Exempel

Bestäm vinkeln mellan kurvorna

$$x^2 + y^2 = 4$$

och

$$y - x = 2$$

i $(0, 2)$.

Lösning

Låt $f(x, y) = x^2 + y^2$ och $g(x, y) = y - x$.

Lösning

Låt $f(x,y) = x^2 + y^2$ och $g(x,y) = y - x$.
$f(0,2) = 4$ och $g(0,2) = 2$, så punkten $(0,2)$ ligger på båda kurvorna.

Lösning

Låt $f(x, y) = x^2 + y^2$ och $g(x, y) = y - x$.
$f(0, 2) = 4$ och $g(0, 2) = 2$, så punkten $(0, 2)$ ligger på båda kurvorna.
$\nabla f = (f'_x, f'_y) = (2x, 2y)$,

Lösning

Låt $f(x, y) = x^2 + y^2$ och $g(x, y) = y - x$.
$f(0, 2) = 4$ och $g(0, 2) = 2$, så punkten $(0, 2)$ ligger på båda kurvorna.
$\nabla f = (f'_x, f'_y) = (2x, 2y)$, $\nabla f(0, 2) = (0, 4)$.

Lösning

Låt $f(x,y) = x^2 + y^2$ och $g(x,y) = y - x$.
$f(0,2) = 4$ och $g(0,2) = 2$, så punkten $(0,2)$ ligger på båda kurvorna.
$\nabla f = (f'_x, f'_y) = (2x, 2y)$, $\nabla f(0,2) = (0,4)$.
$\nabla g = (g'_x, g'_y) = (-1,1)$.

Lösning

Låt $f(x,y) = x^2 + y^2$ och $g(x,y) = y - x$.
$f(0,2) = 4$ och $g(0,2) = 2$, så punkten $(0,2)$ ligger på båda kurvorna.
$\nabla f = (f'_x, f'_y) = (2x, 2y)$, $\nabla f(0,2) = (0,4)$.
$\nabla g = (g'_x, g'_y) = (-1, 1)$.
Vinkeln mellan två kurvor i en punkt är per definition vinkeln mellan deras tangentlinjer, vilket är samma som vinkeln mellan deras normalvektorer.

Lösning

Låt $f(x,y) = x^2 + y^2$ och $g(x,y) = y - x$.
$f(0,2) = 4$ och $g(0,2) = 2$, så punkten $(0,2)$ ligger på båda kurvorna.
$\nabla f = (f'_x, f'_y) = (2x, 2y)$, $\nabla f(0,2) = (0,4)$.
$\nabla g = (g'_x, g'_y) = (-1,1)$.
Vinkeln mellan två kurvor i en punkt är per definition vinkeln mellan deras tangentlinjer, vilket är samma som vinkeln mellan deras normalvektorer.
D.v.s. den sökta vinkeln är vinkeln θ mellan $\bar{u} = (0,4)$ och $\bar{v} = (-1,1)$.

Lösning

Låt $f(x, y) = x^2 + y^2$ och $g(x, y) = y - x$.
$f(0, 2) = 4$ och $g(0, 2) = 2$, så punkten $(0, 2)$ ligger på båda kurvorna.
$\nabla f = (f_x', f_y') = (2x, 2y)$, $\nabla f(0, 2) = (0, 4)$.
$\nabla g = (g_x', g_y') = (-1, 1)$.
Vinkeln mellan två kurvor i en punkt är per definition vinkeln mellan deras tangentlinjer, vilket är samma som vinkeln mellan deras normalvektorer.
D.v.s. den sökta vinkeln är vinkeln θ mellan $\bar{u} = (0, 4)$ och $\bar{v} = (-1, 1)$.

$$\bar{u} \bullet \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}| \cos\theta \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{\bar{u} \bullet \bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|}$$

Lösning

Låt $f(x,y) = x^2 + y^2$ och $g(x,y) = y - x$.
$f(0,2) = 4$ och $g(0,2) = 2$, så punkten $(0,2)$ ligger på båda kurvorna.
$\nabla f = (f'_x, f'_y) = (2x, 2y)$, $\nabla f(0,2) = (0,4)$.
$\nabla g = (g'_x, g'_y) = (-1, 1)$.
Vinkeln mellan två kurvor i en punkt är per definition vinkeln mellan deras tangentlinjer, vilket är samma som vinkeln mellan deras normalvektorer.
D.v.s. den sökta vinkeln är vinkeln θ mellan $\bar{u} = (0,4)$ och $\bar{v} = (-1,1)$.

$$\bar{u} \bullet \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}| \cos\theta \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{\bar{u} \bullet \bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|} = \frac{(0,4) \bullet (-1,1)}{|(0,4)||(-1,1)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}.$$

Graf