Hans Lundmark
Matematiska institutionen
Linköpings universitet

2019-10-31

Kompletterande övningar för TATA69 ht 2019

Ledtrådar, kommentarer och svar till de flesta uppgifterna finns i slutet av texten.

K0 **Tillbakablick**

Ägna ett ögonblick åt att tänka igenom vad du vet om funktioner av en variabel:

- När man först lär sig rita grafer $y = f(x)$ brukar man nöja sig med en värdetabell. Såhär, t.ex.:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

  Men naturligtvis räcker det inte att enbart känna till värden i enstaka punkter för att kunna rita en tillförlitlig graf, utan man måste även tänka efter hur funktionen beter sig mellan dessa punkter.

- Senare har du lärt dig mer avancerade metoder för funktionsundersökning, framför allt med hjälp av derivator. (Och även gränsvärden, för att t.ex. undersöka om det finns asymptoter.)

- Påminn dig själv om begreppen *kontinuitet* och *deriverbarhet* och hur de hänger ihop. Måste en deriverbar funktion vara kontinuerlig? Måste en kontinuerlig funktion vara deriverbar?

  (Kommer du på någon funktion som går att derivera en gång, men inte två gånger? Svårare: Kan du ange en funktion f sådan att f' existerar överallt men f' inte är kontinuerlig?)

K1 **Funktioner av två variabler**

Som vårt första exempel på en funktion av två variabler tar vi $f(x, y) = x^2 + 4y$.

(a) Gör en tabell över f:s värden i några punkter, t.ex. heltalspunkter med $x, y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$. Ett bekvämt sätt att sköta bokföringen är att föra in värdena i ett (x, y)-koordinatsystem: vid punkten (x, y) skriver du det uträknade värdet $f(x, y)$.

(b) Fundera över funktionens värden i punkter som ligger mellan punkterna i din tabell. (Hur ändras värdet $f(x, y)$ om man varierar x men håller y konstant? Växer det eller avtar det? Och om man ändrar y men håller x konstant? Etc.)

(c) Hur beter sig funktionen när $|x|$ och/eller $|y|$ är stort? (Kan man få $f(x,y)$ att bli hur stort som helst, eller finns det någon övre eller undre gräns som värdet inte kan över- resp. underskrida?)

(d) Finns det symmetrier? (Just denna funktion råkar ha egenskapen att $f(-x,y) = f(x,y)$; hur syns detta i värdetabellen?)

(e) Hitta alla punkter där $f(x,y) = 0$. (Du kanske direkt hittar några sådana heltalspunkter i din värdetabell, men glöm inte att det kan finnas andra möjliga punkter mellan heltalspunkterna.) Dessa punkter bildar en *nivåmängd*, som betecknas såhär om man ska vara noggrann:[1]

$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = 0\}.$$

(”Mängden av alla punkter (x,y) i $\mathbf{R}^2$ som uppfyller villkoret $f(x,y) = 0$.”)

Rita in denna nivåmängd i koordinatsystemet.[2] Gör samma sak för några nivåmängder till, t.ex. $f(x,y) = -1$, $f(x,y) = 1$ och $f(x,y) = 2$. Kan du tänka ut hur en godtycklig nivåmängd $f(x,y) = C$ ser ut?

(f) Med hjälp av de ovanstående stegen, gör dig en mental bild av funktionens *graf* $z = f(x,y)$ (även kallad *funktionsytan* för f). Försök också att rita den på papper, och jämför sedan med en datorritad bild.[3]

(g) Nivåmängderna $f(x,y) = C$ ritas i ett tvådimensionellt koordinatsystem (x,y), medan grafen $z = f(x,y)$ ritas i ett tredimensionellt koordinatsystem (x,y,z). Fundera över sambanden mellan dessa två figurers utseende. (Förslag: tänk på höjdkurvor på en topografisk karta kontra terrängens verkliga utseende.)

(h) Räkna ut $f'_x(x,y)$ och $f'_y(x,y)$ (de *partiella derivatorna*[4] med avseende på x resp. y) och fundera på vad de säger om hur funktionsvärdena växer/avtar. I vilka punkter är $f'_x(x,y) = 0$? Var är $f'_y(x,y) = 0$? Finns det några punkter där båda de partiella derivatorna är noll samtidigt?

[1] Ett förkortat skrivsätt är $\{f(x,y) = 0\}$ eller bara $\{f = 0\}$. Ofta är man dock ännu latare och skriver ”nivåmängden $f(x,y) = 0$” eller ”nivåmängden $f = 0$” utan några mängdklamrar. Egentligen är detta ett oprecist språkbruk, eftersom $f(x,y) = 0$ är en ekvation och inte en mängd, men det brukar anses acceptabelt. (Liknande förenklingar är att säga ”funktionen $f(x) = x^2$” istället för ”den funktion f vars värde i punkten x ges av formeln $f(x) = x^2$”, eller ”grafen $y = f(x)$” istället för ”grafen $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y = f(x)\}$”.)

[2] Ofta, som i det här fallet, är nivåmängden en *nivåkurva*, men mer allmänt kan en nivåmängd se ut lite hur som helst; t.ex. kan den vara tom, eller bestå av enstaka punkter.

[3] Det finns många datorprogram, mobiltelefonappar och webbtjänster som kan hjälpa till med att rita grafer och nivåkurvor. T.ex. kan du skriva **x^2 + 4y** direkt i sökrutan hos **Google**, så kommer det upp en interaktiv 3d-modell av grafen $z = x^2 + 4y$, som man kan rotera och zooma i med musen. (Kräver stöd för WebGL, så det funkar inte med alla webbläsare eller plattformar.) Ett annat populärt alternativ, som klarar mycket mer än att bara rita grafer, är **www.wolframalpha.com**.

[4] Den partiella derivatan f'_x beräknas genom att derivera f med avseende på x som om y vore en konstant. Och den partiella derivatan f'_y fås genom att istället behandla y som variabel och x som konstant. Exempel: Om $f(x,y) = x^3 + x^2y^5$ så är $f'_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^5$ och $f'_y(x,y) = 0 + 5x^2y^4$.

K2 **Definitionsmängd**

Låt $g(x, y) = \ln(x^2 + 4y)$. Vilket villkor måste x och y uppfylla för att värdet $g(x, y)$ ska vara definierat? Illustrera i (x, y)-planet den mängd som består av alla punkter som uppfyller detta villkor; med andra ord, rita definitionsmängden D_g för funktionen g. Hur ser nivåmängderna och grafen för g ut? (Du kan ha hjälp av uppgift K1 här, eftersom $g = \ln f$, där f är funktionen från den uppgiften.)

K3 Gör om uppgift K1 för följande funktioner:

(a) $f(x, y) = 2x - 5y$

(b) $f(x, y) = xy$

(c) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$

(d) $f(x, y) = x^2 - 4y^2$

(e) $f(x, y) = x^2 + 4xy + 4y^2$

(f) $f(x, y) = 2x^2 + 4xy + 5y^2$

(g) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$

K4 **Kontinuitet (smakprov)**

Låt

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{om } x < y, \\ x, & \text{om } x \geq y. \end{cases}$$

(Alltså t.ex. $f(2,3) = 2^2 + 3^2 = 13$ eftersom $2 < 3$, men $f(5,0) = 5$ eftersom $5 \geq 0$.)

Hur ser nivåmängderna och grafen ut? (Du kan alltid börja med att göra en värdetabell ifall du är osäker på hur du ska angripa problemet.)

Skulle du säga att f är en *kontinuerlig*[5] funktion?

Titta istället på

$$g(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{om } x < y, \\ 2x^2, & \text{om } x \geq y. \end{cases}$$

Är g en kontinuerlig funktion?

K5 **Rotationssymmetri m.m.**

Rita grafen och några nivåmängder för nedanstående funktioner. Fundera särskilt över vilka olika typer av *symmetri* som förekommer.

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$

(b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

[5] Löst uttryckt: ”sitter grafen ihop?” Begreppet kontinuitet definieras ordentligt lite senare i kursen.

(c) $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$

(d) $f(x,y) = (x+2y)^3$

(e) $f(x,y) = \sin(x+2y)$

(f) $f(x,y) = |x-y|$

(g) $f(x,y) = \max(-|x|, -|2y|)$
(Beteckningen $\max(a,b)$ står för det största av de två talen a och b; t.ex. är $\max(3,7) = 7$ och $\max(-2,-3) = -2$.)

K6 **Gränsvärde (smakprov)**

Hur ser grafen och nivåmängderna ut för följande funktioner? Ta gärna hjälp av dator om du har svårt att göra dig en bra bild "för hand".

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{om } (x,y) \neq (0,0), \\ \text{odefinierat}, & \text{om } (x,y) = (0,0). \end{cases}$
(Ledning: vad är $f(x,y)$ om $y = kx$?)

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}, & \text{om } (x,y) \neq (0,0), \\ \text{odefinierat}, & \text{om } (x,y) = (0,0). \end{cases}$
(Ledning: vad är $f(x,y)$ om $y = kx^2$?)

De här funktionerna kommer att vara användbara som exempel när vi ska prata om gränsvärden senare. Du kan redan nu fundera på om du tycker att man bör säga att de har något gränsvärde när $(x,y) \to (0,0)$, och vad det gränsvärdet är i så fall.

K7 **Funktioner av tre variabler**

Funktioner av tre variabler är svårare att visualisera. För att rita en graf $w = f(x,y,z)$ skulle man ju behöva ha tillgång till ett fyrdimensionellt rum med x-, y-, z- och w-axlar! Det man däremot *kan* illustrera i tre dimensioner är nivåmängderna $f(x,y,z) = C$, som ju är mängder i $\mathbf{R}^3$. Ofta är nivåmängderna *nivåytor*, men de kan också vara kurvor, tomma mängden, bestå av enstaka punkter, eller ha något annat mer komplicerat utseende.

Gör dig en mental bild av hur följande funktioners nivåmängder $f(x,y,z) = C$ ser ut för $C = -1$, 0, 1 och 2 (eller godtyckligt C), och rita dem på papper om du kan:

(a) $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$

(b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

(c) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$

(d) $f(x,y,z) = xyz$

K8 **Vektorvärda funktioner**

De funktioner som vi har tittat på hittills har som indata haft en punkt (eller en vektor om man så vill)

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \quad \text{eller} \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3,$$

och som utdata ett vanligt tal

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) \in \mathbf{R} \quad \text{resp.} \quad f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}.$$

Man brukar indikera detta med skrivsättet $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ resp. $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$. Funktioner av typen $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ kallas **reellvärda** eller **skalärvärda**, eftersom deras *värden* $f(\mathbf{x})$ är *reella tal* (*skalärer*).

Det finns även funktioner $\mathbf{f}\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ vars utdata är punkter/vektorer i $\mathbf{R}^m$ (med $m \geq 2$); sådana funktioner kallas **vektorvärda**. Några exempel:

(a) $\mathbf{f}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3, \quad \mathbf{f}(t) = (1+t, 2-t, 3+5t)$

(b) $\mathbf{f}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3, \quad \mathbf{f}(t) = (t, t^2, t^3)$

(c) $\mathbf{f}\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, \quad \mathbf{f}(x,y) = (3x+y, x-y)$

(d) $\mathbf{f}\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, \quad \mathbf{f}(x,y) = (2x-2y, x-y)$

(e) $\mathbf{f}\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, \quad \mathbf{f}(x,y) = (x^2-y^2, 2xy)$

(f) $\mathbf{f}\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3, \quad \mathbf{f}(s,t) = (s^2\cos t, s^2\sin t, s)$

Fundera över hur man skulle kunna visualisera och/eller tolka dessa funktioner.

(Ett par av exemplen ovan bör se bekanta ut! Kommer du ihåg *linjära avbildningar* och *linjens ekvation på parameterform* från kursen i linjär algebra?)

K9 **Gradient (smakprov)**

Givet en reellvärd funktion $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ kan man bilda en vektorvärd funktion genom att räkna ut alla f:s partiella derivator och ställa upp dem i en vektor. Denna funktion kallas *gradienten* för f, och betecknas ∇f (vilket utläses ”nabla f”):

$$\nabla f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, \quad \nabla f(\mathbf{x}) = \big(f'_{x_1}(\mathbf{x}), f'_{x_2}(\mathbf{x}), \dots, f'_{x_n}(\mathbf{x})\big).$$

Det lämpligaste sättet att tänka på gradienten är som ett *vektorfält*: i varje punkt $\mathbf{x}$ sitter det en tillhörande vektor $\nabla f(\mathbf{x})$.

Gå tillbaka till uppgifterna K1 och K3, där du har ritat nivåkurvor och räknat ut de partiella derivatorna för ett antal funktioner $f(x,y)$. Gör följande för några av dessa funktioner: skriv upp uttrycket för gradienten

$$\nabla f(x,y) = \big(f'_x(x,y), f'_y(x,y)\big),$$

räkna ut dess värde i några punkter, rita in dessa vektorer på sina rätta platser i (x, y)-planet, och rita *i samma figur* in de nivåkurvor $f(x, y) = C$ som går genom dessa punkter. Ser du något intressant? (Och kan du spekulera om något motsvarande fenomen för funktioner av *tre* variabler?)

K10 **Partiell derivata med lustigt beteende**

(a) Påminn dig om hur grafen $y = \arctan x$ ser ut.

(b) Övertyga dig om följande: Grafen $y = A\arctan(x/B)$ (där $A, B > 0$) fås från grafen $y = \arctan x$ genom att skala om hela bilden med faktorn B i x-led och faktorn A i y-led.

Rita sedan grafen för $f(x) = 2\arctan(x/2)$ och för $f(x) = \frac{1}{3}\arctan(3x)$, och notera särskilt vad lutningen i punkten $x = 0$ är (alltså $f'(0)$). Generalisera till $f(x) = k\arctan(x/k)$ för godtyckligt $k \neq 0$ (inklusive negativa k).

(c) Nu tar vi alla dessa funktioner $f(x) = k\arctan(x/k)$ för olika värden på parametern k, och fogar ihop dem till en enda tvåvariabelfunktion $g(x, y)$ genom att helt enkelt döpa om k till y. Uttrycket $k\arctan(x/k)$ är ju inte definierat när $k = 0$, men det går mot noll när $k \to 0$ (eftersom arctan-faktorn är begränsad), så vi sätter helt enkelt vår funktion g till noll för $y = 0$, så att den blir kontinuerlig:

$$g(x, y) = \begin{cases} y\arctan(x/y), & \text{om } y \neq 0, \\ 0, & \text{om } y = 0. \end{cases}$$

Med hjälp av det du gjorde i (b) bör det inte vara särskilt svårt att föreställa sig hur grafen $z = g(x, y)$ ser ut. Gör det! Och rita den på papper om du kan. (Eller låt datorn rita; det räcker att helt enkelt ange **y*arctan(x/y)** för att få en bra bild både på Google och WolframAlpha. Men tänk efter själv först!)

(d) Räkna ut den partiella derivatan $g'_x(x, y)$ (betrakta fallen $y \neq 0$ och $y = 0$ var för sig). Titta nu på denna derivatas värden längs y-axeln, alltså talen $g'_x(0, y)$ (för $y \neq 0$ och $y = 0$). Skulle du säga att g'_x är en kontinuerlig funktion eller inte?

(e) I vilka punkter existerar derivatan $g'_y(x, y)$? (Bör vara ganska lätt att se i den datorritade grafen.)

(f) Hur blir det om man tittar på

$$h(x, y) = \begin{cases} y^2\arctan(x/y^2), & \text{om } y \neq 0, \\ 0, & \text{om } y = 0, \end{cases}$$

istället?

(g) Även för funktioner av en variabel kan det hända att derivatan existerar överallt men inte är kontinuerlig. Men då måste funktionen bete sig på ett ”konstigare” (mer oscillerande) sätt än de ovanstående till synes harmlösa tvåvariabelfunktionerna. Här är ett exempel:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & \text{om } x \neq 0, \\ 0, & \text{om } x = 0. \end{cases}$$

Beräkna $f'(x) = \frac{d}{dx}\Big(x^2 \sin(1/x)\Big) = \cdots$ för $x \neq 0$ och

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin(1/h) - 0}{h} = \cdots,$$

och visa med hjälp av detta att f' inte är kontinuerlig i origo. Hur ser grafen $y = f(x)$ ut?

K11 **Undersökning av eventuell lokal extrempunkt**

Scenario nedan: En TATA69-student har hittat en stationär punkt P för funktionen f, och har korrekt räknat ut den kvadratiska formen Q i f:s Taylorutveckling kring punkten P. Med hjälp av detta försöker hen avgöra om f har lokalt maximum, lokalt minimum eller sadelpunkt i P.

I samtliga fall finns det något som inte stämmer – fel slutsats, eller rätt slutsats med felaktig motivering. Hitta felen! (Och gör inte de felen på tentan sedan, är du snäll...)

(a_1) ”Vi har

$$Q(h,k) = h^2 + 2hk + 3k^2 = \underbrace{(h+k)^2}_{>0} + \underbrace{2k^2}_{>0}.$$

Alltså är Q positivt definit, så P är en lokal minimipunkt.”

(a_2) ”Vi har

$$Q(h,k) = h^2 + 2hk + 3k^2 = \underbrace{(h+k)^2}_{>0} + \underbrace{2k^2}_{>0}$$

för alla $(h,k) \neq (0,0)$. Alltså är Q positivt definit, så P är en lokal minimipunkt.”

(a_3) ”Vi har

$$Q(h,k) = h^2 + 2hk + 3k^2 = \underbrace{(h+k)^2}_{\geq 0} + \underbrace{2k^2}_{\geq 0}.$$

Alltså är Q positivt definit, så P är en lokal minimipunkt.”

(b_1) ”Den kvadratiska formen $Q(h,k) = h^2 + hk$ är indefinit, eftersom $Q(1,0) = 1 > 0$ och $Q(1,-2) = -1 < 0$. Alltså kan vi inte dra någon slutsats om P.”

(b$_2$) ”Den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = h^2 + hk = (h + \tfrac{1}{2}k)^2 - \tfrac{1}{4}k^2$$

är indefinit, eftersom $Q(1,0) = 1 > 0$ och $Q(0,1) = -\frac{1}{4} < 0$. Alltså är P en sadelpunkt.”

(c) ”Den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = h^2 + 4hk + 6k^2 = (h + 4k)^2 - 10k^2$$

är indefinit, eftersom $Q(1,0) = 1 > 0$ och $Q(4,-1) = -10 < 0$. Alltså är P en sadelpunkt.”

(d$_1$) ”Kvadratkomplettering ger

$$\begin{aligned} Q(h,k,l) &= 3h^2 - 2hk + 8hl + 2k^2 + 4kl + 12l^2 \\ &= (h-k)^2 + 4(h+l)^2 - 2h^2 + (k+2l)^2 + 4l^2. \end{aligned}$$

Teckenmönstret $(++-++)$ visar att Q är indefinit, alltså är P en sadelpunkt.”

(d$_2$) ”Kvadratkompletteringen

$$\begin{aligned} Q(h,k,l) &= 3h^2 - 2hk + 8hl + 2k^2 + 4kl + 12l^2 \\ &= (h-k)^2 + 2(h+2l)^2 + (k+2l)^2 \end{aligned}$$

visar att $Q(h,k,l) > 0$ för alla $(h,k,l) \neq (0,0,0)$. Alltså är Q positivt definit, så P är en lokal minimipunkt.”

(d$_3$) ”Den kvadratiska formen

$$Q(h,k,l) = 3h^2 - 2hk + 8hl + 2k^2 + 4kl + 12l^2$$

är positivt semidefinit, eftersom värdena $Q(1,0,0) = 3$, $Q(0,1,0) = 2$ och $Q(0,0,1) = 12$ är positiva, och dessutom $Q(2,2,-1) = 0$. Från detta kan vi inte avgöra om P är en lokal extrempunkt, så vi går vidare med en annan undersökning istället: [...]”

(d$_4$) ”Kvadratkomplettering ger

$$\begin{aligned} Q(h,k,l) &= 3h^2 - 2hk + 8hl + 2k^2 + 4kl + 12l^2 \\ &= 3(h - \tfrac{1}{3}k + \tfrac{4}{3}l)^2 + \tfrac{5}{3}(k+2l)^2. \end{aligned}$$

Teckenmönstret $(++)$ visar att Q är positivt definit, alltså är P en lokal minimipunkt.”

K12 **Planpolära koordinater**

(a) Om $(\rho,\varphi) = (10, 2\pi/3)$, bestäm (x,y).

(b) Om $(x, y) = (3, -3)$, bestäm (ρ, φ) med villkoret $0 \leq \varphi < 2\pi$. Hur blir det om man istället kräver $-\pi < \varphi \leq \pi$?

(c) Skissa det område i xy-planet som i polära koordinater beskrivs av $1 \leq \rho \leq 2$, $-5\pi/6 \leq \varphi \leq \pi/2$.

(d) Beskriv andra kvadranten (dvs. $x \leq 0$, $y \geq 0$) i polära koordinater.

(e) Skissa området $x^2 + y^2 \leq 9$, $x + 2y \leq 0$ i xy-planet, och beskriv det i polära koordinater.

(f) Samma sak för området $x^2 + y^2 \leq 2x$.

K13 **Rymdpolära koordinater**

(a) Om $(r, \theta, \varphi) = (10, \pi/6, 3\pi/4)$, bestäm (x, y, z).

(b) Om $(x, y, z) = (-1, -1, -\sqrt{2})$, bestäm (r, θ, φ) med villkoret $0 \leq \varphi < 2\pi$.

(c) Skissa det område i xyz-rummet (eller beskriv i ord åtminstone) som i rymdpolära koordinater ges av $1 \leq r \leq 2$, $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/4$, $\pi/6 \leq \varphi \leq \pi/2$.

(d) Beskriv det undre halvrummet (dvs. $z \leq 0$) i rymdpolära koordinater.

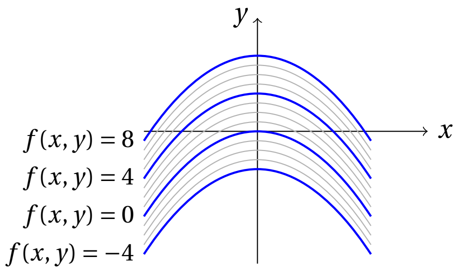
(e) Beskriv den positiva oktanten (dvs. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$) i rymdpolära koordinater.

(f) Beskriv mängden $x^2 + y^2 + z^2 \leq 5$, $z^2 \leq \frac{1}{3}(x^2 + y^2)$, $x \geq 0$ i rymdpolära koordinater.

Diverse ledtrådar och svar

K1 En liten värdetabell och några nivåkurvor för $f(x,y) = x^2 + 4y$:

12	9	8	9	12	17
8	5	4	5	8	13
4	1	0	1	4	9
0	−3	−4	−3	0	5
−4	−7	−8	−7	−4	1



Nivåkurvorna för just denna funktion råkar vara parabler, vilket man ser om man löser ut y:

$$f(x,y) = x^2 + 4y = C \quad \Longleftrightarrow \quad y = -x^2/4 + C/4.$$

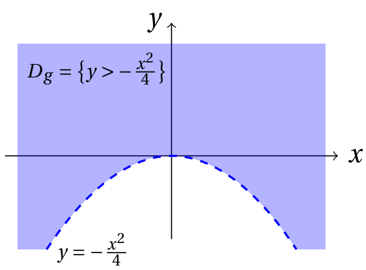
Nivåkurvan $f(x,y) = 0$ är alltså parabeln $y = -x^2/4$ (som ser ut som kurvan $y = x^2$ fast uppochnervänd och lite tillplattad). Övriga nivåkurvor fås genom att förskjuta denna kurva i y-led (flytta kurvan $C/4$ steg för att få nivåkurvan $f(x,y) = C$).

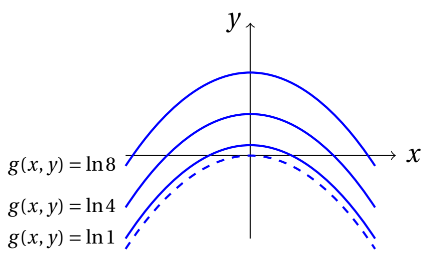
Grafen $z = f(x,y)$ ser ut lite som en ”halfpipe” för snowboardåkning – rita upp den med dator för att kontrollera att du tänkt rätt! Om man skär grafen med planet $y = b$ får man en parabel $z = x^2 + 4b$ (blanda inte ihop dessa parabler med nivåkurvorna – de ligger ju inte ens i samma plan). Tvärsnittet med planet $x = a$ är en rät linje $z = a^2 + 4y$.

K2 För $g(x,y) = \ln(x^2 + 4y)$ består definitionsmängden D_g av de punkter (x,y) i $\mathbf{R}^2$ som uppfyller $x^2 + 4y > 0$, alltså $y > -x^2/4$. Uttryckt med formler:

$$D_g = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ y > -x^2/4\}.$$

Denna mängd utgörs alltså av det obegränsade området strikt ovanför den streckade kurvan $y = -x^2/4$ i figuren nedan. Mellan denna streckade kurva och nivåkurvan $g(x,y) = \ln 1 = 0$ antar $g(x,y)$ negativa värden, men det blev lite för trångt i figuren för att rita in några nivåkurvor $g(x,y) = C$ med negativa C. Notera dock att $g(x,y) \to -\infty$ när man närmar sig den streckade kurvan, så grafen $z = g(x,y)$ dyker brant ner mot $-\infty$ där.





K3 Alla funktioner i denna uppgift är **homogena polynom**, alltså polynom där **alla termer har samma gradtal**. Sedan gammalt används ordet **form** som synonym för homogent polynom; i deluppgift (a) är funktionen alltså en **linjär form** (alla termer har grad 1), i (b)–(f) har vi **kvadratiska former** (alla termer har grad 2), och i (g) en **kubisk form** (alla termer har grad 3).

Kände du igen att funktionerna i (b)–(f) var kvadratiska former? Sådana bör vara **välbekanta från linjär algebra-kursen**, annars behöver du gå tillbaka och **repetera**! De kommer att ha stor betydelse senare i denna kurs, i samband med undersökning av lokala extrempunkter, så det är väl värt besväret att tänka igenom de uppgifterna lite extra noga. Framför allt bör du försöka minnas vad det betyder när man säger att en kvadratisk form är **positivt definit**, **positivt semidefinit**, **indefinit**, **negativt definit** eller **negativt semidefinit**. Hur ser man skillnad på dessa fall i värdetabellen?

(a) Kom ihåg från kursen i linjär algebra: räta linjens ekvation $Ax+By=C$ och planets ekvation $Ax+By+Cz=D$.

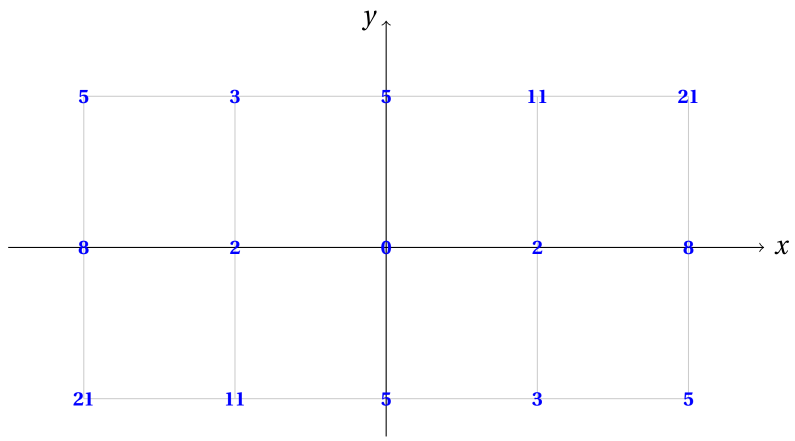
Nivåkurvorna $2x-5y=C$ är en skara av parallella räta linjer som alla har $\binom{2}{-5}$ som normalvektor.

Grafen $z=2x-5y$ är ett plan som går genom punkten $(0,0,0)$ och har lutning 2 i x-led och lutning -5 i y-led; via omskrivningen $2x-5y-z=0$ avläser man att $\begin{pmatrix}2\\-5\\-1\end{pmatrix}$ är en normalvektor till planet.

(b)–(f) För en kvadratisk form i två variabler är nivåkurvorna ellipser eller hyperbler, eller i undantagsfall räta linjer (eller en enstaka punkt, eller tomma mängden). Grafen är en elliptisk paraboloid (”parabolantenn” eller ”skål”) eller en hyperbolisk paraboloid (”sadelyta”), eller i undantagsfall en parabolisk cylinder (”ränna”, t.ex. i (e) där $f(x,y)=(x+2y)^2$). Ta gärna hjälp av dator för att kontrollera att du har tänkt rätt i de olika fallen.

Teckenkaraktär: (b) indefinit, (c) positivt definit, (d) indefinit, (e) positivt semidefinit, (f) positivt definit.

Såhär ser värdetabellen ut om man räknar ut funktionsvärdet i några heltalspunkter i uppgift (f):



Men hur ligger nivåkurvorna egentligen? För att reda ut detta fullständigt behövs nog lite teori för kvadratiska former från linalgen, och även när det gäller (b)–(e) som man kan begripa på mer direkt sätt kan det vara nyttigt att jämföra med vad den allmänna teorin säger. Kom ihåg att en kvadratisk form i n variabler kan skrivas $f(x_1,\ldots,x_n) = X^t S X$, där S är en symmetrisk $n \times n$ matris som bara innehåller konstanter och $X = (x_1,\ldots,x_n)^t$ är en kolonnvektor som innehåller variablerna. (Koefficienterna för de rena kvadrattermerna sätter man längs huvuddiagonalen i S, och blandtermernas koefficienter delar man i två halvor som hamnar på varsin sida om diagonalen.) Såhär ser det ut i fallet $n = 2$:

$$f(x,y) = ax^2 + \underbrace{bxy}_{\text{blandterm}} + cy^2 = (x,y)\underbrace{\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}}_{\substack{\text{symmetrisk} \\ \text{matris } S}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

I (f)-uppgiften har vi

$$f(x,y) = 2x^2 + 4xy + 5y^2 = (x,y)\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}_{S}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Den vanliga uträkningen (karaktäristiska polynomet, osv.) visar att egenvärdena för S är

$$\lambda_1 = 1 \qquad \text{och} \qquad \lambda_2 = 6,$$

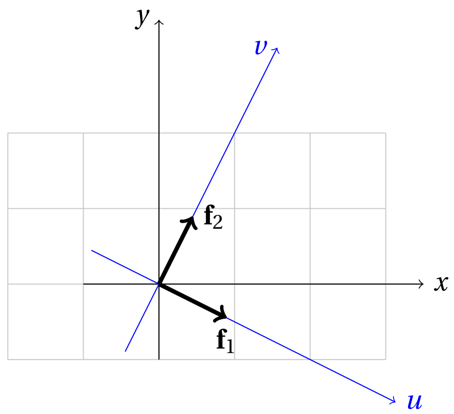
med tillhörande ON-bas av egenvektorer

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Variabelbytet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = u\mathbf{f}_1 + v\mathbf{f}_2 = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{basbytes-} \\ \text{matris } P}}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

ger ett nytt ON-koordinatsystem (u, v) med axlar i egenvektorernas riktningar:



(Eller hur? Värdena $\binom{u}{v} = \binom{1}{0}$ insatta i formeln $\binom{x}{y} = u\mathbf{f}_1 + v\mathbf{f}_2$ ger ju $\binom{x}{y} = \mathbf{f}_1$, och $\binom{u}{v} = \binom{0}{1}$ ger $\binom{x}{y} = \mathbf{f}_2$, som det ska vara enligt figuren!) Om vi utför matrismultiplikationen $\binom{x}{y} = P\binom{u}{v}$ så erhålls

$$x = \frac{2u + v}{\sqrt{5}}, \qquad y = \frac{-u + 2v}{\sqrt{5}}.$$

Insättning av dessa uttryck i vår kvadratiska form $f(x, y)$ ger

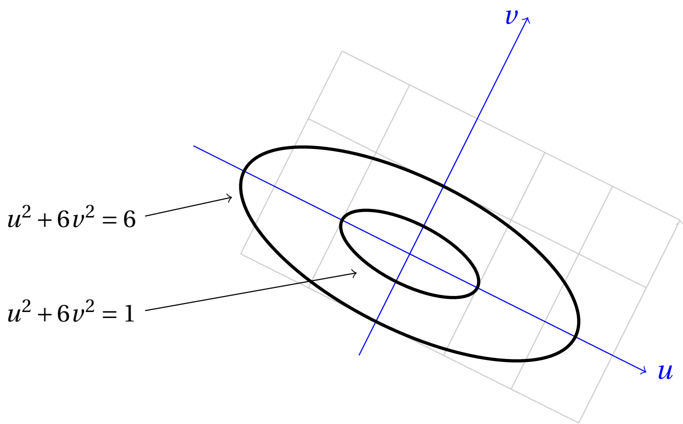
$$\begin{aligned} f &= 2x^2 + 4xy + 5y^2 \\ &= 2\left(\frac{2u+v}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(\frac{2u+v}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{-u+2v}{\sqrt{5}}\right) + 5\left(\frac{-u+2v}{\sqrt{5}}\right)^2 \\ &= \tfrac{2}{5}\left(4u^2 + 4uv + v^2\right) \\ &\quad + \tfrac{4}{5}\left(-2u^2 + 3uv + 2v^2\right) \\ &\quad + \tfrac{5}{5}\left(u^2 - 4uv + 4v^2\right) \\ &= \tfrac{8-8+5}{5}\,u^2 + \tfrac{8+12-20}{5}\,uv + \tfrac{2+8+20}{5}\,v^2 \\ &= 1u^2 + 6v^2. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Notera att **blandtermen** med uv **försvann** – koefficienten framför den blev noll i uträkningen! Och koefficenterna framför de kvarvarande rena kvadrattermerna med u^2 och v^2 blev precis **egenvärdena** $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 6$. Detta är såklart ingen slump, utan det är ju så att när man byter till ett koordinatsystem bildat på ovanstående sätt med hjälp av en ON-bas av egenvektorer till S så får man *alltid*[6]

$$f = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2.$$

(Det var alltså egentligen lite onödigt att göra uträkningen $(*)$, men jag tänkte att det kunde vara bra att pröva på den en gång, så att man ser att det verkligen bara är ett variabelbyte – i formeln för f bytte vi ut x och y mot uttryck med de nya variablerna u och v.)

Glöm nu x- och y-axlarna för ett ögonblick! Det är enkelt att rita upp f:s nivåkurvor i (u,v)-koordinatsystemet: nivåkurvan $f = u^2+6v^2 = 1$ är ju en ellips med halvaxlarna 1 och $1/\sqrt{6}$ i u- resp. v-led, och övriga nivåkurvor är omskalade versioner av denna ellips:

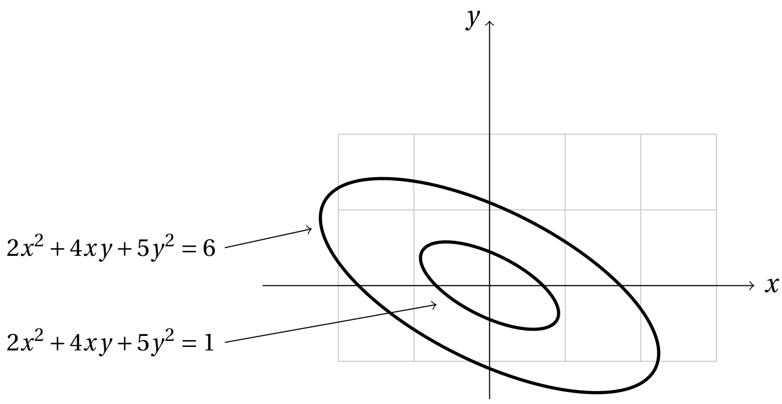


För att svara på den ursprungliga frågan om nivåkurvorna i xy-planet är det nu bara att låta ellipserna ligga, sudda ut u- och v-axlarna och rita dit (x,y)-koordinatsystemet igen:

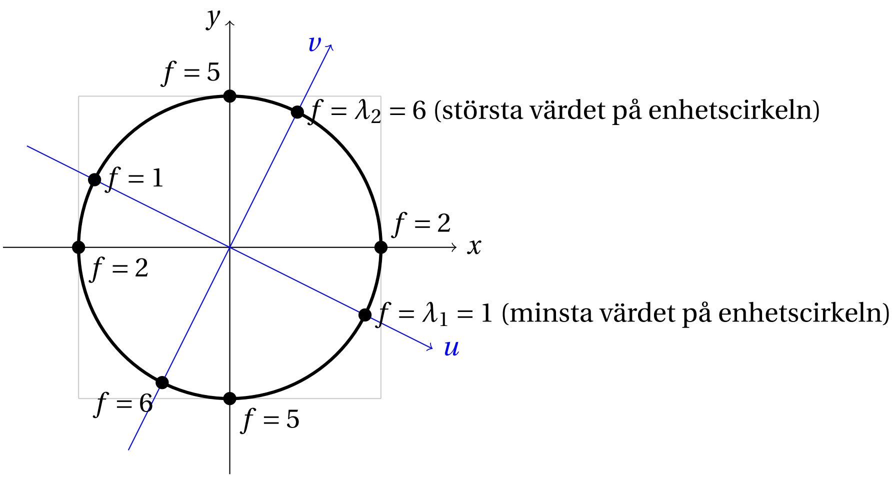
[6]Detta visas i linjär algebra-kursen genom att göra **exakt samma uträkning $(*)$ som ovan**, fast **på följande mycket smartare sätt med matrisnotation**, så att det framgår bättre varför det blir som det blir. Inför kolonnmatriserna $X = \binom{x}{y}$ och $U = \binom{u}{v}$, så att variabelbytet kan skrivas $X = PU$. Eftersom P:s kolonner är **egenvektorer** till S så är $SP = PD$, där $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ är diagonalmatrisen med egenvärdena på diagonalen, och eftersom P:s kolonner utgör en **ON-bas** så är $P^t = P^{-1}$. Detta ger

$$f = X^t S X = (PU)^t S(PU) = U^t P^t SPU = U^t P^t PDU = U^t \underbrace{P^t P}_{=I} DU = U^t DU = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2,$$

vilket skulle visas. (Och motsvarande uträkning fungerar naturligtvis även för kvadratiska former i godtyckligt antal variabler.)

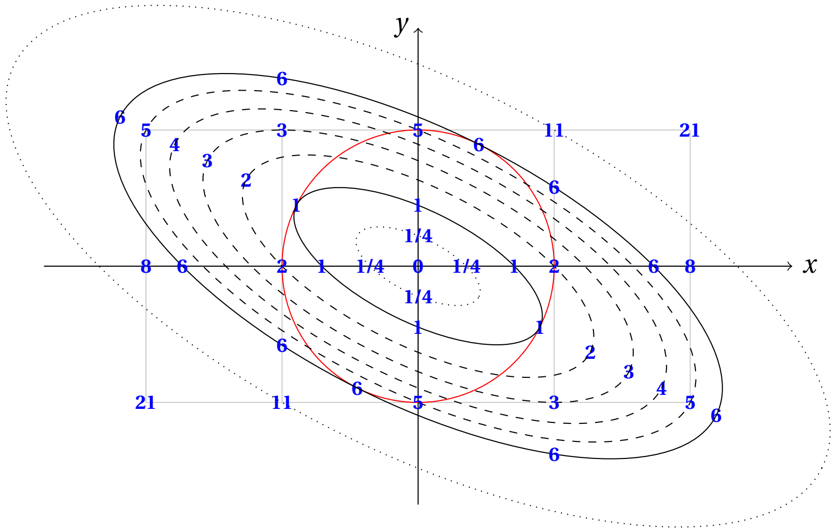


Vi ser även att $f = 2x^2 + 4xy + 5y^2 = u^2 + 6v^2$ växer långsammast i u-riktningen och snabbast i v-riktningen, vilket gör att det minsta värdet som förekommer **på enhetscirkeln** i värdetabellen är det minsta egenvärdet $\lambda_1 = 1$, i punkterna $(u, v) = (\pm 1, 0)$, och det största värdet på enhetscirkeln är det största egenvärdet $\lambda_2 = 6$, i punkterna $(u, v) = (0, \pm 1)$:



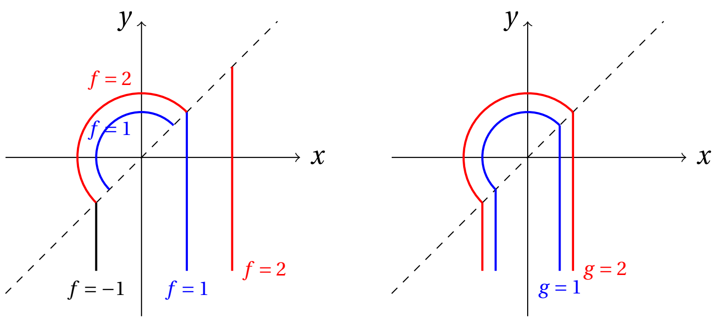
Anledningen till att man bryr sig om värdena på enhetscirkeln är att för en kvadratisk form $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ kommer dessa värden att bestämma f:s *alla* värden; i en punkt P på avstånd $k > 0$ från origo blir ju f:s värde helt enkelt k^2 gånger värdet i motsvarande punkt på enhetscirkeln (alltså den som ligger i samma riktning som P, sett från origo).

För att förstå sambandet mellan f:s nivåkurvor och f:s max/min på enhetscirkeln kan det kanske vara upplysande att rita enhetscirkeln i samma diagram som nivåkurvorna $f = \lambda_1 = 1$ (den lilla ellipsen) och $f = \lambda_2 = 6$ (den stora ellipsen). Dessa nivåkurvor tangerar cirkeln just i de punkter där f:s min/max på cirkeln inträffar, och övriga punkter på cirkeln tillhör mellanliggande nivåkurvor $f = C$ med $1 < C < 6$. Låt oss även ta med värdena från värdetabellen som vi gjorde i början, så får vi den slutliga helhetsbilden som talar om hur allt hänger ihop:



(g) Här är det rätt svårt att rita bra figurer för hand. Gör bara en liten värdetabell för att få en gnutta känsla för hur funktionen beter sig, och använd sedan dator för att rita nivåkurvor och graf – det blir en ”apsadel” med plats för två ben och en svans!
(Faktum är att f har en perfekt *rotationssymmetri* av ordning 3, vilket förklaras av att $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 = \operatorname{Re}(x + iy)^3$ och att $\left(z e^{\pm i2\pi/3}\right)^3 = z^3$.)

K4 Funktionen f är inte kontinuerlig; de två bitarna på ömse sidor om linjen $y = x$ matchar inte varandra. Däremot är g kontinuerlig. Här är några nivåkurvor:



K5 (a)–(c) Rotationssymmetri, vilket gör att nivåmängderna är cirklar med centrum i origo (eller unioner av sådana cirklar, eller bara origo, eller tomma mängden). Uttryckt i planpolära koordinater $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$

beror f bara på radien ρ, inte på vinkeln φ. Grafen i (a) är en rotationsparaboloid (”parabolantenn”), i (b) en kon, och i (c) ”ringar på vattnet”.

(d)–(e) Translationssymmetri. Nivåmängderna är (unioner av) parallella linjer $x+2y=C$. Funktionytorna $z=f(x,y)$ bildas genom att man i xz-planet (dvs. planet $y=0$) bildar kurvorna $z=x^3$ respektive $z=\sin x$ och sedan sveper dem genom rummet längs dessa linjers riktning.

(f) Spegelsymmetri med avseende på linjen $y=x$. Nivåkurvorna är (unioner av) linjer parallella med denna linje. Grafen är en V-formad ränna (två halvplan som möts längs linjen $y=x$).

(g) Spegelsymmetri med avseende på x-axeln och y-axeln. Grafen är ett ”kyrktak” bestående av två ”taknockar” längs dessa axlar som korsar varandra i origo. (Tänk såhär: ytan $z=-|x|$ är ett uppochnervänt V som löper längs x-axeln, och så är även $z=-\left|2y\right|$ fast längs y-axeln och med lite brantare lutning. För att ta maximum tänker man sig båda ytorna inritade i samma xyz-koordinatsystem och stryker de delar av ytorna som hamnar under någon annan del; man behåller alltså bara det som man skulle se om man tittade rakt uppifrån.) Nivåmängden $f=0$ utgörs av unionen av axlarna, nivåmängderna $f=C<0$ är unioner av fyra ”L-formade” bitar.

K6 (a) Nivåmängden $f=0$ är unionen av linjerna $x=0$ och $y=0$, förutom att punkten $(0,0)$ såklart inte får vara med, eftersom funktionen inte har något värde där. Nivåmängden $f=C$ för $0<|C|<1/2$ är unionen av de två räta linjerna $y=k_1x$ och $y=k_2x$ (minus origo), där k_1 och $k_2=1/k_1$ är lösningarna till andragradsekvationen $k/(1+k^2)=C \iff k^2-\frac{1}{C}k+1=0$. Nivåmängden $f=1/2$ (resp. $f=-1/2$) är den räta linjen $y=x$ (resp. $y=-x$) (minus origo). För övrigt: tomma mängden.

(b) Som i (a) fast med parablerna $y=kx^2$ ($k\neq 0$) istället för linjerna $y=kx$ ($k\neq 0$).

Ingen av funktionerna har gränsvärde i origo. (För att se detta behöver man inte reda ut precis vad alla nivåkurvorna är, utan det räcker i (a) med att konstatera att t.ex. $f(x,0)=0$ för alla $x\neq 0$ och $f(t,t)=1/2$ för alla $t\neq 0$. Likadant i (b), fast med $f(t,t^2)=1/2$ för alla $t\neq 0$ istället.)

K7 (a) Nivåytorna $x+2y+3z=C$ är en skara av parallella plan i $\mathbf{R}^3$, alla med normalvektorn $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

(b) Om $C>0$ så är nivåytan $x^2+y^2+z^2=C$ en sfär med radien $\sqrt{C}$ och mittpunkt i origo. Nivåmängden $x^2+y^2+z^2=0$ innehåller bara en enda punkt, nämligen origo. För $C<0$ är nivåmängden $x^2+y^2+z^2=C$ tom, för i $\mathbf{R}^3$ finns det ju inga punkter (x,y,z) som gör $x^2+y^2+z^2$ negativt!

(c) Nivåmängderna för $C>0$ är cylindrar längs z-axeln med elliptiskt tvärsnitt. För $C=0$ får man z-axeln själv, och för $C<0$ blir det tomma mängden.

(d) Nivåmängden $xyz = 0$ består av unionen av koordinatplanen $x = 0$, $y = 0$ och $z = 0$. För $C \neq 0$ är det kanske lättast att göra sig en bild av nivåytan $xyz = C$ ifall man betraktar den som grafen av en tvåvariabelfunktion $z = \frac{C}{xy} = g(x, y)$ (definierad för $x, y \neq 0$) och studerar denna med de angreppssätt som vi har tränat på ovan.

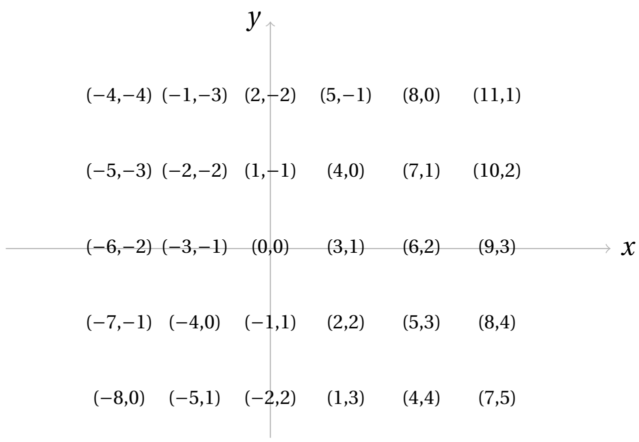
K8 (a) En (tillräckligt snäll) funktion $\mathbf{f}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ är en *parametriserad kurva* i $\mathbf{R}^3$; för varje $t \in \mathbf{R}$ är $\mathbf{f}(t)$ en punkt i $\mathbf{R}^3$, och den punkten löper längs en kurva när t varierar. I fallet $\mathbf{f}(t) = (1+t, 2-t, 3+5t)$ är denna kurva en rät linje, vilket bör vara bekant från linalgen. Om man skriver funktionen på vektorform,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 2-t \\ 3+5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ -t \\ 5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

så ser man att punkten $\mathbf{f}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ erhålls genom att från utgångspunkten $(1,2,3)$ gå t steg längs vektorn $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$. Funktionen beskriver alltså (på parameterform) den räta linje som går genom punkten $(1,2,3)$ och och har riktningsvektorn $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$.

(b) Detta är en annan kurva i $\mathbf{R}^3$ (inte en rät linje). Derivatan $\mathbf{f}'(t) = (1, 2t, 3t^2)$ ger kurvans tangentvektor i punkten $\mathbf{f}(t)$ (hastighetsvektor, ifall man tolkar t som en tidsvariabel).

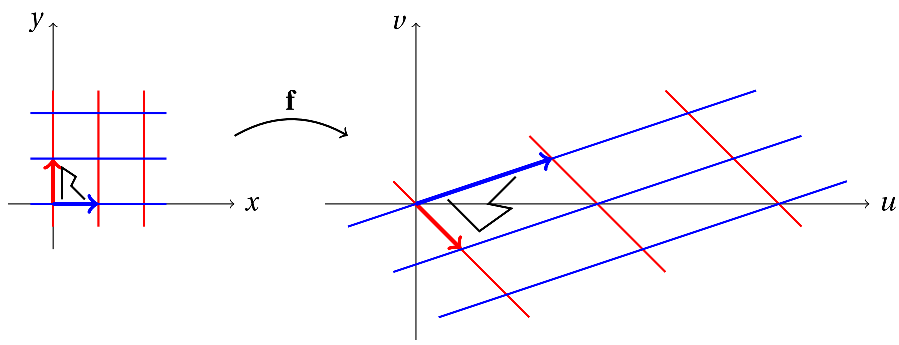
(c) I brist på andra idéer kan man ju alltid börja med en värdetabell:



Med lite eftertanke känns dock kanske denna typ av funktion igen från linalgen som en **linjär avbildning** från $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}^2$: om vi skriver $\mathbf{f}(x, y) = \big(u(x, y), v(x, y)\big)$ så är

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y \\ x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

och linjära avbildningar är ju precis sådana funktioner som ges av matrismultiplikation på detta vis. För varje punkt (x, y) ger formeln en motsvarande punkt (u, v), som är värdet för funktionen $\mathbf{f}$ i punkten (x, y); man säger att $\mathbf{f}$ avbildar punkten (x, y) på punkten (u, v) (eller, om man så vill, att $\mathbf{f}$ avbildar vektorn $\binom{x}{y}$ på vektorn $\binom{u}{v}$). Det vanligaste sättet att åskådliggöra en linjär avbildning är att ta ett kvadratiskt rutnät i xy-planet, låta funktionen avbilda varje punkt i detta rutnät in i uv-planet, och rita upp det resulterande skeva rutnätet. (Man kan även lägga in fler detaljer, som t.ex. den R-liknande krumeluren i figuren nedan.) Matrisens kolonnvektorer $\binom{u}{v} = \binom{3}{1}$ och $\binom{u}{v} = \binom{1}{-1}$ är vad man får när man sätter in standardbasvektorerna $\binom{x}{y} = \binom{1}{0}$ respektive $\binom{x}{y} = \binom{0}{1}$ i funktionen, och dessa två vektorer bestämmer avbildningen entydigt; speciellt talar de om hur rutnätet i uv-planet ska ligga. (Men så enkelt är det förstås bara för *linjära* avbildningar.)



Determinanten för avbildningsmatrisen är

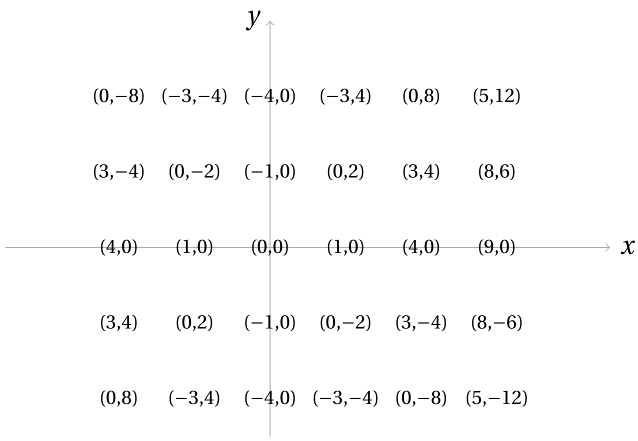
$$\det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -4,$$

vilket betyder att rutorna i uv-planet har 4 gånger större area än motsvarande rutor i xy-planet, och motsatt orientering (eftersom determinanten är negativ; notera att bilden av R:et i uv-planet blev spegelvänd).

(d) Det här är också en linjär avbildning, men den är *singulär*, dvs. determinanten för avbildningsmatrisen är noll. Rutnätet i uv-planet kollapsar till bara en linje ($u = 2v$ i detta fall), så avbildningen är inte inverterbar. (Givet utdata (u, v) kan man inte säga säkert vad indata (x, y) var.)

(e) Denna avbildning är *inte* linjär. I och med att $u = x^2 - y^2$ och $v = 2xy$ är andragradspolynom kan man ju inte skriva $\binom{u}{v} = A\binom{x}{y}$ där matrisen A enbart innehåller konstanter. Några idéer för visualisering:

- Man kan ju alltid börja med en värdetabell:



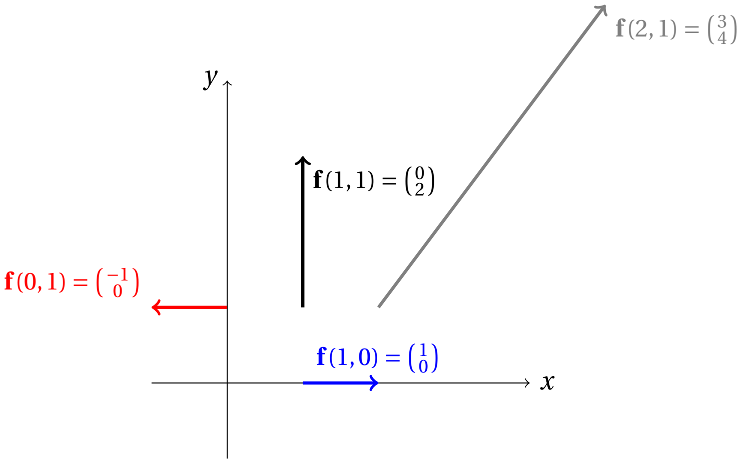
- Rita graferna $z = u(x, y)$ och $z = v(x, y)$ var för sig. Detta är dock ofta lite otillfredsställande, för om de skalärvärda funktionerna u och v har någon signifikans oberoende av varandra, varför skulle man då vilja slå ihop dem till en enda vektorvärd funktion till att börja med?
- Ta ett rutnät i xy-planet och avbilda in i uv-planet, som ovan. Då får man ett nät av krökta kurvor i uv-planet, inte räta linjer längre. (I just detta fall blir det parabler som råkar skära varandra vinkelrätt och snyggt, vilket har att göra med att avbildningen är väldigt speciellt vald; den kommer från den komplexa kvadreringsfunktionen $w = z^2$ om man låter $z = x + iy$ och $w = u + iv$.) Det kan bli lite problem med att detta krökta rutnät överlappar sig självt, eftersom punkterna (x, y) och $(-x, -y)$ avbildas på samma punkt (u, v).

  Senare i kursen kommer vi att studera avbildningars *derivata*, eller *funktionalmatris*, vilket helt enkelt är en matris där man samlar alla de partiella derivatorna. I detta fall:

  $$\mathbf{f}'(x, y) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

  Om du har lust kan du ju redan nu fundera på vad denna matris kan tänkas innehålla för information om utseendet hos rutnätet i uv-planet.
- Rita nivåkurvorna $u(x, y) = C$ i xy-planet, och även nivåkurvorna $v(x, y) = C$ i *samma* figur (men t.ex. med annan färg). Detta ger ett krökt rutnät i xy-planet som illustrerar avbildningen på ett lite ”bakvänt” sätt. På det här viset slipper man dock problemet med överlappning.
- Tolka funktionen som ett **vektorfält** i $\mathbf{R}^2$ istället för som en avbildning. Dvs. för varje punkt (x, y) beräknar man en motsvarande

vektor $\mathbf{f}(x,y) = \binom{u}{v}$, som man tänker sig ”fastsatt” med sin ”fot” i punkten (x,y). Såhär:



Det kan förstås bli väldigt plottrigt om man ritar ut många vektorer! Ett sätt att försöka kringgå detta problem är att inte rita vektorerna i naturlig storlek, utan t.ex. krympa dem med en faktor 10 (eller vad som nu kan vara lämpligt).

(f) En (tillräckligt snäll) avbildning $\mathbf{f}\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ representerar en *parametriserad yta* i $\mathbf{R}^3$; för varje punkt $(s,t) \in \mathbf{R}^2$ får man en punkt i $\mathbf{R}^3$, och när man varierar värdena på s och t flyttar sig punkten runt på ytan. Just denna funktion, $(x,y,z) = (s^2 \cos t, s^2 \sin t, s)$, är en parametrisering av den yta som man får om man ritar parabeln $x = z^2$ i xz-planet (alltså planet $y = 0$) och roterar den kring z-axeln.

K9 Du bör märka att för varje punkt (x,y) är vektorn $\nabla f(x,y)$ riktad *vinkelrätt* mot f:s nivåkurva **genom just den punkten**. (Obs! Var noga med att verkligen titta på just den nivåkurvan, och inte på någon annan nivåkurva som råkar ligga i närheten!) Att fundera på:

- Har *beloppet* av vektorn $\nabla f(x,y)$ någon tolkning?
- Verkar det vara något speciellt med punkter där $\nabla f(x,y) = (0,0)$?

Motsvarande fenomen i tre dimensioner är att vektorn $\nabla f(x,y,z)$ är vinkelrät mot den *nivåyta* för f som går genom punkten (x,y,z).

K10 Ifall du tittar här för att du inte vet hur grafen $y = \arctan x$ ser ut, så slösar du nog bort din tid med att försöka göra denna uppgift... Gå vidare till något enklare istället!

Men för den tappre som kommit till slutet av uppgiften kan vi väl bekräfta vad som antagligen redan står klart: derivatan g'_x existerar i alla punkter, men funktionen g'_x är *inte* kontinuerlig i origo (den hoppar abrupt från värdet 1 ner till 0 och upp till 1 igen när man passerar origo längs med y-axeln).

För att få WolframAlpha att rita upp g'_x, ange **d/dx y*arctan(x/y)**.

Derivatan $g'_y(x, y)$ existerar inte i punkterna $(x, 0)$ med $x \neq 0$. Men den existerar i alla andra punkter, dvs. i origo och i alla punkter som inte ligger på x-axeln.

För funktionen h existerar derivatorna h'_x och h'_y i varje punkt, och h'_y varierar överallt kontinuerligt från punkt till punkt, men h'_x gör ett abrupt hopp i origo (liksom g'_x ovan).

K11 (a_1) Rätt slutsats, men felaktig motivering. Påståendena under klamrarna stämmer ju inte, för det är inte sant att båda termerna $(h+k)^2$ och $2k^2$ är positiva för alla (h, k) – de kan ju vara noll också!

(Obs! Om man säger att Q är positivt definit "**eftersom kvadraterna är positiva**", eller "**eftersom Q har positiva kvadrater**", eller dylikt, så gör man sig skyldig till exakt samma fel.)

(a_2) Även med villkoret $(h, k) \neq (0, 0)$ är det osant att båda termerna måste vara positiva. Exempelvis är ju $(h+k)^2 = 0$ om $(h, k) = (1, -1)$.

(a_3) Nu är det som står under klamrarna sant, och av detta följer det att $Q(h, k) \geq (0, 0)$ för alla (h, k). Bra början, men detta är ju inte allt som krävs för att Q ska vara positivt definit. Felet är alltså att man inte har påpekat (och motiverat) att det återstående kravet också är uppfyllt, dvs. att $Q(h, k) = 0$ *enbart* gäller då $(h, k) = (0, 0)$.

(b_1) Påståendet om Q är sant, och korrekt motiverat. Felet är att säga att man inte kan dra någon slutsats om P, för om Q är indefinit så kan vi ju (enligt sats) visst dra en slutsats: P är en sadelpunkt för f!

(b_2) Felet är bara att $Q(0, 1)$ inte är lika med $-\frac{1}{4}$, utan 0. (Eller hur? Sätt in $h = 0$ och $k = 1$ så ser du.) Det man borde ha sagt istället är t.ex. att $Q(-\frac{1}{2}, 1) = -\frac{1}{4} < 0$. (Dvs. man sätter $k = 1$ och sedan väljer man h så att termen $(h + \frac{1}{2}k)^2$ blir noll, alltså $h = -\frac{1}{2}$.) Eller $Q(1, -2) = -1 < 0$, om man föredrar det.

(c) Räknefel i kvadratkompletteringen! Det borde ha varit $Q(h, k) = (h + 2k)^2 + 2k^2$. Om man sätter in $(h, k) = (4, -1)$ även i det *ursprungliga* uttrycket $Q(h, k) = h^2 + hk$ så får man $Q(4, -1) = 12$, vilket ju tyder på att det är något som inte stämmer med "$Q(4, -1) = -10$".

(d_1) Fel slutsats (det är inte sant att Q är indefinit), pga. osystematiskt genomförd kvadratkomplettering! Omskrivningen är visserligen sann, men den är helt oanvändbar för att dra någon slutsats ur. Med tre variabler (h, k, l) ska det *aldrig* bli fler än tre termer ifall man går systematiskt tillväga.

(d_2) Fel slutsats; det är inte sant att $Q(h, k, l) > 0$ för alla $(h, k, l) \neq (0, 0, 0)$. Även denna gång är omskrivningen sann, men osystematiskt gjord. Den visar visserligen att $Q(h, k, l) \geq 0$ för alla (h, k, l), men när är $Q = 0$

egentligen? Jo, då $h-k=0$ och $h+2l=0$ och $k+2l=0$, och detta ekvationssystem har *inte* bara lösningen $(h,k,l)=(0,0,0)$. (Lös det så får du se!)

(d_3) Det är sant att Q är positivt semidefinit (se nedan), men motiveringen för detta är felaktig. Om man bara kollar värdet i fyra punkter, hur vet man då att $Q \geq 0$ i *alla* punkter?

(d_4) Här är kvadratkompletteringen systematiskt gjord på ett korrekt sätt. Men slutsatsen är fel, för Q är inte positivt definit, utan **positivt semidefinit**. Omskrivningen visar ju att $Q \geq 0$ överallt, och ifall man (t.ex.) tar $l=1$ så kan man lösa ut h och k så att termerna $3(h-\frac{1}{3}k+\frac{4}{3}l)^2$ och $\frac{5}{3}(k+2l)^2$ blir noll, nämligen $k=-2$ och $h=-2$. Alltså är $Q(-2,-2,1)=0$, så $Q=0$ gäller inte bara i origo.

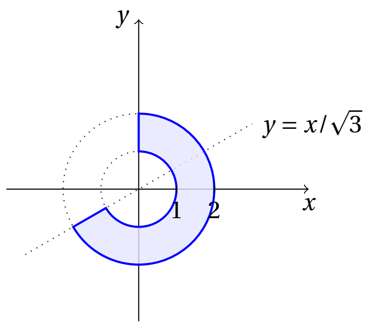
Om man vill tänka i termer av teckenmönster, så bör man säga att teckenmönstret är $(++0)$, där nollan indikerar att det finns en "osynlig" tredje kvadratterm i det systematiskt kvadratkompletterade uttrycket:

$$Q(h,k,l) = 3(h-\tfrac{1}{3}k+\tfrac{4}{3}l)^2 + \tfrac{5}{3}(k+2l)^2 + 0l^2.$$

K12 (a) $(x,y)=(-5,5\sqrt{3})$.

(b) $(\rho,\varphi)=(3\sqrt{2},7\pi/4)$ resp. $(\rho,\varphi)=(3\sqrt{2},-\pi/4)$.

(c)



(d) $\rho \geq 0$, $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$.

(e) $0 \leq \rho \leq 3$, $-\pi - \arctan\frac{1}{2} \leq \varphi \leq -\arctan\frac{1}{2}$.

(Det är den halva av cirkelskivan med mittpunkt i origo och radie 3 som ligger nedanför linjen $y=-\frac{1}{2}x$.)

Ovanstående svar fås om man tänker att "stoppvinkeln" är $\arctan(-\frac{1}{2}) = -\arctan\frac{1}{2}$ och att "startvinkeln" fås genom att backa ett halvt varv därifrån, dvs. addera $-\pi$. Ifall man föredrar positiva vinklar kan man addera 2π till båda led, så att man får $\pi - \arctan\frac{1}{2} \leq \varphi \leq 2\pi - \arctan\frac{1}{2}$ istället.

(f) $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$, $0 \leq \rho \leq 2\cos\varphi$.

(Det är en cirkel med mittpunkt $(x,y)=(1,0)$ och radie 1.)

K13 (a) $(x,y,z)=(-5/\sqrt{2},5/\sqrt{2},5\sqrt{3})$.

(b) $(r,\theta,\varphi) = (2, 3\pi/4, 5\pi/4)$.

(c) –

(d) $r \geq 0$, $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

(e) $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

(f) $0 \leq r \leq \sqrt{5}$, $\pi/3 \leq \theta \leq 2\pi/3$, $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$.