Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA65/TEN1

# Tentamen i Diskret Matematik

**2025-01-07 kl. 14.00-19.00**

Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. (Deluppgifter får lösas på samma ark.) Alla lösningar ska motiveras väl och förenklas så långt som möjligt. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng och för betyg 3/4/5 krävs 5/8/10 poäng på Del A och 2/4/6 poäng på Del B, samt totalt minst 8 poäng. Skrivningsresultat meddelas via epost och visningstid kommer att anslås på kurshemsidan.

## Del A.

1. (a) Majken har precis 1020 kr i 50-kronorssedlar och 20-kronorssedlar. Om hon har fler 50-kronorssedlar än 20-kronorssedlar, hur många av varje sort kan hon då ha? (2p)

   (b) Hur många positiva delare har talet $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^7 \cdot 11^2$? (1p)

2. Visa att
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1},$$
   för alla heltal $n \geq 1$. (3p)

3. Låt $G$ vara grafen med hörnmängd $V = \{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 11\}$ och låt hörnen $i$ och $j$ vara förbundna med en kant om $i - j$ eller $j - i$ är ett udda tal, för alla $i, j \in V$ sådana att $i \neq j$.

   (a) Avgör om $G$ har en hamiltoncykel och/eller eulerväg. (2p)

   (b) Bestäm kromatiska talet för $G$. (1p)

4. Betrakta ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$.

   (a) Bestäm antalet heltalslösningar till ekvationen som uppfyller att $0 < x_1 < 11$ och $x_i \geq -2$ för $i \in \{2, 3, 4\}$. (1p)

   (b) Hur många heltalslösningar som uppfyller att $0 < x_i < 8$, $i = 1, 2, 3, 4$, finns det? (2p)

## Del B.

5. Från bokstäverna i ordet VINTERVILARNA kan olika ord (d.v.s. följder av bokstäver) bildas genom att välja ut ett godtyckligt antal av dessa bokstäver och sätta samman dem till en följd. Låt $Q$ vara mängden av alla ord med exakt 6 bokstäver som kan bildas på detta sätt. Definiera en relation $\mathcal{R}$ på $Q$ genom att sätta $x \, \mathcal{R} \, y$ om $x$ innehåller lika många A och lika många I som $y$. (Således gäller t.ex. att TRAVAR och VARNAR står i relation till varandra under $\mathcal{R}$, medan VINTER och RITARE inte gör det.) Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation, bestäm antalet ekvivalensklasser samt bestäm antalet element i ekvivalensklassen [TRANAN]. (3p)

   **VAR GOD VÄND!**

6. Låt $E = \{1, 2, \ldots, 20\}$ och definiera relationen $\mathcal{R}_2$ på $E$ genom att för $x, y \in E$ sätta $x \, \mathcal{R}_2 \, y$ om $x - y$ är ett icke-negativt heltal som är delbart med 3. Visa att $\mathcal{R}_2$ är en partialordning och rita dess Hassediagram. (3p)

7. (a) Låt $a, b$ och $n$ vara heltal sådana att $n \geq 2$. Definiera vad det innebär att $a$ är kongruent med $b$ modulo $n$ (d.v.s. att $a \equiv b \mod n$). (1p)

   (b) Låt $a, b, m$ och $n$ vara positiva heltal och antag att $n \mid m$. Visa att om $a \equiv b \mod m$, så gäller $a \equiv b \mod n$. (2p)

**Lycka till!**

**Lösningsskisser för tentamen 2025-01-07**

1. (a) (a) Låt $x$ = antalet 50-kronorssedlar, $y$ = antalet 20-kronorssedlar, så kan problemet formuleras som den diofantiska ekvationen $50x + 20y = 1020$, $x, y \geq 0$, där vi söker lösningar sådana att $x > y$. Ekvationen kan skrivas $5x + 2y = 102$ och Euklides algoritm ger att $5 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = 1$.

   En lösning till den ursprungliga ekvationen är således $x = 102, y = -204$, och samtliga lösningar ges av $x = 102 + 2n, y = -204 - 5n$, där $n$ är ett heltal. De lösningar som uppfyller $x > y \geq 0$ är

   $x = 20$, $y = 1$,

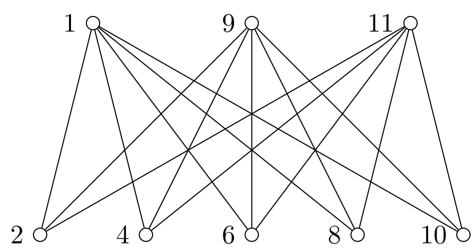
   $x = 18$, $y = 6$,

   $x = 16$, $y = 11$.

   (b) Antalet delare är $4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 3$.

2. Använd induktion över $n$.

3. Grafen kan ritas på följande sätt:




   (a) Alla hörn i grafen $G$ har udda valens, så $G$ kan ej ha någon eulerväg. Vidare är $G$ en bipartit graf där de partita mängderna $\{1, 9, 11\}$ och $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ har olika storlek, varför $G$ inte har någon Hamiltoncykel.

   (b) Grafen $G$ är bipartit, så den har kromatiskt tal 2.

4. (a) Inför variablerna $y_1 = x_1 - 1$ och $y_i = x_i + 2$ för $i \in \{2, 3, 4\}$, så kan ekvationen skrivas $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 30, 0 \leq y_1 \leq 9$ och $y_i \geq 0$ för $i \in \{2, 3, 4\}$. Om vi bortser från villkoret $y_1 \leq 9$, så får vi $\binom{33}{30}$ lösningar och antalet lösningar sådana att $x_1 \geq 10$ är $\binom{23}{20}$. Antalet lösningar till ekvationen är således $\binom{33}{30} - \binom{23}{20}$.

   (b) Inför variablerna $y_i = x_i - 1$ så kan ekvationen skrivas $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 21$, $0 \leq y_i \leq 6$. Låt $A_i = \{\text{Lösningar sådana att } y_i \geq 7\}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Antalet lösningar är uppenbarligen $\binom{24}{21} - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$ och inklusion-exklusion ger nu att

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 4 \cdot \binom{17}{14} - \binom{4}{2} \cdot \binom{10}{7} + 4 \cdot 1 + 0,$$

   ty det finns precis en lösning då tre av variablerna är lika med 7.

   Totala antalet lösningar är således $\binom{24}{21} - 4 \cdot \binom{17}{14} + \binom{4}{2} \cdot \binom{10}{7} - 4$.

5. Relationen är reflexiv, symmetrisk och transitiv, och alltså en ekvivalensrelation.

   Ett ord i $Q$ kan innehålla högst 2 st $A$, och högst 2 st $I$, så vi får totalt $3 \cdot 3 = 9$ ekvivalensklasser.

   Ordet TRANAN innehåller 2 st A och inga I. De bokstäver som vi kan använda för att konstruera ord som tillhör ekvivalensklassen [TRANAN] är 2 st V, 2 st N, 1 st T, 1 st E, 2 st R, och 1 st L, förutom de 2 st A som ska ingå.

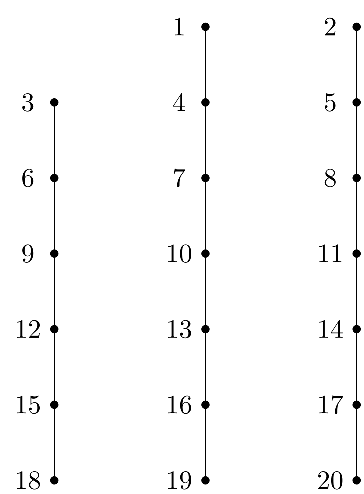
   Antalet ord i [TRANAN] som innehåller exakt 3 olika bokstäver är $\binom{3}{2}\frac{6!}{2!2!2!}$, antalet ord med exakt 4 olika bokstäver är $\binom{3}{1}\binom{5}{2}\frac{6!}{2!2!}$, och antalet med 5 olika bokstäver är $\binom{6}{4}\frac{6!}{2!}$. Antalet element i ekvivalensklassen [TRANAN] är alltså

$$\binom{3}{2}\frac{6!}{2!2!2!} + \binom{3}{1}\binom{5}{2}\frac{6!}{2!2!} + \binom{6}{4}\frac{6!}{2!}.$$

6. Relationen $\mathcal{R}_2$ är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv, och därmed en partialordning.

   $\mathcal{R}_2$ är reflexiv eftersom $x - x = 0$ för alla $x \in E$. $\mathcal{R}_2$ är antisymmetrisk, ty om $x\mathcal{R}_2 y$ och $y\mathcal{R}_2 x$ så gäller att $x - y = 3k_1$ och $y - x = 3k_2$ där $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$. Alltså gäller att $k_1 = k_2 = 0$ och $x = y$. Vi visar nu att $\mathcal{R}_2$ är transitiv. Antag att $x\mathcal{R}_2 y$ och $y\mathcal{R}_2 z$. Då gäller att $x - y = 3k_1$ och $y - z = 3k_2$, där $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$. Genom att addera dessa ekvationer fås att $x - z = 3(k_1 + k_2)$, och således $x\mathcal{R}_2 z$.

   Hassedigrammet ser ut som följer:




7. (a) $a \equiv b \mod n$ om $n \mid (a - b)$, d.v.s. $a - b = kn$ för något $k \in \mathbf{Z}$.

   (b) Vi har att $a \equiv b \mod m$, d.v.s. $k_1 m = a - b$ för något $k_1 \in \mathbf{Z}$. Vidare gäller att $n \mid m$, d.v.s. $m = k_2 n$, för något $k_2 \in \mathbf{Z}$. Genom att kombinera dessa likheter får vi att $k_1 k_2 n = a - b$, så $a \equiv b \mod n$.