Linjär Algebra: Repetition om determinanter och kvadratiska former.

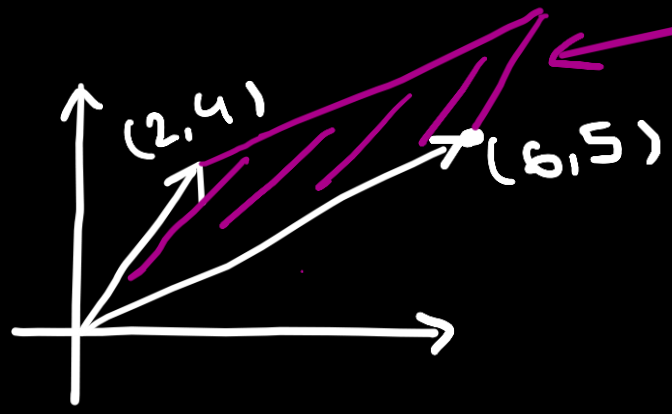
Determinanter:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 - 6\cdot 4 = -14$$

Determinanter:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -14$$

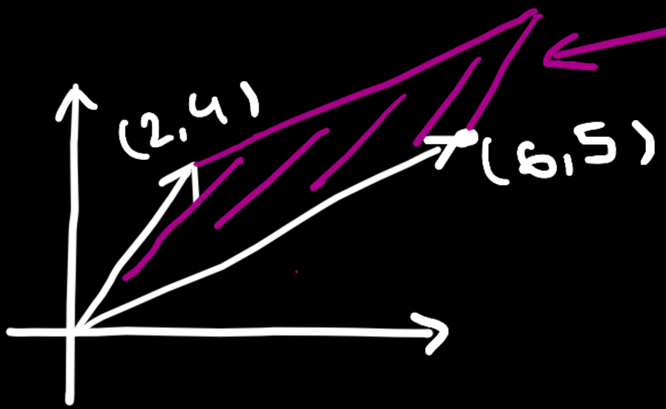
$$\text{Area} = \left| \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \right| = 14$$



Determinanter:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\text{Area} = \left| \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \right| = 14$$



Kan också beräknas m. h.a radoperationer:

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \; -2 = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} \; -1/7 = -7 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -14.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -\left(0\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = \dots = 17.$$

Kvadratiska former:

$$Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$Q(\bar{x}) = \bar{x}^t A \bar{x}$$

Teckenkaraktär:

En kvadratisk form $Q(\bar{x}) = \bar{x}^t A \bar{x}$ på $\mathbb{R}^n$ sägs vara:

- Positivt definit om $Q(\bar{x}) > 0$ för alla $\bar{x} \neq \overline{0}$,
- Positivt semidefinit om $Q(\bar{x}) \geq 0$ för alla $\bar{x}$ med likhet för något $\bar{x} \neq \overline{0}$,
- Negativt definit om $Q(\bar{x}) < 0$ för alla $\bar{x} \neq \overline{0}$,
- Negativt semidefinit om $Q(\bar{x}) \leq 0$ för alla $\bar{x}$ med likhet för något $\bar{x} \neq \overline{0}$,
- Indefinit om den antar både positiva och negativa värden.

Egenvärdesmetoden: $Q(\bar{x}) = \bar{x}^t A \bar{x}$

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ har rötter (om $n=2$) λ_1, λ_2.

Egenvärdesmetoden:

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ har rötter (om $n=2$) λ_1, λ_2.

I nya koordinater (u, v) där basvektorerna $(\bar{f}_1, \bar{f}_2)$ är en ON-bas av egenvektorer ($A\bar{f}_i = \lambda_i \bar{f}_i$) gäller $Q(x,y) = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$

(och motsvarande i högre dimensioner).

Egenvärdesmetoden:

Ovanstående ger följande sats:

Sats 0.9
Om $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ är egenvärdena till A, då gäller att Q är:

- *Positivt definit om och endast om alla $\lambda_i > 0$,*
- *Positivt semidefinit om och endast om alla $\lambda_i \geq 0$ med likhet för något i,*
- *Negativt definit om och endast om alla $\lambda_i < 0$,*
- *Negativt semidefinit om och endast om alla $\lambda_i \leq 0$ med likhet för något i,*
- *Indefinit om det finns både positiva och negativa egenvärden.*

Metoden med kvadratkomplettering:

$$Q(x,y) = x^2 + 4xy + 6y^2 = (x+2y)^2 - 4y^2 + 6y^2$$

$$= (x+2y)^2 + 2y^2$$

$Q(x,y) > 0$ om $(x,y) \neq (0,0)$

$\Rightarrow$ Q pos. definit.