Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA65/TEN1

Tentamen i Diskret Matematik

2024-08-30 kl. 14.00-19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Alla lösningar ska motiveras väl och förenklas så långt som möjligt. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng och för betyg 3/4/5 krävs 8/12/16 poäng totalt. Skrivningsresultat meddelas via epost och visningstid kommer att anslås på kurshemsidan.

1. (a) Bestäm alla heltalslösningar till ekvationen $388x + 108y = 68$. (2p)

   (b) Bestäm alla lösningar till ekvationen $3x \equiv 8 \mod 10$. (1p)

2. Visa att $5 + 8 + 11 + \cdots + (3n + 2) = \dfrac{n(3n + 7)}{2}$, för alla heltal $n \geq 1$. (3p)

3. Hur många av heltalen från och med 100000 till och med 500000 innehåller inte någon av följderna 123, 456 eller 789? (3p)

4. (a) Skriv den booleska funktionen $f(x, y, z) = \overline{x + \overline{yz}} + \overline{\overline{y} + xz}$ på fullständig disjunktiv normalform. (2p)

   (b) Är det sant att varje graf som har en Hamiltoncykel är planär? (1p)

5. Låt A vara mängden av ”ord” (d.v.s följder av bokstäver) med minst sex (ej nödvändigtvis olika) bokstäver som kan bildas av bokstäverna i ordet BADSTRAND. Definiera en relation $\mathcal{R}_1$ på A genom $x \,\mathcal{R}_1\, y$ om orden x och y antingen båda innehåller följden SANDAT, eller varken x eller y innehåller följden SANDAT. Är $\mathcal{R}_1$ en ekvivalensrelation? Bestäm även kardinaliteten hos mängden $\{x \in A : x \,\mathcal{R}_1\, \text{DANSAR}\}$. (3p)

6. Låt X vara mängden av alla positiva delare till talet 70. En partialordning $\preceq$ på X ges av att definiera $x \preceq y$ om $x|y$.

   (a) Rita hassediagrammet för po-mängden $(X, \preceq)$. (1p)

   (b) Sortera po-mängden $(X, \preceq)$ topologiskt. (1p)

   (c) Är $(X, \preceq)$ ett lattice? (1p)

7. (a) Hur många olika cykler av längd 4 innehåller den kompletta grafen K_n $(n \in \mathbb{N})$? (1p)

   (b) Bestäm det kromatiska talet $\chi(K_n)$. (1p)

   (c) Visa att det kromatiska polynomet för en komplett graf K_n är
   $P(K_n, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \ldots (\lambda - n + 1)$. (1p)

Lycka till!

Lösningsskisser för tentamen 2024-08-30

1. (a) Vi söker heltalslösningar till ekvationen $388x + 108y = 68$. Euklides algoritm ger att $\text{sgd}(388, 108) = 4$ och alltså kan ekvationen skrivas $97x + 27y = 17$. Euklides algoritm ger $1 = 27 \cdot 18 - 5 \cdot 97$ och en lösning är således $x = -85$, $y = 306$. Alla lösningar är $x = -85 + 27n$, $y = 306 - 97n$, där n är ett godtyckligt heltal.

   (b) $x \equiv 6 \mod 10$.

2. Använd induktion över n.

3. Låt $\mathcal{U}$ vara antalet heltal från och med 100000 till och med 500000. Då är $|\mathcal{U}| = 400001$. Låt A vara antalet heltal i $\mathcal{U}$ som innehåller följden 123, B vara antalet heltal i $\mathcal{U}$ som innehåller följden 456 och C vara antalet heltal i $\mathcal{U}$ som innehåller följden 789. Vi söker $|\mathcal{U} \setminus (A \cup B \cup C)|$.

   Vi har att $|A| = 10^3 + 3 \cdot 4 \cdot 10^2 - 1$, där första termen räknar antalet tal i $\mathcal{U}$ som börjar med 123, andra termen räknar antalet tal där 123 förekommer någon annanstans, och sista termen kompenserar för att vi räknat talet 123123 två gånger.

   På samma sätt fås att $|B| = 10^3 + 3 \cdot 4 \cdot 10^2 - 1$, och $|C| = 3 \cdot 4 \cdot 10^2$. Vidare gäller $|A \cap B| = 2$, $|A \cap C| = |B \cap C| = 1$ och $|A \cap B \cap C| = 0$.

   Inklusion-exklusion ger att

   $$|A \cup B \cup C| = 10^3 + 3 \cdot 4 \cdot 10^2 - 1 + 10^3 + 3 \cdot 4 \cdot 10^2 - 1 + 3 \cdot 4 \cdot 10^2 - 4 = 5594.$$

   Därmed gäller att $|\mathcal{U} \setminus (A \cup B \cup C)| = 400001 - 5594 = 394407$.

4. (a)$f(x, y, z) = \overline{x + \overline{yz}} + \overline{\overline{y} + xz} = \overline{x}yz + y\overline{xz}$ ger tabellen

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

   och $f = \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + xy\bar{z}$ är disjunktiv normalform.

   (b) Påståendet är falskt. Ett enkelt motexempel är K_5.

5. Relationen är reflexiv, symmetrisk och transitiv, och alltså en ekvivalensrelation. Notera att ekvivalensrelationen ger upphov till endast två ekvivalensklasser: de element som innehåller följden SANDAT, och de som inte innehåller denna följd. Vi ska bestämma antalet element i den senare ekvivalensklassen.

   Antalet element som innehåller följden SANDAT är

   $$1 + \binom{3}{1} \cdot 2 + \binom{3}{2} \cdot 3! + 4!,$$

   eftersom en sådan följd innehåller 6,7,8 eller 9 bokstäver och i denna skall "ordet" SANDAT ingå (och denna följd kan därmed betraktas som en bokstav).

Låt oss nu bestämma $|A|$. Antalet "ord" med sex bokstäver är

$$\binom{7}{6}6! + 2\binom{6}{4}\frac{6!}{2!} + \binom{5}{2}\frac{6!}{2!2!},$$

eftersom en sådan följd kan innehålla sex olika bokstäver, 2 A eller D och 4 andra olika bokstäver, eller precis 2 A, 2 D och två andra bokstäver. På samma sätt fås att antalet följder med 7 bokstäver är

$$7! + 2\binom{6}{5}\frac{7!}{2!} + \binom{5}{3}\frac{7!}{2!2!},$$

antalet följder med 8 bokstäver är

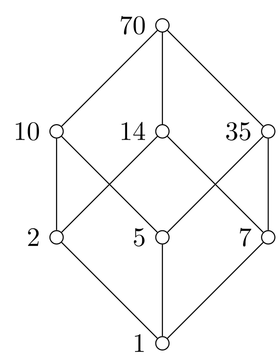
$$2\frac{8!}{2!} + \binom{5}{4}\frac{8!}{2!2!},$$

och antalet med nio bokstäver är precis $\frac{9!}{2!2!}$.

Kardinaliteten hos mängden $\{x \in A : x \; \mathcal{R}_1 \text{ DANSAR}\}$ är alltså

$$\frac{9!}{2!2!} + 2\frac{8!}{2!} + \binom{5}{4}\frac{8!}{2!2!} + 7! + 2\binom{6}{5}\frac{7!}{2!} + \binom{5}{3}\frac{7!}{2!2!} + \binom{7}{6}6! + 2\binom{6}{4}\frac{6!}{2!} + \binom{5}{2}\frac{6!}{2!2!}$$
$$- \left(1 + \binom{3}{1}\cdot 2 + \binom{3}{2}\cdot 3! + 4!\right).$$

6. (a)



(b) Ett sätt att topologiskt sortera elementen är $1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70$ och definiera totalordningen $\mathcal{R}$ genom att sätta $x\mathcal{R}y$ om x kommer före y i denna lista.

(c) Ja!

7. (a) K_n innehåller $3\binom{n}{4}$ cykler, eftersom det finns 3 olika cykler av längd 4 med 4 givna hörn.

(b) Det kromatiska talet är n.

(c) Använd multiplikationsprincipen: det första hörnet kan ges en färg på λ sätt, för nästa hörn har vi $(\lambda - 1)$ möjligheter, etc.