Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA65/TEN1

Tentamen i Diskret Matematik

2024-10-28 kl. 8.00-13.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. (Deluppgifter får lösas på samma ark.) Alla lösningar ska motiveras väl och förenklas så långt som möjligt. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng och för betyg 3/4/5 krävs 6/8/10 poäng på Del A och 2/4/6 poäng på Del B. Skrivningsresultat meddelas via epost och visningstid kommer att anslås på kurshemsidan.

Del A.

1. (a) Bestäm alla positiva heltalslösningar till ekvationen $39x + 91y = 1326$. (2p)

   (b) Är varje graf med högst 4 hörn planär? Motivera ditt svar! (1p)

2. Finns det något tal a så att likheten

$$\sum_{j=1}^{n} 4j^3 = n^4 + an^3 + n^2$$

   gäller för alla heltal $n \geq 1$? Bevisa i så fall ditt påstående. (3p)

3. (a) Hur många booleska funktioner $f(x, y, z)$ med 3 variabler som uppfyller villkoren $f(0,0,0) = f(1,1,1)$ och $f(0,0,1) \neq f(1,0,0)$ finns det? (1p)

   (b) Hur många booleska funktioner $f(x, y, z)$ med 3 variabler uppfyller att $f(0,0,0) \leq f(1,1,1)$ och $f(0,0,1) \leq f(1,0,0)$? (2p)

4. Vi permuterar korten med valörerna 2 till och med 10 i en vanlig kortlek (med fyra olika färger spader, ruter, klöver, hjärter).

   (a) På hur många sätt kan man permutera korten så att de är sorterade i växande storleksordning efter valör (d.v.s. ett kort med högre valör kan inte placeras innan ett med lägre valör)? (1p)

   (b) På hur många sätt kan korten ordnas så att hjärter 2 och klöver 5 är bredvid varandra i permutationen, och samtidigt gäller samma sak spader 8 och ruter 10? (1p)

   (c) På hur många sätt kan alla korten placeras i 17 olika lådor? (1p)

Del B.

5. Låt $a = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^2$ och låt B vara mängden av alla positiva delare till a. Definiera en relation $\mathcal{R}_1$ på B genom att sätta $x \,\mathcal{R}_1\, y$ om talet x har samma antal primtalsfaktorer i sin primtalsfaktorisering som y. (Till exempel gäller alltså att $2 \,\mathcal{R}_1\, 3$ och $6 \,\mathcal{R}_1\, 9$, eftersom $6 = 2 \cdot 3$ och $9 = 3 \cdot 3$.) Visa att $\mathcal{R}_1$ är en ekvivalensrelation, samt ange alla skilda ekvivalensklasser och antalet element i varje ekvivalensklass. (3p)

   VAR GOD VÄND!

6. (a) Låt $A = \{4,5,6\} \times \{7,8,9\}$ och definiera en partialordning $\mathcal{R}_2$ på A genom att sätta $(x_1, x_2)\ \mathcal{R}_2\ (y_1, y_2)$ om $x_1 \leq y_1$ och $x_2 \leq y_2$. Rita hassediagrammet för po-mängden $(A, \mathcal{R}_2)$. (2p)

   (b) Ge ett exempel på en partialordning $\preceq$ på en oändlig mängd som inte är en totalordning. (1p)

7. Låt G vara grafen med hörnmängd $V = \{1,2,3,4,5,6\}$ där två hörn i och j, där $i > j$, är grannar om $\left\lfloor \frac{i}{j} \right\rfloor$ är ett udda tal. Tilldela kanten ij i G vikten $i + j$.

   (a) Bestäm ett billigaste uppspännande träd i grafen G. (1p)

   (b) Låt C vara mängden av alla olika viktade uppspännande träd som den viktade grafen G innehåller. Vi definierar en relation $\mathcal{R}_3$ på mängden C genom att sätta $T_1\ \mathcal{R}_3\ T_2$ om T_1 inte har högre kostnad än T_2, där T_1 och T_2 är två viktade uppspännande träd. Är $\mathcal{R}_3$ en partialordning? Motivera noggrant! (2p)

Lycka till!

Lösningsskisser för tentamen 2024-10-28

1. (a) Eftersom 39 och 91 har största gemensamma delaren 13 kan ekvationen skrivas $3x + 7y = 102$. Euklides algoritm ger nu att $1 = 7 - 3 \cdot 2$, och alltså att $102 = 7 \cdot 102 - 3 \cdot 204$. Således är $x = -204$ och $y = 102$ en lösning, och samtliga lösningar ges av $x = -204 + 7n$ och $y = 102 - 3n$ där n är ett heltal. De positiva lösningarna ges av $(x, y) \in \{(6, 12), (13, 9), (20, 6), (27, 3)\}$.

   (b) Den kompletta grafen K_4 är planär. Eftersom varje graf med högst 4 hörn är en delgraf till K_4, så är påståendet sant.

2. Ett sådant tal är $a = 2$. Använd sedan induktion över n.

3. (a) Det finns 2 sätt att välja funktionsvärdet $f(0, 0, 0)$ (och därmed även $f(1, 1, 1)$). Därefter finns 2 sätt att välja funktionsvärdet $f(0, 0, 1)$ (och därmed även $f(1, 0, 0)$. Övriga funktionsvärden kan sedan väljas på 2^4 sätt. Alltså finns 2^6 booleska funktioner som uppfyller villkoren.

   (b) Om $f(0, 0, 0) = f(0, 0, 1) = 0$, så finns 2^6 sådana funktioner; om $f(0, 0, 0) \neq f(0, 0, 1) = 0$, så finns 2^5 sådana funktioner; $f(0, 0, 0) \neq f(0, 0, 1) = 1$ ger också 2^5 booleska funktioner; och $f(0, 0, 0) = f(0, 0, 1) = 1$ ger 2^4 funktioner. Totalt finns alltså $2^6 + 2^5 + 2^5 + 2^4 = 144$ funktioner som uppfyller villkoren.

4. (a) Det fiins 9 olika valörer, och 4 kort av varje valör, så vi får $(4!)^9$ olika sådana permutationer.

   (b) Vi "slår ihop" hjärter 2 och klöver 5 till ett och samma objekt, och likadant för spader 8 och ruter 10. Därmed har vi $36 - 4 + 2 = 34$ lika objekt att permutera. Antalet olika sätt att permutera korten blir alltså $34! \cdot 2^2$, eftersom det finns 2 sätt att ordna objekten i varje ihopslaget par av kort.

   (c) Det finns 17^{36} olika sådana permutationer.

5. Relationen är reflexiv, symmetrisk och transitiv, och alltså en ekvivalensrelation.

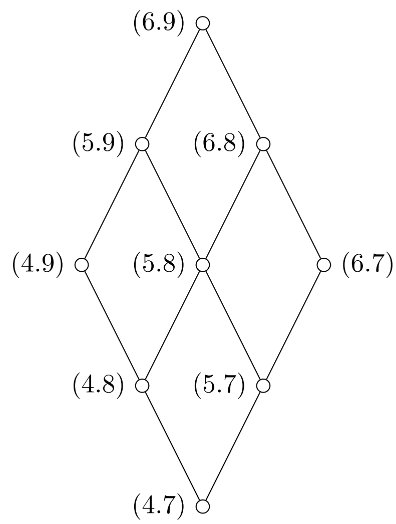
   De skilda ekvivalensklasserna är

   $$[1], [2], [2 \cdot 3], [2^3], [2^3 \cdot 3], [2^3 \cdot 3^2], [2^3 \cdot 3^3], [2^3 \cdot 3^3 \cdot 7] \text{ och } [2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^2].$$

   Vidare gäller att $|[1]| = 1$, $|[2]| = 3$, $|[2^2]| = 6$ och $|[2^3]| = 2 + 3 \cdot 2 + 1 = 9$, eftersom om exponenterna ska summera till 3, så finns 3 möjligheter: x^3, x^2y^1 och xyz.

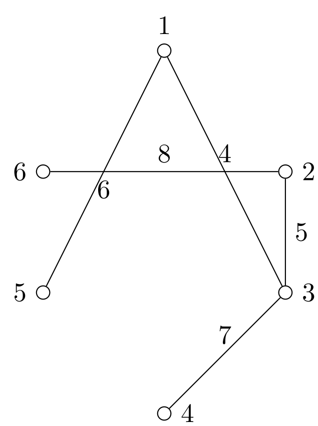
   På samma sätt fås att $|[2^3 \cdot 3]| = 2 \cdot 2 + 3 + 3 = 10$, $|[2^3 \cdot 3^2]| = 2 \cdot 2 + 2 + 3 = 9$, $|[2^3 \cdot 3^3]| = 1 + 4 + 1 = 6$, $|[2^3 \cdot 3^3 \cdot 7]| = 1 + 2 = 3$ och $|[2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^2]| = 1$.

6. (a) (a) Relationen är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv, och alltså en partialordning. Hassediagrammet ser ut på följande sätt:



(b) Till exempel $(\mathbf{Z}_+, |)$.

7. (a) Ett billigaste uppspännande träd är följande graf:



(b) Det finns två olika uppspännande träd med kostnad 32, så relationen är inte antisymmetrisk och alltså inte en partialordning.