Riktningsderivator. Gradienter

Flervariabelanalys

Linköpings Universitet

Om $\bar{n}$ är en vektor i $\mathbb{R}^n$ med **längd 1** (OBS!) så definieras rikningsderivatan i $\bar{a}$ i riktning $\bar{n}$ till f (om den existerar) som

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{a}+h\bar{n})-f(\bar{a})}{h} =: \frac{\partial f}{\partial \bar{n}}(\bar{a}) = f'_{\bar{n}}(\bar{a}).$$

Om $\bar{n}$ är en vektor i $\mathbb{R}^n$ med **längd 1** (OBS!) så definieras rikningsderivatan i $\bar{a}$ i riktning $\bar{n}$ till f (om den existerar) som

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{a}+h\bar{n})-f(\bar{a})}{h} =: \frac{\partial f}{\partial \bar{n}}(\bar{a}) = f'_{\bar{n}}(\bar{a}).$$

Notera att partialderivator helt enkelt är riktningsderivator när vi tar $\bar{n}$ att vara en av vektorerna i standardbasen:

$$f'_{x_j} = f'_{\bar{e}_j}.$$

Sats

Om f är differentierbar i $\bar{a}$ så existerar $f'_{\bar{n}}(\bar{a})$ och ges av

$$f'_{\bar{n}}(\bar{a}) = \nabla f(\bar{a}) \bullet \bar{n}.$$

Riktningsderivator

Sats

Om f är differentierbar i $\bar{a}$ så existerar $f'_{\bar{n}}(\bar{a})$ och ges av

$$f'_{\bar{n}}(\bar{a}) = \nabla f(\bar{a}) \bullet \bar{n}.$$

- **Geometrisk tolkning av gradienten:** Gradienten ∇f pekar i den riktning i vilken funktionen f växer snabbast, d.v.s. i den riktning som har störst riktningsderivata, och storleken på denna riktningsderivata är $|\nabla f|$.

Sats

Om f är differentierbar i $\bar{a}$ så existerar $f'_{\bar{n}}(\bar{a})$ och ges av

$$f'_{\bar{n}}(\bar{a}) = \nabla f(\bar{a}) \bullet \bar{n}.$$

- **Geometrisk tolkning av gradienten:** Gradienten ∇f pekar i den riktning i vilken funktionen f växer snabbast, d.v.s. i den riktning som har störst riktningsderivata, och storleken på denna riktningsderivata är $|\nabla f|$.

Om $\nabla f(\bar{a}) = \bar{0}$ är alla riktningsderivator 0 och man kallar då $\bar{a}$ en **kritisk** eller **stationär punkt**.

Nivåkurvor/ytor

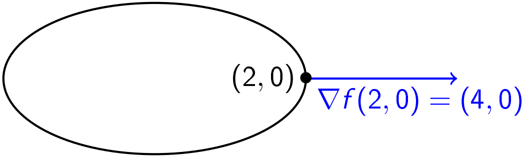
Om $f : \Omega \to \mathbb{R}$ där $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ och vi ser på nivåytan (kurvan då $n = 2$) $f(\bar{x}) = c$ i Ω så gäller att om $\bar{a}$ ligger på denna och f har kontinuerliga partialderivator i en omgivning till $\bar{a}$ med $\nabla f(\bar{a}) \neq \bar{0}$ så är $\nabla f(\bar{a})$ en normalvektor till nivåytan i $\bar{a}$.

Nivåkurvor/ytor

Om $f : \Omega \to \mathbb{R}$ där $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ och vi ser på nivåytan (kurvan då $n = 2$) $f(\bar{x}) = c$ i Ω så gäller att om $\bar{a}$ ligger på denna och f har kontinuerliga partialderivator i en omgivning till $\bar{a}$ med $\nabla f(\bar{a}) \neq \bar{0}$ så är $\nabla f(\bar{a})$ en normalvektor till nivåytan i $\bar{a}$.
Anledningen är helt enkelt att i de riktningar $\bar{v}$ som tangerar ytan i $\bar{a}$ kommer funktionen lokalt vara nästan konstant $= c$ så riktningsderivatan $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{a}) = \nabla f(\bar{a}) \bullet \bar{v} = 0$.

Exempel

$f(x, y) = x^2 + 4y^2 = 4$



Specialfall

- Om $n = 2$ och $\bar{a} = (a, b)$ ger $\nabla f(a, b) \bullet (x - a, y - b) = 0$ tangentlinjen på normalform till nivåkurvan i (a, b),

Specialfall

- Om $n = 2$ och $\bar{a} = (a, b)$ ger $\nabla f(a, b) \bullet (x - a, y - b) = 0$ tangentlinjen på normalform till nivåkurvan i (a, b),
- Om $n = 3$ och $\bar{a} = (a, b, c)$ ger $\nabla f(a, b, c) \bullet (x - a, y - b, z - c) = 0$ tangentplanet på normalform till nivåytan i (a, b, c).