Lösningsskisser till tentamen i Flervariabelanalys TATA69, 2010-12-22

1. De stationära punkterna finnes som lösningar till $3x^2 + 3y^2 = 15$, $6xy + 3y^2 = 15$. Ekvationssystemet löses t ex genom subtraktion av ekvationerna, vilket ger $x(x-2y) = 0$ efter faktorisering. Falluppdelning, $x = 0$ och $x = 2y$, leder till de fyra lösningarna $(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$, $(2, 1)$ och $(-2, -1)$.

   Andraderivatorna blir $f''_{xx} = 6x$, $f''_{xy} = 6y$ och $f''_{yy} = 6x + 6y$. De kvadratiska formerna i de fyra punkterna blir:

   $Q_{(0,\sqrt{5})}(h,k) = 0 + 2\cdot 6\sqrt{5}hk + 6\sqrt{5}k^2 = 6\sqrt{5}(k+h)^2 - 6\sqrt{5}h^2$,

   $Q_{(0,-\sqrt{5})}(h,k) = 0 - 2\cdot 6\sqrt{5}hk - 6\sqrt{5}k^2 = -6\sqrt{5}(k+h)^2 + 6\sqrt{5}h^2$,

   $Q_{(2,1)}(h,k) = 12h^2 + 2\cdot 6hk + 18k^2 = 12(h+k/2)^2 + 15k^2$,

   $Q_{(-2,-1)}(h,k) = -12h^2 - 2\cdot 6hk - 18k^2 = -12(h+k/2)^2 - 15k^2$.

   Formerna är indefinit, indefinit, positivt definit respektive negativt definit. Funktionen har alltså ett lokalt min i $(2,1)$ och ett lokalt max i $(-2,-1)$.

2. Kedjeregeln ger $z'_x = -x^{-2}z'_u$ och $z'_y = y^{-1}z'_u - y^{-2}z'_v$. Detta insatt ger ekvationen $-y^{-1}z'_v = 1$, dvs $z'_v = -1/v$ i de nya variablerna. Den allmänna lösningen är $z = -\ln v + f(u)$, där f är en godtycklig envariabelfunktion. I de gamla variablerna är lösningen $z(x,y) = \ln y + f(1/x + \ln y)$. Randvilkoret ger $f(1/x) = \ln x$, dvs f är funktionen $f(t) = -\ln t$. Lösningen blir $z(x,y) = \ln y - \ln(1/x + \ln y)$.

3. Rymdpolära koordinater används självfallet då D är en åttondel av klotet med radie 2 och centrum i origo. I sådana koordinater, säger första ekvationen $0 < r < 2$, sista ekvationen $\pi/2 < \theta < \pi$, och andra och tredje tillsammans $-\pi/2 < \varphi < 0$, vilket definierar det nya området E. Då ett åttondels klot med radie 2 har volym $4\pi/3$, räcker det att beräkna integralen av termen xz. Variabelbytesformeln ger

$$\begin{aligned}\iiint_D xz\,dxdydz &= \iiint_E (r\sin\theta\cos\varphi)(r\cos\theta)r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi \\ &= \left(\int_0^2 r^4\,dr\right)\left(\int_{\pi/2}^{\pi}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta\right)\left(\int_{-\pi/2}^{0}\cos\varphi\,d\varphi\right) \\ &= \tfrac{32}{5}[\tfrac{1}{3}\sin^3\theta]_{\pi/2}^{\pi}[\sin\varphi]_{-\pi/2}^{0} = -\tfrac{32}{15}.\end{aligned}$$

   Den sökta integralen är således $4\pi/3 - 32/15$.

4. Vi använder kantvektorerna $(2,1)$ och $(1,3)$ fästade i hörnet $(0,0)$, och finner det lämpligt att göra variabelbytet $(x,y) = (0,0) + u(2,1) + v(1,3)$, dvs $x = 2u + v$, $y = u + 3v$. Hörnen $(0,0)$, $(2,1)$ och $(1,3)$ i xy-planet ses motsvara punkterna $(0,0)$, $(1,0)$ och $(0,1)$ i uv-planet. Det nya området E i uv-planet blir alltså triangeln med dessa hörn. Uttryckt med olikheter ges E av $u + v < 1$, $u > 0$,$v > 0$. Variabelbytesformeln ger integralen

$$\begin{aligned}\iint_E (2u+v)e^{(2u+v)-2(u+3v)}\left|\det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\right| dudv &= 5\int_0^1\left(\int_0^{1-v}(2u+v)du\right)e^{-5v}dv \\ &= \frac{5}{4}\int_0^1[(2u+v)^2]_{u=0}^{1-v}e^{-5v}dv = 5\int_0^1(1-v)e^{-5v}dv = (4+e^{-5})/5.\end{aligned}$$

5. Sätt $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3xy - z^2$. I en punkt (a,b,c) på ytan är en normalvektor till tangentplanet
$$\nabla f(a,b,c) = (2a + 3b, 2b + 3a, -2c).$$
Tangentplanet är parallellt med x-axeln om och endast om $2a + 3b = 0$. Tangentplanet innehåller $(17, 0, 2)$ om och endast om $(2a + 3b, 2b + 3a, -2c) \cdot \big((17, 0, 2) - (a, b, c)\big) = 0$. Vi får ekvationssystemet
$$\begin{cases} 2a + 3b = 0, \\ -(2b + 3a)b - 2c(2 - c) = 0, \\ a^2 + b^2 + 3ab - c^2 = -2. \end{cases}$$
Andra plus 2 gånger sista ger $2a^2 + 3ab - 4c = -4$. Detta och första ger $c = 1$. Första i sista ger nu $-5b^2/4 = -1$. De sökta punkterna blir $(-3/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 1)$ och $(3/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}, 1)$.

6. Vi noterar att integranden är positiv, vilket motiverar nedanstående räkningar. De fyra linjerna $x = \pm 1$ och $y = \pm 1$ delar planet i nio områden. Stycka upp integralen som en summa av de nio integralerna över dessa områden.

I området $|x| < 1$, $|y| < 1$ är $d(x,y) = 0$, och integralen blir $2 \cdot 2 \cdot e^0 = 4$.

I området $|y| < 1, x > 1$ är $d(x,y) = x - 1$, och integralen blir $\displaystyle\int_1^\infty \left(\int_{-1}^1 dy\right) e^{1-x} dx = 2\int_0^\infty e^{-t} dt = 2$.

I området $x > 1$, $y > 1$ är $d(x,y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$, och med variabelbytet $x = 1 + \rho\cos\varphi$, $y = 1 + \rho\sin\varphi$ blir integralen
$$\iint_{x,y>1} e^{-\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}} dx dy = \int_0^\infty \left(\int_0^{\pi/2} d\varphi\right) e^{-\rho}\rho d\rho = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \rho e^{-\rho} d\rho = \pi/2.$$
Symmetri ger nu att den sökta integralen är $4 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot \pi/2 = 12 + 2\pi$.