Lösningsskisser till tentamen i Flervariabelanalys TATA69, 2011-10-17

1. Vi löser ekvationssystemet $f'_x = 2x-4y+2z-10 = 0$, $f'_y = 10y-4x+2z+10 = 0$, $f'_z = 16z+2x+2y-32 = 0$ som i linjär algebra. Lösningen blir $(x, y, z) = (1, -1, 2)$. Beräkning av andraderivatorna ger den kvadratiska formen Q där

$$Q/2 = h^2 + 5k^2 + 8l^2 - 4hk + 2hl + 2kl = (h - 2k + l)^2 + (k + 3l)^2 - 2l^2.$$

Teckenkaraktären $++-$ visar att Q är indefinit, så f har en sadelpunkt i $(1, -1, 2)$, och därmed inga lokala extempunkter.

2. Vi väljer att integrera med avseende på x först, då y-integration först skulle kräva uppdelning av integralen. Tvärsnitten blir $1 - y/2 \le x \le e^y$ och projektionen på y-axeln $0 \le y \le 1$. Detta ger

$$\iint_D \frac{dxdy}{x} = \int_0^1 \left(\int_{1-y/2}^{e^y} \frac{dx}{x} \right) dy = \int_0^1 \big(y - \ln(1 - y/2)\big) dy = \frac{1}{2} - \int_{1/2}^1 \ln(t) 2dt$$
$$= \frac{1}{2} - 2[t \ln t - t]_{1/2}^1 = \frac{3}{2} - \ln 2.$$

3. Beteckna den sökta punkten med (a, b). Vi har $a^2 + 4b^2 = 4$, då (a, b) ligger på ellipsen $f = 4$, där $f(x, y) := x^2 + 4y^2$. En normalvektor till ellipsen i denna punkt är $\nabla f(a, b) = (2a, 8b)$. Att normallinjen i (a, b) går genom $(-1, 0)$ innebär att det finns $t \in \mathbf{R}$ så att

$$(a, b) + t(2a, 8b) = (-1, 0),$$

det vill säga $(-1 - a, -b)$ är parallell med $(2a, 8b)$. Ekvivalent är kravet att

$$\det \begin{bmatrix} -1-a & 2a \\ -b & 8b \end{bmatrix} = -8b - 6ab = -2b(4 + 3a) = 0.$$

Fall 1: $b = 0$, som ger $a^2 = 4$ och punkterna $(2, 0)$ och $(-2, 0)$. Fall 2: $a = -4/3$, som ger $b^2 = 1 - (-4/3)^2/4 = 5/9$ och punkterna $(-4/3, \sqrt{5}/3)$ och $(-4/3, -\sqrt{5}/3)$.

4. Uttrycket för massan är $\iiint_D \rho(x, y, z) dxdydz$. Vi beräknar denna med upprepad integration och endimensionella tvärsnitt $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 2 - x^2 - y^2$ i z-led. Projektionen E på xy-planet bestäms av $r \le 2 - r^2$, det vill säga $r \le 1$, där $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. E är alltså enhetsskivan, och massan [kg] blir

$$\iint_E \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2-x^2-y^2} \frac{dz}{1 + x^2 + y^2} \right) dxdy = \iint_E \frac{2 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}}{1 + x^2 + y^2} dxdy$$
$$= 2\pi \int_0^1 \frac{2 - r^2 - r}{1 + r^2} r\, dr = 2\pi \int_0^1 \left(\frac{1 + 3r}{1 + r^2} - 1 - r \right) dr = \pi \Big(\frac{\pi}{2} + 3 \ln 2 - 3 \Big).$$

5. För polärt variabelbyte $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, ger kedjeregeln $f'_r = \cos \varphi f'_x + \sin \varphi f'_y$, $f'_\varphi = -r \sin \varphi f'_x + r \cos \varphi f'_y$. Detta ger i $(r, \varphi) = (2, \pi/2)$

$$f''_{r\varphi} = (\cos \varphi f'_x + \sin \varphi f'_y)'_\varphi = -\sin \varphi f'_x + \cos \varphi(-r \sin \varphi f''_{xx} + r \cos \varphi f''_{xy})$$
$$+ \cos \varphi f'_y + \sin \varphi(-r \sin \varphi f''_{yx} + r \cos \varphi f''_{yy})$$
$$= -\sin \varphi f'_x + \cos \varphi f'_y + \tfrac{1}{2} r \sin(2\varphi)(f''_{yy} - f''_{xx}) + r \cos(2\varphi) f''_{xy} = -5 + 0 + 0 - 14 = -19.$$

6. Vi beräknar först att f har en stationär punkt med kvadratisk form $Q = -2(x-y)^2$ i origo. Denna är negativt semi-definit, och ingen slutsats om lokalt extremvärde kan dras av detta. Den kvadratiska formens utseende leder oss till att studera f längs linjen $x = y$. Med envariabel-Maclaurinutveckling har vi

$$f(x,x) = 8\cos x + \frac{1}{1-4x^2} = 9 + (16 + 1/3)x^4 + \mathcal{O}(x^6) > 9$$

för alla små $x \neq 0$. Å andra sidan har vi längs linjen $y = -x$ att

$$f(x,-x) = 8\cos x + 1 < 9$$

för alla små $x \neq 0$. Alltså har f inget lokalt extremvärde i origo.