Lösningsskisser till tentamen i Flervariabelanalys TATA69, 2011-01-12

1. Linjärt byte $u = x$, $v = 2y$ med $dudv = 2\,dxdy$ och nytt område $E: 1 \le u^2 + v^2 \le 9,\ u \le 0$, följt av planpolärt byte $u = \rho\cos\varphi$, $v = \rho\sin\varphi$ med $dudv = \rho\,d\rho d\varphi$ och nytt område $F: 1 \le \rho \le 3$, $\pi/2 \le \varphi \le 3\pi/2$, ger

$$\iint_D xy^2\,dxdy = \iint_E u(\frac{v}{2})^2\frac{dudv}{2} = \frac{1}{8}\int_1^3\left(\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi\right)\rho^4\,d\rho$$
$$= \frac{1}{8}\left[\frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_{\pi/2}^{3\pi/2}\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_1^3 = \frac{1}{8}\cdot\frac{-2}{3}\cdot\frac{242}{5} = -\frac{121}{30}.$$

2. Låt $f(x, y, z) = yz + zx + xy$ och beräkna $\nabla f(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$. Tangentplanet i (a, b, c) på ytan är parallellt med planet $2x + y + z = 0$ om och endast om $(b + c, a + c, a + b) \times (2, 1, 1) = (0, 0, 0)$. Vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} c - b = 0, \\ 2a + b - c = 0, \\ b - c - 2a = 0, \\ bc + ca + ab = 1. \end{cases}$$

De båda mellersta ekvationerna är ekvivalenta med $a = 0$, enligt första ekvationen. Insättning i sista ekvationen ger $b^2 = 1$. Vi får lösningarna $(0, 1, 1)$ och $(0, -1, -1)$. De sökta tangentplanen blir $2x + y + z = 2$ och $2x + y + z = -2$.

3. Linjärt variabelbyte:

$$\begin{cases} u = x + y - z, \\ v = y - z, \\ w = y + z, \end{cases} \qquad \frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \qquad dudvdw = |2|\,dxdydz = 2\,dxdydz,$$

ger nytt område E som begränsas av de fyra planen $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ och $u - v + w = 2$. Alltså är E en tetraeder med hörn i $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(0, -2, 0)$ och $(0, 0, 2)$, så

$$\text{volym}(D) = \iiint_D dxdydz = \iiint_E \frac{dudvdw}{2} = \frac{1}{2}\cdot\text{volym}(E) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot2\cdot2}{6} = \frac{2}{3}.$$

4. Stationära punkter fås ur ekvationssystemet $f'_x = 3x^2 + 6x + 2z = 0$, $f'_y = 4y - 2z = 0$, $f'_z = 2z + 2x - 2y = 0$. De två sista ger $z = 2y$ och $x = -y$, som insatt i den första ger $3y^2 - 2y = 0$, och därmed de stationära punkterna $(0, 0, 0)$ och $(-2/3, 2/3, 4/3)$.

Andraderivatorna blir $f''_{xx} = 6x + 6$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{xz} = 2$, $f''_{yy} = 4$, $f''_{yz} = -2$ och $f''_{zz} = 2$.

I punkten $(0, 0, 0)$ får vi den kvadratiska formen

$$Q(h, k, l) = \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix}$$
$$= 6h^2 + 4k^2 + 2l^2 + 4hl - 4kl = 2(l + h - k)^2 + 2(k + h)^2 + 2h^2,$$

så $Q(h,k,l) \geq 0$ för alla (h,k,l), och $Q(h,k,l) = 0$ endast om $l+h-k=0$, $k+h=0$ och $h=0$, d.v.s. endast om $(h,k,l) = (0,0,0)$. Q är alltså positivt definit, och $(0,0,0)$ är således en lokal minimipunkt för f.

I punkten $(-2/3, 2/3, 4/3)$ är $f''_{xx} = 2$, och vi får

$$Q(h,k,l) = 2h^2 + 4k^2 + 2l^2 + 4hl - 4kl = 2(l+h-k)^2 + 2(k+h)^2 - 2h^2,$$

som är indefinit eftersom t.ex. $Q(0,0,1) = 2 > 0$ och $Q(1,-1,-2) = -2 < 0$, så punkten $(-2/3, 2/3, 4/3)$ är ingen lokal extrempunkt för f.

Svar: $(0,0,0)$ är en lokal minimipunkt. Lokala maximipunkter saknas.

5. Kedjeregeln ger först $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = z'_u + yz'_v$ och $z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = xz'_v$, och sedan $z''_{xy} = (z'_y)'_x = (xz'_v)'_x = z'_v + x(z'_v)'_x = z'_v + x(z''_{uv} + yz''_{vv})$ och $z''_{yy} = (z'_y)'_y = (xz'_v)'_y = x(z'_v)'_y = x^2 z''_{vv}$. Differentialekvationen blir $x^2 z''_{uv} = 1$, d.v.s. $z''_{uv} = 1/x^2 = 1/u^2$ i området $x > y > 0$. Integrering ger $z'_u = v/u^2 + g(u)$ och $z = -v/u + G(u) + H(v) = -y + G(x) + H(xy)$, där G och H är $\mathcal{C}^2$-funktioner av en variabel. Villkoren ger nu $1 + x = z(x,0) = G(x) + H(0)$ och $e^x = z(x,x) = -x + G(x) + H(x^2)$ för $x \geq 0$, alltså $G(t) = t - 1 - H(0)$ och $H(t) = H(0) - 1 + e^{\sqrt{t}}$, och därmed $z(x,y) = x - y + e^{\sqrt{xy}}$.

   Svar: $z(x,y) = x - y + e^{\sqrt{xy}}$.

6. Integralen är generaliserad, men integranden är positiv, så upprepad integration och variabelbyte är tillåtet. Rymdpolära koordinater $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ med $dxdydz = r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi$ och nytt område E, som bestäms av $\cos^2\theta \leq \sin^2\theta$, alltså av $r \geq 0$, $\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$ och $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, ger

$$\begin{aligned}\iiint_D \frac{dxdydz}{1+(x^2+y^2)^3} &= \iiint_E \frac{r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi}{1+r^6\sin^6\theta} \\ &= 2\pi\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\left(\int_0^\infty \frac{3r^2\sin^3\theta\, dr}{1+(r^3\sin^3\theta)^2}\right)\frac{d\theta}{3\sin^2\theta} \\ = \frac{2\pi}{3}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} &\left[\arctan(r^3\sin^3\theta)\right]_{r=0}^{r\to\infty}\frac{d\theta}{\sin^2\theta} = \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left[-\cot\theta\right]_{\pi/4}^{3\pi/4} = \frac{2\pi^2}{3}.\end{aligned}$$