Lösningsskisser till tentamen i TATA69 Flervariabelanalys 2011-05-31

1. Kedjeregeln ger $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = 2x\,e^{y^2} z'_u$ och $z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = 2x^2 y\,e^{y^2} z'_u + z'_v$, och insättning i differentialekvationen ger $-z'_v = u$, d.v.s. $z'_v = -u$, som integrerad ger $z = -uv + g(u) = -x^2 y\,e^{y^2} + g(x^2 e^{y^2})$, där g är en $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel. Bivillkoret ger nu $e^{x^2} = z(x,0) = g(x^2)$ då $x > 0$, så $g(t) = e^t$ för $t > 0$, och därmed får vi till sist $z(x,y) = -x^2 y\,e^{y^2} + \exp(x^2 e^{y^2})$ då $x > 0$. Svar: $z(x,y) = -x^2 y\,e^{y^2} + \exp(x^2 e^{y^2})$.

2. Sätt $F(x,y,z) = x^4 + y^2 - z^2$; då är den givna ytan nivåytan $F(x,y,z) = 1$. Tangentplanet till denna yta i en punkt (a,b,c) på ytan är parallellt med planet $2x + y + z = 1$ precis då $\nabla F(a,b,c) \parallel (2,1,1)$ och $F(a,b,c) = 1$, d.v.s. precis då $(4a^3, 2b, -2c) \parallel (2,1,1)$ och $a^4 + b^2 - c^2 = 1$. Det första villkoret ger $a^3 = b = -c$, som sedan insatt i det andra ger $a^4 = 1$, d.v.s. $a = \pm 1$, och därmed tangeringspunkterna $(1,1,-1)$ och $(-1,-1,1)$, med de respektive tangentplanen $2x + y + z = \pm 2$.

   Svar: Planen är $2x + y + z = 2$ och $2x + y + z = -2$.

3. D kan skrivas $(x+1)^2 + 2y^2 \le 4$. Linjärt byte $u = x + 1$, $v = \sqrt{2}\,y$ med ny mängd E : $u^2 + v^2 \le 4$, $d(u,v)/d(x,y) = \sqrt{2}$ och därmed $dxdy = dudv/\sqrt{2}$, följt av planpolärt byte $u = \rho\cos\varphi$, $v = \rho\sin\varphi$ med ny mängd F : $0 \le \rho \le 2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ och $dudv = \rho\,d\rho d\varphi$, ger

$$\iint_D \left((x-1)^2 + 2y^2\right) dxdy = \iint_E \left((u-2)^2 + v^2\right) \frac{dudv}{\sqrt{2}} = \iint_F (\rho^2 - 4\rho\cos\varphi + 4) \frac{\rho\,d\rho d\varphi}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} (\rho^2 - 4\rho\cos\varphi + 4)\,d\varphi \right) \rho\,d\rho = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \left[\frac{(\rho^2+4)^2}{4} \right]_0^2 = 12\sqrt{2}\,\pi.$$

4. Stationära punkter fås ur ekvationssystemet $f'_x = 2x - 2y = 0$, $f'_y = 4y - 2x + 2z = 0$, $f'_z = 2y + 2z^2 = 0$. De två första ger $x = y = -z$, som insatt i den tredje ger $2z^2 - 2z = 0$, d.v.s. $z = 0$ eller $z = 1$, och därmed är de stationära punkterna $(0,0,0)$ och $(-1,-1,1)$.

   Andraderivatorna blir $f''_{xx} = 2$, $f''_{xy} = -2$, $f''_{xz} = 0$, $f''_{yy} = 4$, $f''_{yz} = 2$ och $f''_{zz} = 4z$.

   I punkten $(0,0,0)$ blir $f''_{zz} = 0$, och där blir den kvadratiska formen

$$Q(h,k,l) = \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix}$$
$$= 2h^2 + 4k^2 - 4hk + 4kl = 2\left((h-k)^2 + (k+l)^2 - l^2\right),$$

   som är indefinit eftersom t.ex. $Q(1,0,0) = 2 > 0$ och $Q(1,1,-1) = -2 < 0$, och den stationära punkten $(0,0,0)$ är således ingen lokal extrempunkt.

   I punkten $(-1,-1,1)$ blir $f''_{zz} = 4$, och där blir den kvadratiska formen

$$Q(h,k,l) = 2h^2 + 4k^2 - 4hk + 4kl + 4l^2 = 2\left((h-k)^2 + (k+l)^2 + l^2\right),$$

   så $Q(h,k,l) \ge 0$ för alla (h,k,l), och $Q(h,k,l) = 0$ endast om $h - k = 0$, $k + l = 0$ och $l = 0$, d.v.s. endast om $(h,k,l) = (0,0,0)$. Q är därmed positivt definit, och den stationära punkten $(-1,-1,1)$ är således en lokal minimipunkt.

   Svar: $(-1,-1,1)$ är en lokal minimipunkt. Lokala maximipunkter saknas.

5. Linjärt byte $u = x + y$, $v = y + z$, $w = x - 3z$ ger ny mängd $E: 0 \leq u \leq v \leq w \leq 1$, $d(u,v,w)/d(x,y,z) = -2$ och därmed $dxdydz = dudvdw/2$. Med exempelvis skivor $E_w = \{(u,v) : 0 \leq u \leq v \leq w\}$ för $0 \leq w \leq 1$ får vi, eftersom $x - y = 2u - 3v - w$, att

$$I = \iiint_D (x-y)\,dxdydz = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\iint_{E_w} (2u - 3v - w)\,dudv \right) dw = \frac{1}{2}\int_0^1 I(w)\,dw,$$

där

$$I(w) = \int_0^w \left(\int_0^v (2u - 3v - w)\,du \right) dv = \int_0^w (-2v^2 - vw)\,dv = -\frac{7w^3}{6},$$

varför slutligen

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(-\frac{7w^3}{6} \right) dw = -\frac{7}{48}.$$

6. (a) Se kursboken, Definition 2 i kapitel 2.2 (fallet $n = 2$).

   (b) Se kursboken, Sats 2 i kapitel 2.2 (fallet $n = 2$).

   (c) Eftersom $(f(h,0) - f(0,0))/h = 2 + h \to 2$ då $h \to 0$ och $(f(0,k) - f(0,0))/k = 1 \to 1$ då $k \to 0$ ser vi att $f'_x(0,0) = 2$ och $f'_y(0,0) = 1$. *Om* f är differentierbar i origo gäller alltså att $R(h,k) = (f(h,k) - f(0,0) - 2h - k)/(h^2 + k^2)^{1/2} \to 0$ då $(h,k) \to (0,0)$. Men

$$R(h,k) = \frac{f(h,k) - f(0,0) - 2h - k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{h^4 - 4hk^2 - h^2 k}{(h^2 + 2k^2)\sqrt{h^2 + k^2}},$$

   så t.ex. $R(h,h) = (h^2 - 5h)/(3\sqrt{2}\,|h|) \to \mp 5/(3\sqrt{2})$ då $h \to 0^{\pm}$, och därmed existerar inte ens $\lim_{(h,k)\to(0,0)} R(h,k)$. Svar: f är *inte* differentierbar i origo.