Lösningsskisser till tentamen i Flervariabelanalys TATA69, 2011-04-26

1. Ett lämpligt variabelbyte är $u = x+2y$, $v = 2x-y$. Funktionaldeterminanten blir $d(u,v)/d(x,y) = -5$ och integralen blir $\iint_E \frac{1}{v+1}\frac{1}{5}dudv$ efter variabelbytet, där det nya området E ges av $1 \le u \le v \le 2$. Triangeln E har tvärsnitt $1 \le u \le v$ parallella med u-axeln för $1 \le v \le 2$. Itererad integration ger nu

$$\frac{1}{5}\int_1^2 \left(\int_1^v \frac{1}{v+1}du\right)dv = \frac{1}{5}\int_1^2 \frac{v-1}{v+1}dv$$
$$= \frac{1}{5}\int_1^2 \left(1-\frac{2}{v+1}\right)dv = \frac{1}{5}[v-2\ln(v+1)]_1^2 = \tfrac{1}{5} - \tfrac{2}{5}\ln(3/2).$$

2. De tre partiella derivatorna är $f'_x = y+2xz-2x$, $f'_y = x-1$ och $f'_z = x^2-2z$. Ekvationerna $f'_y = 0$, $f'_z = 0$ och $f'_x = 0$ ger i tur och ordning $x = 1$, $z = 1/2$ och $y = 1$. I denna stationära punkt $(1,1,1/2)$ har vi andraderivator $f''_{xx} = 2z-2 = -1$, $f''_{yy} = 0$, $f''_{zz} = -2$, $f''_{xy} = 1$, $f''_{xz} = 2x = 2$ och $f''_{yz} = 0$. Kvadratkomplettering av den kvadratiska formen ger

$$Q = -h^2-2l^2+2hk+4hl = -(h-k-2l)^2+k^2+2l^2+4kl = -(h-k-2l)^2+(k+2l)^2-2l^2.$$

Tecknen $-+-$ visar att Q är indefinit och den stationära punkten är således ingen maximi- eller minimipunkt. Inga sådana punkter finns alltså.

3. Vi gör först det linjära variabelbytet $u = x$, $v = y$, $w = 2z$. Funktionaldeterminanten blir $d(u,v,w)/d(x,y,z) = 2$ och integralen blir

$$\iiint_E u\frac{w}{2}\frac{1}{2}dudvdw$$

efter variabelbytet, där det nya området E ges av $u^2+v^2+w^2 \le 2, u \ge 0, w \ge 0$. Sedan gör vi rymdpolärt variabelbyte $u = r\sin\theta\cos\phi$, $v = r\sin\theta\sin\phi$, $w = r\cos\theta$, där vi från ekvationerna för E utläser gränserna $0 \le r \le \sqrt{2}$, $0 \le \theta \le \pi/2$, $-\pi/2 \le \phi \le \pi/2$. Variabelbyte ger integralen

$$\frac{1}{4}\iiint (r\sin\theta\cos\phi)(r\cos\theta)(r^2\sin\theta drd\theta d\phi)$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{2}} r^4dr \int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos\theta d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\phi d\phi = \ldots = \frac{2\sqrt{2}}{15}.$$

4. Kedjeregeln ger $z'_x = -x^{-2}z'_u + 0$ och $z'_y = -y^{-2}z'_u + z'_v$. I nya koordinater blir ekvationen därför $-z'_u - (-z'_u + y^2z'_v) = y^3/x$, det vill säga $z'_v = -y/x = 1-uv$, eftersom $uv = y/x+1$. Integration med avseende på v ger allmän lösning

$$z = v - \tfrac{1}{2}uv^2 + f(u) = y - \tfrac{1}{2}(1/x+1/y)y^2 + f(1/x+1/y),$$

där $f(t)$ är en godtycklig deriverbar funktion. Villkoret $z(x,x) = 1/x$ bestämmer f. Vi får $1/x = z(x,x) = x - x + f(2/x)$, och därmed $f(t) = t/2$. Den sökta funktionen blir

$$z(x,y) = y + \tfrac{1}{2}(1-y^2)(1/x+1/y).$$

5. Genom att undersöka gränsvärden längs kurvor in mot origo, tar vi först fram en kandidat till tvåvariabelgränsvärdet. Först gränsvärdet längs x-axeln. Då $y = 0$ får vi

$$\frac{x^3 + 0}{(x^2 + 0)^a} = x^{3-2a} \to \begin{cases} 0, & a < 3/2, \\ 1, & a = 3/2, \\ \infty, & a > 3/2, \end{cases} \qquad x \to 0^+.$$

Tvåvariabelgränsvärdet existerar sålunda inte (ändligt) om $a > 3/2$. Betrakta sedan gränsvärdet längs linjen $y = x$ i fallet $a = 3/2$. Vi får här $(x^3 + x^3)/(x^2 + x^2)^{3/2} = 1/\sqrt{2} \to 1/\sqrt{2}$ då $x \to 0^+$. Då $1 \neq 1/\sqrt{2}$ existerar inte heller tvåvariabelgränsvärdet då $a = 3/2$. Antag nu $a < 3/2$, där enligt ovan den enda möjliga kandidaten till tvåvariabelgränsvädet är 0. Med polära koordinater har vi uppskattningen

$$\left| \frac{r^3 \cos^3\theta + r^3 \sin^3\theta}{r^{2a}} - 0 \right| = r^{3-2a} |\cos^3\theta + \sin^3\theta| \leq 2r^{3-2a},$$

för alla θ. Då $\lim_{r\to 0^+} r^{3-2a} = 0$ när $a < 3/2$, drar vi av instängningsregeln slutsatsen att tvåvariabelgränsvärdet existerar och är lika med kandidaten 0. Alltså, gränsvärdet existerar om och endast om $a < 3/2$ och är då 0.

6. Beteckna med f, g vänsterleden i ekvationerna, så att dessa är $f = 2$, $g = 1$. Vi beräknar först gradienterna $\nabla f = (3 + z, 1 + e^y, x + 2z + e^z) = (3, 2, 1)$ och $\nabla g = (5 + y, x + z + e^y, y + 2\cos z) = (5, 1, 2)$. Dessa är är normalvektorer till ytorna $f = 2$ och $g = 1$. En tangentvektor till skärningskurvan är

$$\nabla f \times \nabla g = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Då denna vektors z-komponent är $-7 \neq 0$, följer av implicita funktionssatsen att $f = 2$, $g = 1$ definierar $\mathcal{C}^1$-funktioner $x(z)$ och $y(z)$ kring $(0, 0, 0)$. Derivatorna uläses till $x'(0) = 3/(-7) = -3/7$ och $y'(0) = (-1)/(-7) = 1/7$.