Lösningsskisser till tentamen i TATA69 Flervariabelanalys 2012-01-12

1. Kedjeregeln ger $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = z'_u/y$ och $z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = -xz'_u/y^2 + z'_v$, och insättning i differentialekvationen ger $yz'_v = 1 + x$ för $x > 0$, $y > 0$, d.v.s. $z'_v = 1/v + u$ för $u > 0$, $v > 0$, som integrerad ger $z = \ln v + uv + g(u) = \ln y + x + g(x/y)$, där g är en $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel. Bivillkoret ger nu $1 = z(1, y) = \ln y + 1 + g(1/y)$ då $y > 0$, så $g(t) = -\ln(1/t) = \ln t$ för $t > 0$, och därmed får vi till sist $z(x, y) = \ln y + x + \ln(x/y) = x + \ln x$ då $x > 0$ och $y > 0$. Svar: $z(x, y) = x + \ln x$.

2. Rymdpolärt byte $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$, ger $dxdydz = r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi$ och nya gränser $E : 0 \le r \le \sqrt{3}$, $\pi/2 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le \pi$, varför

$$\begin{aligned}\iiint_D (x - z)\, dxdydz &= \iiint_E (r\sin\theta\cos\varphi - r\cos\theta)\, r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_{\pi/2}^{\pi} \left(\int_0^{\pi} (\sin\theta\cos\varphi - \cos\theta)\, d\varphi\right) \sin\theta\, d\theta\right) r^3\, dr \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_{\pi/2}^{\pi} (-\pi\cos\theta\sin\theta)\, d\theta\right) r^3\, dr = \left[-\frac{\pi\sin^2\theta}{2}\right]_{\pi/2}^{\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{9\pi.}{8}.\end{aligned}$$

3. Sätt $F(x, y, z) = x^2 + 3z^2 - xy - 3yz$; då är den givna ytan nivåytan $F(x, y, z) = 44$. Tangentplanet till denna yta i en punkt (a, b, c) på ytan är parallellt med det givna planet, $3x - 4y + 3z = 0$, precis då $\nabla F(a, b, c) \parallel (3, -4, 3)$ och $F(a, b, c) = 44$, d.v.s. precis då $(2a - b, -a - 3c, 6c - 3b) \parallel (3, -4, 3)$ och $a^2 + 3c^2 - ab - 3bc = 44$. Det första villkoret ger $2a - b = 6c - 3b$ och $3(a + 3c) = 4(2a - b)$, alltså $a = 7c/3$ och $b = 2c/3$, som insatt i det andra ger $c^2 = 9$, d.v.s. $c = \pm 3$, och därmed tangeringspunkterna $(7, 2, 3)$ och $(-7, -2, -3)$.

4. Integralen är generaliserad, men integranden är positiv, så vi kan använda variabelbyte och upprepad integration.

   Eftersom $x^2 + 4xy + 8y^2 = (x + 2y)^2 + (2y)^2$ gör vi först det linjära bytet $u = x + 2y$, $v = 2y$, som ger $dudv = |d(u, v)/d(x, y)|dxdy = 2\, dxdy$ och nytt område $E = \mathbf{R}^2$, och därefter det planpolära bytet $u = r\cos\varphi$, $v = r\sin\varphi$ med ny mängd $F : 0 \le r < \infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ och $dudv = r\, drd\varphi$, varför

$$\iint_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-4xy-8y^2} dxdy = \iint_E e^{-u^2-v^2} \frac{dudv}{2} = \frac{1}{2}\iint_F e^{-r^2} r\, drd\varphi = \pi\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

5. (a) Standardutvecklingarna $e^t = 1 + t + \mathcal{O}(t^2)$ och $\ln(1 + t) = t + \mathcal{O}(t^2)$ ger

$$\begin{aligned}f(x, y, z) - f(0, 0, 0) &= x^2 + 3y^2 + e^{z^2} + \ln(3 + yz) - (1 + \ln 3) \\ &= x^2 + 3y^2 + e^{z^2} - 1 + \ln(1 + yz/3) \\ &= x^2 + 3y^2 + z^2 + yz/3 + \mathcal{O}(r^4) \\ &= x^2 + (z + y/6)^2 + 107y^2/36 + \mathcal{O}(r^4),\end{aligned}$$

   där den kvadratiska formen $Q(x, y, z) = x^2 + (z + y/6)^2 + 107y^2/36$ är positivt definit; således har f lokalt minimum i punkten $(0, 0, 0)$.

(b) Eftersom

$$\nabla f = \left(2x, 6y + \frac{z}{3+yz}, 2ze^{z^2} + \frac{y}{3+yz}\right) = (0, -4, 4e^4 - 1) \text{ då } (x,y,z) = (0,-1,2)$$

ser vi att denna punkt inte ens är stationär för f.

Svar: (a) Lokalt minimum (b) Ingetdera

6. Sätt $F(x,y) = \sin(x^2y) - y^3$. Eftersom $F \in \mathcal{C}^1$, $F(0,-1) = 1$ och $F'_y = x^2\cos(x^2y) - 3y^2 = -3 \neq 0$ då $(x,y) = (0,-1)$, ger implicita funktionssatsen att ekvationen $F(x,y) = 1$ definierar en $\mathcal{C}^1$-funktion $y(x)$ i en omgivning till $(0,-1)$.

Implicit derivering av $\sin(x^2y) - y^3 = 1$ m.a.p. x i en omgivning av $x = 0$ ger

$$y' = \frac{2y\cos(x^2y)}{3y^2 - x^2\cos(x^2y)} \cdot x,$$

och eftersom $2y\cos(x^2y)$ ligger nära -2 och $3y^2 - x^2\cos(x^2y)$ ligger nära 3 då (x,y) ligger nära $(0,-1)$ inser vi att $y'(x)$ uppvisar teckenväxlingen $+0-$ då x passerar 0 åt höger. Alltså har $y(x)$ lokalt maximum då $x = 0$.

Svar: Lokalt maximum.