Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA69
Modul: TEN1

Tentamen i Flervariabelanalys

Exempeltentamen, 2024-05-03

Tillåtna hjälpmedel är manuella skriv- och ritverktyg, inklusive linjal, passare och gradskiva utan formler.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 3 uppgifter, numrerade 1–3, värda 2p vardera. På dessa uppgifter **ska endast svar lämnas.** Skriv svaren på **ett gemensamt papper**.
- **Del B** består av 4 uppgifter, numrerade 4–7, värda 3p vardera. Till dessa **krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.**

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2p.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1 och K2, där

K1: 1 poäng på varje uppgift på del A, och

K2: 1/2/3 godkända uppgifter på del B samt 8/12/16 poäng totalt på tentan.

Notera: Rättningen kan komma att avbrytas ifall det står klart att kraven för godkänt betyg inte längre kan uppfyllas.

Del A

OBS! Endast svar ska lämnas på del A, på ett gemensamt papper.

1. (a) Skriv området givet av olikheterna $0 \leq x^2+y^2 \leq 4$, $x \geq 0$ i polära koordinater.

   (b) Bestäm lösningen $z(x, y)$ till
   $$\begin{cases} z'_x = 2x + 3x^2y, \\ z'_y = x^3 + 2y, \\ z(0,0) = 3. \end{cases}$$

2. (a) Låt $f(x, y) = x+2x^2-y^3$. Bestäm riktningsderivatan $f'_{\overline{v}}(1, -1)$ där $\overline{v} = (2, 1)$.

   (b) Ekvationen
   $$x^2 + xy + z^2 = 3$$
   definierar lokalt kring $(-1, 2, 2)$ en funktion $z = f(x, y)$. Bestäm $f'_x(-1, 2)$ och $f'_y(-1, 2)$.

Var god vänd!

3. (a) Skriv integralen $\displaystyle\iint_D (x+2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, där

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9,\ -x \leq y \leq x\},$$

i polära koordinater (integralens värde ska inte beräknas).

(b) Bestäm $a, b, \alpha(x), \beta(x)$ sådana att

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

där $D \subset \mathbb{R}^2$ är det område som ges av olikheterna $0 < x^3 < y < x^2$.

Del B

4. Bestäm alla lösningar $z \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ till $3z'_x - z'_y = 0$. (**Tips:** använd variabelbytet $u = x + 3y, v = y$).

5. Bestäm alla lokala extrempunkter till den funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ som ges av $f(x,y,z) = xy + x^2z - x^2 - y - z^2$, samt ange deras karaktär.

6. Beräkna $\displaystyle\iiint_D x\, dxdydz$, där D är det begränsade område i $\mathbb{R}^3$ som ligger mellan ytorna $2x + z = 3$ och $z = x^2 + y^2$.

7. Låt S vara sfären med radie 1 och centrum i $(1,0,0)$. Bestäm för en given punkt (a,b,c) på S en ekvation på normalform för tangentplanet till S i (a,b,c). Bestäm även mängden av alla punkter (a,b,c) på S sådana att detta tangentplan går genom punkten $(1,0,3)$, samt skriv denna mängd som en parameterkurva.

Uppgifterna på denna exempeltenta, med undantag för 1(a), är tagna (helt eller delvis) från tidigare tentor, enligt följande:

1b: 240102: 3(a)
2a: 231026: 1(b)
2b: 240102: 1(b)
3a: 231026: 4
3b: 231026: 5
4: 231026: 2(a)
5: 110426: 2
6: 200109: 4
7: 240102: 6

Svar till uppgift 1(a): $(\rho,\phi) \in [0,2] \times [-\pi/2, \pi/2]$