Exempel

Visa att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ xyz = 1 \end{cases}$$

lokalt i någon omgivning till $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ bestämmer $\mathcal{C}^1$ funktioner $x(y)$ och $z(y)$ unikt (d.v.s. lokalt är kurvan given av $(x(y), y, z(y))$).
Beräkna även $x'(1)$ och $z'(1)$ för dessa funktioner.

Lösning

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = x + 2y + 3z - 6 = 0 \\ f_2(x,y,z) = xyz - 1 = 0 \end{cases}$$

Lösning

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = x + 2y + 3z - 6 = 0 \\ f_2(x,y,z) = xyz - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(1,1,1) = 0 \\ f_2(1,1,1) = 0 \end{cases} \quad \text{OK.}$$

Lösning

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = x + 2y + 3z - 6 = 0 \\ f_2(x,y,z) = xyz - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(1,1,1) = 0 \\ f_2(1,1,1) = 0 \end{cases} \quad \text{OK.}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Lösning

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = x + 2y + 3z - 6 = 0 \\ f_2(x,y,z) = xyz - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(1,1,1) = 0 \\ f_2(1,1,1) = 0 \end{cases} \quad \text{OK.}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ yz & xy \end{vmatrix}$$

Lösning

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = x + 2y + 3z - 6 = 0 \\ f_2(x,y,z) = xyz - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(1,1,1) = 0 \\ f_2(1,1,1) = 0 \end{cases} \quad \text{OK.}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ yz & xy \end{vmatrix} = xy - 3yz.$$

Lösning

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = x + 2y + 3z - 6 = 0 \\ f_2(x,y,z) = xyz - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(1,1,1) = 0 \\ f_2(1,1,1) = 0 \end{cases} \quad \text{OK.}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ yz & xy \end{vmatrix} = xy - 3yz.$$

I $(1,1,1)$ får vi värdet $1 - 3 = -2 \neq 0$ på determinanten, så implicita funktionssatsen ger existens av de efterfrågade funktionerna.

Lösning

$x = x(y)$ och $z = z(y)$ insatt i ekvationssystemet ger

$$\begin{cases} x(y) + 2y + 3z(y) = 6 \\ x(y)yz(y) = 1 \end{cases}$$

Lösning

$x = x(y)$ och $z = z(y)$ insatt i ekvationssystemet ger

$$\begin{cases} x(y) + 2y + 3z(y) = 6 \\ x(y)yz(y) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(y) + 2 + 3z'(y) = 0 \\ x'(y)yz(y) + x(y)z(y) + x(y)yz'(y) = 0 \end{cases}$$

Lösning

$x = x(y)$ och $z = z(y)$ insatt i ekvationssystemet ger

$$\begin{cases} x(y) + 2y + 3z(y) = 6 \\ x(y)yz(y) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(y) + 2 + 3z'(y) = 0 \\ x'(y)yz(y) + x(y)z(y) + x(y)yz'(y) = 0 \end{cases}$$

Att $(1, 1, 1)$ ligger på kurvan betyder att $x(1) = 1$ och $z(1) = 1$:

Lösning

$x = x(y)$ och $z = z(y)$ insatt i ekvationssystemet ger

$$\begin{cases} x(y) + 2y + 3z(y) = 6 \\ x(y)yz(y) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(y) + 2 + 3z'(y) = 0 \\ x'(y)yz(y) + x(y)z(y) + x(y)yz'(y) = 0 \end{cases}$$

Att $(1, 1, 1)$ ligger på kurvan betyder att $x(1) = 1$ och $z(1) = 1$:

$$\begin{cases} x'(1) + 2 + 3z'(1) = 0 \\ x'(1) \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot z'(1) = 0 \end{cases}$$

Lösning

$x = x(y)$ och $z = z(y)$ insatt i ekvationssystemet ger

$$\begin{cases} x(y) + 2y + 3z(y) = 6 \\ x(y)yz(y) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(y) + 2 + 3z'(y) = 0 \\ x'(y)yz(y) + x(y)z(y) + x(y)yz'(y) = 0 \end{cases}$$

Att $(1, 1, 1)$ ligger på kurvan betyder att $x(1) = 1$ och $z(1) = 1$:

$$\begin{cases} x'(1) + 2 + 3z'(1) = 0 \\ x'(1) \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot z'(1) = 0 \end{cases}$$

Detta ger $x'(1) = -1/2$ och $z'(1) = -1/2$.