Lösningsskisser till tentamen i Flervariabelanalys TATA69, 2011-08-18

1. Vi integrerar lämpligtvis med avseende på y innerst. Projektionen av D på x-axeln är $0 \leq x \leq 1$ och tvärsnittet ovanför $x \in [0,1]$ är $0 \leq y \leq x^2$. Integralen blir

$$\int_0^1 \left(\int_0^{x^2} e^{-y/x} dy \right) dx = \int_0^1 [-xe^{-y/x}]_{y=0}^{x^2} dx = \int_0^1 (x - xe^{-x}) dx = \ldots = \frac{2}{e} - \frac{1}{2}.$$

2. De tre olikheterna som definierar D blir i rymdpolära koordinater $0 \leq r \leq \sqrt{3}$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ respektive $-3\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4$. Rymdpolärt variabelbyte i integralen ger

$$\int_{-3\pi/4}^{\pi/4} \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\sqrt{3}} (r \sin\theta \cos\varphi)(r\cos\theta) r^2 \sin\theta dr \right) d\theta \right) d\varphi$$
$$= [\tfrac{1}{5}r^5]_0^{\sqrt{3}} \, [\tfrac{1}{3}\sin^3\theta]_0^{\pi/2} \, [\sin\varphi]_{-3\pi/4}^{\pi/4} = \ldots = 3\sqrt{6}/5.$$

3. Vi beräknar i punkten $(3,2)$ gradienten

$$\nabla T = \begin{bmatrix} 10x/(3+x^2+2y^2)^2 \\ 20y/(3+x^2+2y^2)^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

mätt i °C/m. Björnen bör alltså lufsa i riktningen som pekas ut av vektorn $(3,4)$. Temperaturökningen, mätt i °C/m, blir då $|\nabla T| = \sqrt{(3/40)^2 + (1/10)^2} = 1/8$. Mätt i °C/s blir den (1/8°C/m)(2m/s) = 1/4°C/s.

4. Ekvationerna för de stationära punkterna blir $f'_x = 6x/(1+x^2+y^2) + 2y = 0$ och $f'_y = 6y/(1+x^2+y^2) + 2x = 0$. Vi delar upp i fall. (1) $x = 0$, ger från första ekvationen $y = 0$. (2) $y = 0$, ger från andra ekvationen $x = 0$. (3) $x \neq 0$ och $y \neq 0$. Dela första ekvationen med $2x$ och andra med $2y$. Detta ger $y/x = -3/(1+x^2+y^2) = x/y$. Alltså $(x/y)^2 = 1$, så $x = y$ eller $x = -y$. Om $x = y$ så är $3/(1+2x^2) = -1$, vilket saknar lösning. Om $x = -y$ så är $3/(1+2x^2) = 1$, vilket ger lösningar $(1,-1)$ och $(-1,1)$. Sålunda finns tre stationära punkter $(0,0)$, $(1,-1)$ och $(-1,1)$.

   Andraderivatorna är $f'_{xx} = 6(1-x^2+y^2)/(1+x^2+y^2)^2$, $f'_{xy} = -12xy/(1+x^2+y^2)^2 + 2$ och $f'_{xx} = 6(1+x^2-y^2)/(1+x^2+y^2)^2$. Kvadratisk form i $(0,0)$:

$$Q = 6h^2 + 2\cdot 2hk + 6k^2 = 6(h+k/3)^2 + (16/3)k^2.$$

   Då denna är positivt definit är $(0,0)$ ett lokalt minimum. Kvadratisk form i $(1,-1)$:

$$Q = (6/9)h^2 + 2\cdot(10/3)hk + (6/9)k^2 = (2/3)(h+5k)^2 - (48/3)k^2.$$

   Då denna är indefinit är $(1,-1)$ en sadelpunkt. Den kvadratiska formen i $(-1,1)$ ses vara densamma som i $(1,-1)$ och därför är även $(-1,1)$ en sadelpunkt. Alltså har f endast en lokal extrempunkt: ett lokalt minimum i origo.

5. Vi visar först att avbildningen har en global invers. Subtraktion av ekvationerna ger $u - v = \sin(4y) + 5y$. Funktionen $f(y) = \sin(4y) + 5y$ har $f'(y) = 4\cos(4y) + 5 \geq 1$. Alltså är f strängt växande med $\lim\limits_{y\to\pm\infty} f(y) = \pm\infty$, så f är en inverterbar envariabelfunktion. Givet godtyckligt (u, v) beräknar vi entydigt $y = f^{-1}(u-v)$ och sedan $x = (v + 5y)/3$. Detta visar avbildningens globala inverterbarhet. Speciellt ser vi genom prövning att $(u, v) = (3, 3)$ motsvarar $(x, y) = (1, 0)$.

   Beräkna nu funktionalmatrisen

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} u'_x & u'_y \\ v_x & v'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4\cos(4y) \\ 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

   Funktionaldeterminanten är $-15 - 12\cos(4y) \leq -3 < 0$ för alla (x, y). Inversa funktionssatsen visar nu att avbildningens invers är $\mathcal{C}^1$ kring alla (u, v). Vidare följer att inversens funktionalmatris i $(u, v) = (3, 3)$, motsvarande $(x, y) = (1, 0)$, är

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{bmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-27}\begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix},$$

   från vilken vi avläser $x'_v = (-4)/(-27) = 4/27$.

6. Kedjeregeln ger

$$g'(t) = f'_x(t, 2t) + 2f'_y(t, 2t)$$

   och

$$h'(t) = f'_x(g(t), \sin(3g(t)))g'(t) + f'_y(g(t), \sin(3g(t)))3g'(t)\cos(3g(t)).$$

   Insatta värden ger $g'(0) = 3 + 2(-2) = -1$ och $h'(0) = 3(-1) + (-2)3(-1)1 = 3$. Ytterligare kedje- och produktregler ger

$$\begin{aligned} h''(t) = \Big(f''_{xx}(g, \sin 3g)g' + f''_{xy}(g, \sin 3g)3g'\cos(3g)\Big)g' + f'_x(g, \sin 3g)g'' \\ + \Big(f''_{yx}(g, \sin 3g)g' + f''_{yy}(g, \sin 3g)3g'\cos(3g)\Big)3g'\cos(3g) \\ + f'_y(g, \sin 3g)3\Big(g''\cos(3g) - 3(g')^2\sin(3g)\Big). \end{aligned}$$

   Vi beräknar

$$g''(t) = f''_{xx}(t, 2t) + 4f''_{xy}(t, 2t) + 4f''_{yy}(t, 2t) = -1 + 4\cdot 5 + 4\cdot 4 = 35$$

   och

$$\begin{aligned} h''(0) = \Big(-1(-1) + 5\cdot 3(-1)1\Big)(-1) + 3\cdot 35 + \Big(5(-1) + 4\cdot 3(-1)1\Big)3(-1)1 + (-2)3(35\cdot 1 - 0) \\ = 14 + 105 + 51 - 210 = -40. \end{aligned}$$