4/6 poäng på Del B, samt totalt minst 8 poäng. Skrivningsresultat meddelas via epost och visningstid kommer att anslås på kurshemsidan.

Del A.

1. (a) Majken har precis 1020 kr i 50-kronorssedlar och 20-kronorssedlar. Om hon har fler 50-kronorssedlar än 20-kronorssedlar, hur många av varje sort kan hon då ha? (2p)

   (b) Hur många positiva delare har talet $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^7 \cdot 11^2$? (1p)

2. Visa att
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1},$$
   för alla heltal $n \geq 1$. (3p)

3. Låt G vara grafen med hörnmängd $V = \{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 11\}$ och låt hörnen i och j vara förbundna med en kant om $i - j$ eller $j - i$ är ett udda tal, för alla $i, j \in V$ sådana att $i \neq j$.

   (a) Avgör om G har en hamiltoncykel och/eller eulerväg. (2p)

   (b) Bestäm kromatiska talet för G. (1p)

4. Betrakta ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$.

   (a) Bestäm antalet heltalslösningar till ekvationen som uppfyller att $0 < x_1 < 11$ och $x_i \geq -2$ för $i \in \{2, 3, 4\}$. (1p)

   (b) Hur många heltalslösningar som uppfyller att $0 < x_i < 8$, $i = 1, 2, 3, 4$, finns det? (2p)

Del B.

5. Från bokstäverna i ordet VINTERVILARNA kan olika ord (d.v.s. följder av bokstäver) bildas genom att välja ut ett godtyckligt antal av dessa bokstäver och sätta samman dem till en följd. Låt Q vara mängden av alla ord med exakt 6 bokstäver som kan bildas på detta sätt. Definiera en relation $\mathcal{R}$ på Q genom att sätta $x \mathcal{R} y$ om x innehåller lika många A och lika många I som y. (Således gäller t.ex. att TRAVAR och VARNAR står i relation till varandra under $\mathcal{R}$, medan VINTER och RITARE inte gör det.) Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation, bestäm antalet ekvivalensklasser samt bestäm antalet element i ekvivalensklassen [TRANAN]. (3p)

   VAR GOD VÄND!

6. Låt $E = \{1, 2, \dots, 20\}$ och definiera relationen $\mathcal{R}_2$ på E genom att för $x, y \in E$ sätta $x \, \mathcal{R}_2 \, y$ om $x - y$ är ett icke-negativt heltal som är delbart med 3. Visa att $\mathcal{R}_2$ är en partialordning och rita dess Hassediagram. (3p)

7. (a) Låt a, b och n vara heltal sådana att $n \geq 2$. Definiera vad det innebär att a är kongruent med b modulo n (d.v.s. att $a \equiv b \pmod{n}$). (1p)

   (b) Låt a, b, m och n vara positiva heltal och antag att $n \mid m$. Visa att om $a \equiv b \pmod{m}$, så gäller $a \equiv b \pmod{n}$. (2p)

Lycka till!