Variabelbyten i dubbelintegraler

Flervariabelanalys

Linköpings Universitet

Sats

Om Ω *och* D *är två områden i* $\mathbb{R}^2$ *och* $\bar{g} = (g_1, g_2) : D \to \Omega$ *är inverterbar och har kontinuerliga partiella derivator med* $\dfrac{d(g_1, g_2)}{d(u, v)} \neq 0$ *så gäller med*

$$\begin{cases} x = g_1(u, v) \\ y = g_2(u, v) \end{cases}$$

att

$$\iint_\Omega f dxdy = \iint_D (f \circ \bar{g}) \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| dudv.$$

Variabelbyten i dubbelintegraler

Sats

Om Ω och D är två områden i $\mathbb{R}^2$ och $\bar{g} = (g_1, g_2) : D \to \Omega$ är inverterbar och har kontinuerliga partiella derivator med $\dfrac{d(g_1, g_2)}{d(u, v)} \neq 0$ så gäller med

$$\begin{cases} x = g_1(u, v) \\ y = g_2(u, v) \end{cases}$$

att

$$\iint_\Omega f dxdy = \iint_D (f \circ \bar{g}) \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| dudv.$$

OBS! $\left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right|$ är alltså absolutbeloppet av $\frac{d(x,y)}{d(u,v)}$ som i sin tur är determinanten av funktionalmatrisen (d.v.s. ett reellt tal).

Sats

Om Ω och D är två områden i $\mathbb{R}^2$ och $\bar{g} = (g_1, g_2) : D \to \Omega$ är inverterbar och har kontinuerliga partiella derivator med $\dfrac{d(g_1, g_2)}{d(u, v)} \neq 0$ så gäller med

$$\begin{cases} x = g_1(u, v) \\ y = g_2(u, v) \end{cases}$$

att

$$\iint_\Omega f dxdy = \iint_D (f \circ \bar{g}) \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| dudv.$$

OBS! $\left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right|$ är alltså absolutbeloppet av $\frac{d(x,y)}{d(u,v)}$ som i sin tur är determinanten av funktionalmatrisen (d.v.s. ett reellt tal).

Informellt kan tänka det som att

$$\frac{dxdy}{dudv} = \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right|.$$

Informellt kan tänka det som att

$$\frac{dxdy}{dudv} = \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right|.$$

Notera också att

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \left(\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right)^{-1}.$$

För att förklara rimligheten i satsen notera att eftersom $\bar{g}$ har kontinerliga partialderivator så är den differentierbar, så lokalt är den nästan affin. Vi kommer ihåg att för affina avbildningar (eftersom de bara är translationer av linjära avbildningar) så skalas area just som beloppet av determinanten av den linjära delen. Så lokalt skalar $\bar{g}$ area med faktorn $\left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right|$.

Polära koordinater

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \qquad dxdy = \rho d\rho d\varphi.$$