

Tentamen i Flervariabelanalys TATA69

2011-08-18 kl 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).

8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.

Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. Beräkna

$$\iint_D e^{-y/x} dx dy,$$

där D begränsas av x -axeln, linjen $x = 1$ och kurvan $x = \sqrt{y}$.

2. Beräkna

$$\iiint_D xz dx dy dz,$$

där D ges av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$, $z \geq 0$ and $y \leq x$.

3. En brunbjörn vaknar i ett ide i Orsa. Lufttemperaturen T [$^{\circ}\text{C}$] beror på x och y [m] enligt

$$T(x, y) = 10 - \frac{5}{3 + x^2 + 2y^2}.$$

Björnen befinner sig i $(x, y) = (3, 2)$ och lufsar med hastigheten 2 m/s. I vilken riktning bör den lufsa för snabbast möjliga uppvärmning? Beräkna dessutom, dels i $^{\circ}\text{C}/\text{m}$ och dels i $^{\circ}\text{C}/\text{s}$, hur snabbt temperaturen då stiger.

4. Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter till

$$f(x, y) = 3 \ln(1 + x^2 + y^2) + 2xy.$$

5. Visa att avbildningen $\begin{cases} u = 3x + \sin 4y \\ v = 3x - 5y \end{cases}$ har en global \mathcal{C}^1 -invers $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$.
Beräkna sedan x'_v i punkten $(u, v) = (3, 3)$.

6. Antag att $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)$. Antag vidare att

$$f(0, 0) = 0, f'_x(0, 0) = 3, f'_y(0, 0) = -2,$$

$$f''_{xx}(0, 0) = -1, f''_{xy}(0, 0) = 5 \text{ och } f''_{yy}(0, 0) = 4.$$

Sätt $g(t) = f(t, 2t)$ och $h(t) = f(g(t), \sin(3g(t)))$. Beräkna $g'(0)$, $h'(0)$ och $h''(0)$.